主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2021 年秋季学期

复变函数与积分变换期末试题

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得　分								
阅卷人								

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 80 分。

姓名　学号　班号　学院

密　封　线

一、　本题得分 ______

填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 复数 $\frac{2}{1-i}$ 的主辐角是________。

2. 设 $(1+i)^{2i}=e^z$，则必有 $\operatorname{Im}(z)=$__________。

3. 函数 $f(z)=2xy-ix^2$ 在__________可导。

4. 已知函数 $f(z)=u+iv$ 是解析函数，$f(0)=0$，且

$v=2xy$，

则 $f(z)=$ __________。

5. 设 C 是正向的圆周 $|z|=2$。则

$$\oint_C z^2\sin\frac{1}{z}\,dz=$$____________。

6. 设C是正向的单位圆$|z|=1$，则

$$\oint_{|z|=1} \mathrm{e}^{|z|}\overline{z}\ \mathrm{d}z = \underline{\qquad\qquad}。$$

7. 设函数 $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}\cos z}{(z^2-3z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n$ ，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n$ 的收敛半径

$R=$ ____________。

8. 设幂函数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半经是 2，幂函数$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半经是 3，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)z^n$ 的收敛半经$R=$ ________。

9. 积分$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^t \sin t\cos(2t+1)\delta(t)\mathrm{d}t=$________ 。

10. 设 $f(t)=\cos 4t+\sin 2t$，则其傅氏变换

$F(\omega)=$____ 。

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

二、　本题得分 ______

单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 $z=x+\mathrm{i}y$。若 $z^2=\overline{z}^2$，则必有(　　)。

A. $z=0$；　B. $x=0$；　C. $y=0$；　D. $xy=0$。

2. 设 $z_1\neq 0$ 和 $z_2\neq 0$。关于复数的辐角，下列等式中正确的是(　　)。

A. $\mathrm{Arg}0=0$；　B. $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2$；

C. $\arg 0=0$；　D. $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$。

3. 下列命题正确的是(　　)。

A. 若 $f'(z_0)$ 存在，则函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析。

B. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析，则 $f'(z_0)$ 存在。

C. 若 $f'(z_0)$ 存在，则函数 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域里一定可展开成幂级数。

D. 若函数 $f(z)$ 的实部与虚部满足 $C-R$ 条件，则 $f'(z)$ 存在。

4. $z=\infty$ 是函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}-1+z+z^2+z^3+z^5$ 的(　　)。

A. 本性奇点；B. 可去奇点；C. 5 阶极点；D. 非孤立奇点。

5. $z=0$ 是下列哪个函数的可去奇点(　　)。

A. $\sin\dfrac{1}{z}$；　B. $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^z-1}$；　C. $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$；　D. $\dfrac{\sin^2 z}{z^4}$。

6. 设 $z_1 \neq z_2$，则 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{1}{(z-z_1)^8(z-z_2)}, z_1\right]=$ (　　)。

A. $-\dfrac{1}{(z_2-z_1)^8}$；　B. $\dfrac{1}{(z_2-z_1)^8}$；　C. $-\dfrac{2\pi i}{(z_2-z_1)^8}$；　D. $\dfrac{2\pi i}{(z_2-z_1)^8}$。

7. 若函数 $f(z)=\left(x^2-y^2+ax+by\right)+i(cxy+3x+2y)$ 处处解析，则

$(a,b,c)=$ (　　)。

A. $(3,2,2)$；　B. $(-3,2,2)$；

C. $(2,-3,2)$；　D. $(2,3,2)$。

8. 幂函数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos(in)z^{2n}$ 的收敛半径是(　　)。

A. e；　B. $\dfrac{1}{e}$；

C. $\sqrt{e}$；　D. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$。

9. 下列拉氏变换中不正确的是(　　)。

A. $L[1]=\dfrac{1}{s}$，$\operatorname{Re}(s)>0$；　B. $L[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$，$\operatorname{Re}(s)>0$；

C. $L[\delta(t)]=1$；　D. $L[\sin\omega t]=\dfrac{1}{s^2+\omega^2}$，$\operatorname{Re}(s)>0$。

10. 设函数 $f(t)=\delta(t)+e^{i\omega_0 t}$，则它的傅氏变换是(　　)。

A. $1+2\pi\delta(\omega-\omega_0)$；　B. $1+2\pi\delta(\omega+\omega_0)$；

C. $1-2\pi\delta(\omega-\omega_0)$；　D. $1-2\pi\delta(\omega+\omega_0)$。

姓名________ 密 学号________ 封 班号________ 线 学院________

三、 本题得分 ______

运算题（每小题 5 分，共 10 分）

1. $I=\oint_{|z|=1}\dfrac{\mathrm{d}z}{\left(2z^{2021}+1\right)\left(z-2\right)}$；

2. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\sin 2x}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$。

四、　本题得分 ______

（10 分）求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+6}$ 在区域 $2<|z|<3$ 内的洛朗展开式。

五、　本题得分 ______

（10 分）利用拉普拉斯变换求解下列初值问题

$$\begin{cases} y''+5y'+6y=3\mathrm{e}^{-t}; \\ y(0)=y'(0)=0。\end{cases}$$

姓名______ 密

学号______ 封

班号______ 线

学院______

六、 **本题得分** ______

（5 分）设函数 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$ 及函数

$$g(z)=b_{-2}\frac{1}{z^2}+b_{-1}\frac{1}{z}+b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots,$$

其中级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$和$\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$在$|z|<2$内收敛。求积分

$$\oint_C f(z)g(z)\mathrm{d}z,$$

其中C是正向的单位圆$|z|=1$。

七、　　**本题得分** ______

（5 分）设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R\ (R>1)$ 内解析。证明：

$$\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\cos^2\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\pi f(0)+\frac{\pi}{2}f'(0)。$$