2022 年 秋 季 学 期

复变函数与积分变换模拟试题参考答案

一、填空题（每小题 2 分，满分 20 分）

1. $\{z=x+y\mathrm{i}\,|\,y>0, x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2>4\}$

2. $10\pi\mathrm{i}$

3. $e^u\sin v+c$

4. $\frac{1}{2}\ln 2$

5. $-\pi\mathrm{i}$

6. 0

7. $|b|R$

8. 1

9. $\mathrm{e}^{i\omega_0 t}$

10. $\frac{\mathrm{i}}{2}\left[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)\right]$

二、单项选择题（每小题 2 分，满分 20 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	C	C	D	A	B	D	C	B

4. 易错警示：判断 $z=1$ 是否为奇点、为何种奇点，都必须在 $z=1$ 的去心邻域内展开为洛朗级数。

7. 提示：B 项 $\mathrm{Re}\, f(z)\equiv \mathrm{Im}\, f(z)$ 条件太强。

9. 简解：$L^{-1}\left[\frac{e^{-(s-2)}}{s+2}\right]=e^2L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s+2}\right]$，利用延迟性质 $L[f(t-t_0)u(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$

得 $e^2L^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s+2}\right]=e^2e^{-2(t-1)}u(t-1)=e^{-2(t-2)}u(t-1)$。

三、运算题（每小题 5 分，满分 10 分）

（1）$I=2\pi i\left[\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)},-i\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)},1\right]\right]$

$$=-2\pi i\left[\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)},3\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)},\infty\right]\right]$$

$$=-2\pi i\left[\frac{1}{(3+i)^{10}(3-1)}-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{z}+i\right)^{10}\left(\frac{1}{z}-1\right)\left(\frac{1}{z}-3\right)}\frac{1}{z^2},0\right]\right]=\frac{-\pi i}{(3+i)^{10}}$$

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^2+1},i\right]=2\pi i\lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)}=2\pi i\frac{e^{-1}}{2i}=\pi e^{-1}$

$\therefore I=\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+1}dx\right)=\pi e^{-1}$

四、（9分）解： 设$\frac{1}{z}=\frac{1}{1+(z-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,|z-1|<1$，

于是$\frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(z-1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n(n+1),|z-1|<1$

$\ln(2-z)=\ln[1-(z-1)]=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(z-1)^{n+1},|z-1|<1$

所以当$0<|z-1|<1$时，有

$\frac{\ln(2-z)}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{z^2}\ln(2-z)=-\frac{1}{z-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n(n+1)\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(z-1)^{n+1}\right)$

$=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n(n+1)\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(z-1)^n\right)$

$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)\frac{1}{(n-k)+1}\right](z-1)^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{k+1}{n-k+1}\right](z-1)^n,0<|z-1|<1.$

五、（9分）解： 设$L[y(t)]=Y(s)$，则有

$L[y''(t)]-L[y'(t)]-6L[y(t)]=L[2]$

$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-[sY(s)-y(0)]-6Y(s)=\frac{2}{s}$，代入初始条件有

$s^2Y(s)-s-sY(s)+1-6Y(s)=\frac{2}{s}$，进而$(s^2-s-6)Y(s)=s-1+\frac{2}{s}$

$\therefore Y(s)=\frac{s-1+\frac{2}{s}}{s^2-s-6}=\frac{s^2-s+2}{s(s+2)(s-3)}$

$$\therefore y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\text{Res}[Y(s)e^{st},0]+\text{Res}[Y(s)e^{st},-2]+\text{Res}[Y(s)e^{st},3]$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{s^2-s+2}{(s+2)(s-3)}e^{st}+\lim_{s\to -2}\frac{s^2-s+2}{s(s-3)}e^{st}+\lim_{s\to 3}\frac{s^2-s+2}{s(s+2)}e^{st}$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{8}{15}e^{3t}$$

六、（7 分）解：当$|z|<1$时有

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right]z^n,$$

所以$\dfrac{f(z)}{z^{n+1}}=\ldots+\left[1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right]\dfrac{1}{z}+\ldots$

$$\therefore I_n=2\pi i\,\text{Res}\left[\frac{f(z)}{z^{n+1}},0\right]=2\pi i\left[1-\frac{1}{2^{n+1}}\right].$$

七、（5 分）证明：

（1）由柯西积分公式即得：$[f(z)]^n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$；

（2）利用（1）：$[f(z)]^n\le\dfrac{1}{2\pi}\oint_C\dfrac{|f(\zeta)|^n}{|\zeta-z|}\mathrm{d}s\le\dfrac{1}{2\pi}M^n\dfrac{1}{d}\oint_C\mathrm{d}s=\dfrac{M^nl}{2\pi d}$

则$|f(z)|\le M\left(\dfrac{l}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}},n=1,2,\ldots$

令$n\to\infty$，得$|f(z)|\le M\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{l}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}=M.$

附加题：1. A　　2. D