主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2021 年秋季学期

复变函数与积分变换期末试题

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得　分								
阅卷人								

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 80 分。

姓名 ____ 学号 ____ 班号 ____ 学院 ____

密　封　线

一、　本题得分 ______

填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 复数 $\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}$ 的主辐角是 $\underline{\dfrac{\pi}{4}}$。（或 45°）

2. 设 $(1+\mathrm{i})^{2\mathrm{i}}=\mathrm{e}^z$，则必有 $\mathrm{Im}(z)=\underline{\ln 2+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}}$。

3. 函数 $f(z)=2xy-\mathrm{i}x^2$ 在 $\underline{\ y=0\text{（或实轴）}\ }$ 可导。

4. 已知函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数，$f(0)=0$，且

$$v=2xy,$$

则 $f(z)=\underline{\ z^2\ }$。（或 $x^2-y^2+\mathrm{i}2xy$）

5. 设 C 是正向的圆周 $|z|=2$。则

$$\oint_C z^2\sin\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\underline{-\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}。$$

6. 设C是正向的单位圆$|z|=1$，则

$$\oint_{|z|=1} \mathrm{e}^{|z|}\overline{z}\,\mathrm{d}z = \underline{2\mathrm{e}\pi\mathrm{i}}。$$

7. 设函数$\dfrac{e^{\frac{1}{z}}\cos z}{(z^2-3z+2)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n$，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n$的收敛半径

$R=\underline{\ 1\ }$。

8. 设幂函数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$的收敛半径是 2，幂函数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n z^n$的收敛半径是 3，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$的收敛半径$R=\underline{\ 2\ }$。

9. 积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^t\sin t\cos(2t+1)\delta(t)\mathrm{d}t=\underline{\ 0\ }$。

10. 设$f(t)=\cos 4t+\sin 2t$，则其傅氏变换

$$F(\omega)=\underline{\pi\left[\delta(\omega+4)+\delta(\omega-4)\right]+\mathrm{i}\pi\left[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)\right]}。$$

姓名________ 密

学号________ 封

班号________ 线

学院________

二、 本题得分 ______

单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 $z=x+\mathrm{i}y$。若 $z^2=\bar{z}^2$，则必有(D)。

A. $z=0$；　B. $x=0$；　C. $y=0$；　D. $xy=0$ 。

2. 设 $z_1\neq 0$ 和 $z_2\neq 0$。关于复数的辐角，下列等式中正确的是(B)。

A. $\operatorname{Arg}0=0$；　B. $\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2$；

C. $\arg 0=0$；　D. $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$。

3. 下列命题正确的是(B)。

A. 若 $f'(z_0)$ 存在，则函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析。

B. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析，则 $f'(z_0)$ 存在。

C. 若 $f'(z_0)$ 存在，则函数 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域里一定可展开成幂级数。

D. 若函数 $f(z)$ 的实部与虚部满足 $C-R$ 条件，则 $f'(z)$ 存在。

4. $z=\infty$ 是函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}-1+z+z^2+z^3+z^5$ 的(C)。

A. 本性奇点；　B. 可去奇点；　C. 5 阶极点；　D. 非孤立奇点。

5. $z=0$ 是下列哪个函数的可去奇点(B)。

A. $\sin\frac{1}{z}$；　B. $\frac{1}{z}-\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}$；　C. $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$；　D. $\frac{\sin^2 z}{z^4}$。

6. 设 $z_1 \neq z_2$，则 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{1}{(z-z_1)^8(z-z_2)}, z_1\right] =$ (A)。

A. $-\dfrac{1}{(z_2-z_1)^8}$；　B. $\dfrac{1}{(z_2-z_1)^8}$；　C. $-\dfrac{2\pi i}{(z_2-z_1)^8}$；　D. $\dfrac{2\pi i}{(z_2-z_1)^8}$。

7. 若函数 $f(z)=(x^2-y^2+ax+by)+\mathrm{i}(cxy+3x+2y)$ 处处解析，则

$(a,b,c)=$ (C)。

A. $(3,2,2)$；　B. $(-3,2,2)$；

C. $(2,-3,2)$；　D. $(2,3,2)$。

8. 幂函数 $\sum_{n=0}^{\infty}\cos(\mathrm{i}n)z^{2n}$ 的收敛半经是(D)。

A. e；　B. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；

C. $\sqrt{\mathrm{e}}$；　D. $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$。

9. 下列拉氏变换中不正确的是(D)。

A. $L[1]=\dfrac{1}{s}$, $\mathrm{Re}(s)>0$；　B. $L[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$, $\mathrm{Re}(s)>0$；

C. $L[\delta(t)]=1$；　D. $L[\sin\omega t]=\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$, $\mathrm{Re}(s)>0$。

10. 设函数 $f(t)=\delta(t)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$，则它的傅氏变换是(A)。

A. $1+2\pi\delta(\omega-\omega_0)$；　B. $1+2\pi\delta(\omega+\omega_0)$；

C. $1-2\pi\delta(\omega-\omega_0)$；　D. $1-2\pi\delta(\omega+\omega_0)$。

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

三、 本题得分 ______

运算题（每小题 5 分，共 10 分）

1. $I=\oint_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{d}z}{\left(2z^{2021}+1\right)\left(z-2\right)}$；

解： $I=\oint_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{d}z}{\left(2z^{2021}+1\right)\left(z-2\right)}$

$$=-2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\left(2z^{2021}+1\right)\left(z-2\right)},2\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\left(2z^{2021}+1\right)\left(z-2\right)},\infty\right]\right\}$$

$$=-2\pi\mathrm{i}\left\{\frac{1}{2^{2022}+1}-\mathrm{Res}\left[\frac{z^{2020}}{\left(2+z^{2021}\right)\left(1-2z\right)},0\right]\right\}$$

$$=-\frac{2\pi\mathrm{i}}{2^{2022}+1}。$$

2. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\sin 2x}{1+x^{2}}\,\mathrm{d}x$。

解： $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\sin 2x}{1+x^{2}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}}{1+x^{2}}\,\mathrm{d}x\right)$

$$=\mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{1+z^{2}},\mathrm{i}\right]\right\}$$

$$=\mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-2}}{2\mathrm{i}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{\mathrm{e}^{2}}。$$

四、　本题得分 ______

（10 分）求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$ 在区域 $2<|z|<3$ 内的洛朗展开式。

解：
$$f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}$$
$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$
$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-2^n\right)\frac{1}{z^{n+1}}。$$

五、　本题得分 ______

（10 分）利用拉普拉斯变换求解下列初值问题
$$\begin{cases} y''+5y'+6y=3e^{-t}; \\ y(0)=y'(0)=0。\end{cases}$$

解：令 $L[y(t)]=Y(s)$。在第一个方程两边求拉普拉斯变换，并代入初值条件得
$$s^2Y(s)+5sY(s)+6Y(s)=\frac{3}{s+1}$$
故
$$Y(s)=\frac{3}{(s+1)(s+2)(s+3)}。$$
$$\therefore y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\frac{3}{2}e^{-t}-3e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t}。$$

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

六、 本题得分 ______

（5 分）设函数 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$ 及函数

$$g(z)=b_{-2}\frac{1}{z^2}+b_{-1}\frac{1}{z}+b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots,$$

其中级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$和$\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$在$|z|<2$内收敛。求积分

$$\oint_C f(z)g(z)\mathrm{d}z,$$

其中C是正向的单位圆$|z|=1$。

解 1：由于$\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$在$|z|<2$内收敛，故洛朗级数

$$b_{-2}\frac{1}{z^2}+b_{-1}\frac{1}{z}+b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots$$

在$0<|z|<2$内收敛。从而函数$g(z)$在$0<|z|<2$内解析。又$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$在$|z|<2$内收敛，于是，函数$f(z)$在$|z|<2$内解析。因此函数$f(z)g(z)$在$0<|z|<2$内解析。即$z=0$是$f(z)g(z)$函数的孤立奇点。注意到

$$f(z)g(z)=a_0b_{-2}\frac{1}{z^2}+(a_0b_{-1}+a_1b_{-2})\frac{1}{z}+\cdots,\quad 0<|z|<2。$$

由留数定理，得

$$\oint_C f(z)g(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}(a_0b_{-1}+a_1b_{-2})。$$

解 2：由于级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$和$\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$在$|z|<2$内收敛，故函数$f(z)$及$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 在$|z|<2$内解析。因此，由柯西积分公式，柯西积分定理及高阶导数公式，得

$$\oint_C f(z)g(z)\mathrm{d}z=\oint_C\left[b_{-2}\frac{f(z)}{z^2}+b_{-1}\frac{f(z)}{z}+f(z)\varphi(z)\right]\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\mathrm{i}(a_0b_{-1}+a_1b_{-2})。$$

七、　　本题得分 ______

（5 分）设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R\ (R>1)$ 内解析。证明：

$$\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\cos^2\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\pi f(0)+\frac{\pi}{2}f'(0)。$$

证： 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R\ (R>1)$ 内解析。令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},0\le t\le 2\pi$ 。则

$$\mathrm{d}z=\mathrm{i}z\mathrm{d}t；$$

$$\cos^2\frac{t}{2}=\frac{1+\cos t}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{z^2+1}{z}。$$

故

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\cos^2\frac{t}{2}\mathrm{d}t&=\oint_{|z|=1} f(z)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{z^2+1}{z}\right]\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\left[\frac{1}{2}\frac{f(z)}{z}+\frac{1}{4}f(z)+\frac{1}{4}\frac{f(z)}{z^2}\right]\mathrm{d}z。\end{aligned}$$

注意到 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 解析，由柯西积分公式，柯西积分定理及高阶导数公式，得

$$\begin{aligned}&\oint_{|z|=1}\left[\frac{1}{2}\frac{f(z)}{z}+\frac{1}{4}f(z)+\frac{1}{4}\frac{f(z)}{z^2}\right]\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}\mathrm{d}z+\frac{1}{4}\oint_{|z|=1}f(z)\,\mathrm{d}z+\frac{1}{4}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}2\pi\mathrm{i}\cdot f(0)+0+\frac{1}{4}2\pi\mathrm{i}\cdot f'(0)\\&=\pi\mathrm{i}\,f(0)+\frac{\pi\mathrm{i}}{2}f'(0)。\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\cos^2\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\pi f(0)+\frac{\pi}{2}f'(0)。$$