2022 年秋季学期

复变函数与积分变换模拟试题

注意事项：

1. 本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 80 分。

注意行为规范　遵守考场纪律

得分	
阅卷人	

一、填空题：每小题 2 分，满分 20 分。

1. 满足 $0 < \arg \dfrac{z-1}{z+1} < \dfrac{\pi}{6}$ 的点 z 所构成的点集是__________.

2. 函数 $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{z}{5}}$ 的周期是__________.

3. 函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 是解析函数，则 $\mathrm{e}^{u}\cos v$ 的共轭调和函数是____________________.

4. $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ 的辐角主值是_______________.

5. $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{3}}\,\mathrm{d}z =$_______________.

6. $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z-2}}\,\mathrm{d}z}{(z^{2}+2)(z-3)} =$_______________.

7. 已知 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R，则 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{b^n} z^n (b \neq 0)$ 的收敛半径为_______________.

8. 设幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \mathrm{e}^{\frac{\cos z}{1-z}}$，则它的收敛半径为_______________.

9. 设 $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$，则 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] =$_______________.

10. 设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$，则 $\mathcal{F}[f(t)\sin\omega_0 t] =$_______________.

得分	
阅卷人	

二、 选择题：每题 2 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列函数中，都有 $f(0)=0$，则在原点不连续的是 （　　）

A. $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}z}{1+|z|}$　　B. $f(z)=\dfrac{(\mathrm{Re}z)^2}{|z|}$

C. $f(z)=\dfrac{[\mathrm{Re}(z^2)]^2}{|z|^2}$　　D. $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|^2}$

2. 已知 $z=\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^8$，则 $z^{66}+2z^{33}-2$ 的值为 （　　）

A. $-\mathrm{i}$　　B. 1　　C. i　　D. -1

3. 函数 $f(z)=|z|^2$ 在点 $z=0$ 处不成立 （　　）

A. 连续　　B. 可导　　C. 解析　　D. C-R 条件

4. 设 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^3}=\dfrac{1}{(z-1)^4}-\dfrac{1}{(z-1)^5}+\dfrac{1}{(z-1)^6}-\cdots$，其中 $|z-1|>1$，则

A. $z=1$ 是 $f(z)$ 的本性奇点　　B. $\mathrm{Res}[f(z),1]=0$

C. $z=1$ 是 $f(z)$ 的三阶极点　　D. 以上全不正确

5. $z=1$ 是函数 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$ 的 （　　）

A. 解析点　　B. 可去奇点　　C. 极点　　D. 本性奇点

6. 函数 $f(z)=\dfrac{z}{z^4-1}$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的留数为 （　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，则与 $f(z)\equiv$ 常数不等价的命题是 （　　）

A. $f'(z)\equiv 0$　　B. $\mathrm{Re}f(z)\equiv \mathrm{Im}\,f(z)\equiv$ 常数

C. $\overline{f(z)}$ 解析　　D. $|f(z)|\equiv$ 常数

8. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$ 的收敛半径为 （　　）

A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　D. e

9. 已知 $F(s)=\dfrac{\mathrm{e}^{-(s-2)}}{s+2}$，则 $f(t)=L^{-1}[F(s)]=$ （　　）

A. $\mathrm{e}^{-2t}u(t-1)$　　B. $\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1)$　　C. $\mathrm{e}^{-2(t-2)}u(t-1)$　　D. $\mathrm{e}^{-2t}u(t-2)$

10. 已知 $f(t) = t^n e^{-at} u(t)$，则 $F(s) = L[f(t)]$ 的收敛域为 （　　）

A. $\mathrm{Re}s > a$　　B. $\mathrm{Re}s > -a$　　C. $\mathrm{Re}s > 0$　　D. $\mathrm{Re}s < -a$

得分	
阅卷人	

三、运算题（每小题 5 分，满分 10 分）

求下列积分：

（1）$I = \oint_{|z|=2} \dfrac{1}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}\,\mathrm{d}z$；

（2）$I = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

得分	
阅卷人	

四、（**9** 分）

将函数
$$f(z)=\frac{\ln(2-z)}{z^2(z-1)}$$
在 $0<|z-1|<1$ 内展开成洛朗级数。

附：这是原先入选后被换下的两题，可以在考后思考

1. 设 $z=a$ 是解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},a\right]=$ （　　）

A. m　　B. $-m$　　C. $m-1$　　D. $-(m-1)$

2. $z=\infty$ 是函数 $f(z)=\cot z-\dfrac{1}{z}$ 的 （　　）

A. 解析点　　B. 本性奇点　　C. 孤立奇点　　D. 非孤立奇点

得分	
阅卷人	

五、（9 分）

求解下列初值问题：

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 2 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}.$$

得分	
阅卷人	

六、（7 分）

设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$，求积分

$$I_n=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z, n=0,1,2,\cdots.$$

得分	
阅卷人	

七、（5 分）

设函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 上及内部 D 处处解析且不为常数，n 为正整数。

（1） 对于任意的 $z \in D$，证明：

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{[f(\xi)]^n}{\xi - z} \mathrm{d}\xi$$

（2） 设 $M = \max\limits_{\xi \in C}\{|f(\xi)|\}$，$l$ 为 C 的长度，$d = \min\limits_{\xi \in C}\{|\xi - z|\}$，证明不等式

$$|f(z)| \leqslant M\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}}$$

并进一步证明

$$|f(z)| \leqslant M, z \in D.$$