主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2022 年秋季学期

复变函数与积分变换期末试题

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得　分								
阅卷人								

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 80 分。

学院＿＿＿＿ 班号＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿

密 封 线

一、　本题得分 ＿＿＿＿

填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 复数 $\frac{1}{2}(1-3\mathrm{i})$ 的主辐角是 $\underline{-\arctan 3}$。

2. $\ln\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}=\underline{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}}$。

3. 函数 $f(z)=x^2+2xy\mathrm{i}$ 在 $\underline{y=0\text{ 或实轴}}$ 可导。

4. 已知函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数，$f(0)=1$，且

$$v=\mathrm{e}^x\sin y,$$

则 $f(z)=\underline{\mathrm{e}^z\text{ 或 }\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)}$。

5. 设 C 是正向的圆周 $|z|=1$。则

$$\oint_C z\cos\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\underline{-\pi\mathrm{i}}。$$

6. 设函数 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$，$a_0,a_1,\cdots a_n\in\mathbb{C}$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}z^{n-1}\left|f(z)\right|^2\,dz=\underline{a_0\overline{a_n}}\text{。}$$

7. 设函数 $\dfrac{e^{\frac{z}{1-z}}\cos z}{(z^2+3z+2)e^z}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径 $R=\underline{\ 1\ }$。

8. 洛朗函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z-2)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\dfrac{z}{2}\right)^n$ 的收敛圆环域为 $\underline{1<|z-2|<2}$。

9. 设 $f(t)=t\sin 2t$，则其拉氏变换

$$\mathcal{L}(t\sin 2t)=\frac{4s}{(s^2+4)^2}\text{。}$$

10. 设 $f(t)=e^{-|t|}\cos t$，则其傅氏变换

$$F(\omega)=\underline{\frac{1}{(\omega+1)^2+1}+\frac{1}{(\omega-1)^2+1}=\frac{2(\omega^2+2)}{\omega^4+4}}\text{。}$$

二、　本题得分 ______

单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 $w=\sqrt[2022]{1}$ 且 $w\neq 1$，则 $1+w+w^2+\cdots+w^{2021}=$ (B)。

A. 1； B. 0； C. -1； D. 2022 。

2. 下列命题正确的是(C)。

A. $\forall z\in\mathbb{C},\ e^z>0$； B. $f(z)=e^{\bar{z}}$ 是 z 的解析函数；

C. $\forall z\in\mathbb{C},\ \overline{e^z}=e^{\bar{z}}$； D. $f(z)=e^{\frac{z}{3}}$ 的周期是 πi 。

3. 下列命题正确的是(C)。

A. 若 $f'(z_0)$ 存在，则函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析。

B. 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，则 $f(z)$ 在 z_0 点不可导。

C. 若函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析，则 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域里可导。

D. 若函数 $f(z)$ 的实部与虚部为调和函数，则 $f(z)$ 解析。

4. 设函数 $f(z)=\frac{1}{(z-4)^2}-\frac{4}{(z-4)^3}+\frac{4^2}{(z-4)^4}-\cdots,\ |z-4|>4$，则(D)。

A. $z=4$ 是 $f(z)$ 的二阶极点； B. $z=4$ 是 $f(z)$ 的本性奇点；

C. $\mathrm{Res}\left[f(z),4\right]=0$； D. A, B, C 均不正确。

5. 设 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶零点，是函数 $g(z)$ n 阶零点，$n>m$，则 z_0 是函数 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的(B)。

A. $n-m$ 阶零点；B. $n-m$ 阶极点；C. 可去奇点；D. 本性奇点。

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

6. 下列哪个函数在指定点的去心邻域内可展成洛朗级数(A)。

A. $\cos\frac{1}{z},\ z=\infty$； B. $\dfrac{z^2}{\sin\frac{1}{z}},\ z=0$； C. $\ln z,\ z=0$； D. $\ln z,\ z=\infty$。

7. 若函数 $f(z)=u+iv$ 在 $z_0=x_0+y_0\mathrm{i}$ 解析，则 $f'(z_0)\neq$(B)。

A. $u_x(x_0,y_0)+\mathrm{i}v_x(x_0,y_0)$； B. $u_y(x_0,y_0)+\mathrm{i}v_y(x_0,y_0)$；

C. $v_y(x_0,y_0)+\mathrm{i}v_x(x_0,y_0)$； D. $u_x(x_0,y_0)-\mathrm{i}u_y(x_0,y_0)$。

8. 幂函数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{2^n}z^{2n}$ 的收敛半径是(A)。

A. $\sqrt{\frac{2}{3}}$； B. $\sqrt{\frac{3}{2}}$；

C. $\sqrt{2}$； D. $\sqrt{\frac{1}{2}}$。

9. 函数 $f(t)=3$ 拉氏变换是(C)。

A. $\frac{1}{s},\ \mathrm{Re}(s)>0$； B. $\frac{1}{s},\ \mathrm{Re}(s)>1$；

C. $\frac{3}{s},\ \mathrm{Re}(s)>0$； D. $\frac{3}{s},\ \mathrm{Re}(s)>3$ 。

10. 设函数 $f(t)=\delta(t-t_0)$，则它的傅氏变换是(D)。

A. 1； B. 2π；

C. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}$； D. $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$。

姓名
学号
班号
学院
密 封 线

三、　本题得分 ______

运算题（每小题 5 分，共 10 分）

1. $I=\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{\left(z^{2022}+2\right)(z-3)}$；

解：$I=\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{\left(z^{2022}+2\right)(z-3)}$

$$=-2\pi\mathrm{i}\left\{\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\left(z^{2022}+2\right)(z-3)},3\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\left(z^{2022}+2\right)(z-3)},\infty\right]\right\}$$

$$=-2\pi\mathrm{i}\left\{\frac{1}{3^{2022}+2}-\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2021}}{\left(2+z^{2022}\right)(1-3z)},0\right]\right\}$$

$$=-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3^{2022}+2}。$$

2. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos 3x}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$。

解：$\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos 3x}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x=\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x\right)$

$$=\operatorname{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3z}}{z^2+2z+5},-1+2\mathrm{i}\right]\right\}$$

$$=\operatorname{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-6-3\mathrm{i}}}{4\mathrm{i}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2\mathrm{e}^6}\cos 3。$$

四、　**本题得分** ______

（10 分）求函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z-2}$ 在区域 $1<|z|<2$ 内的洛朗展开式。

解：
$$f(z)=\frac{1}{z^2+z-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3\cdot 2^{n+1}}z^n。$$

五、　**本题得分** ______

（10 分）利用拉普拉斯变换求解下列初值问题
$$\begin{cases} y''-2y'-3y=-12; \\ y(0)=8,\ y'(0)=0。\end{cases}$$

解： 令 $L[y(t)]=Y(s)$。在第一个方程两边求拉普拉斯变换，并代入初值条件得
$$s^2Y(s)-8s-2sY(s)+16-3Y(s)=-\frac{12}{s}。$$

于是，有 $$Y(s)=\frac{8s^2-16s-12}{s(s+1)(s-3)}。$$

因此，得 $$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=4+3e^{-t}+e^{3t}。$$

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

六、 **本题得分** ______

（5 分）设函数 $f(z)$ 及函数 $g(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析。又设 $f(z)$ 的所有零点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都在 $|z|<1$ 内且它们的阶数分别是 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，计算

$$\oint_{|z|=1}\frac{f'(z)g(z)}{f(z)}\mathrm{d}z \text{。}$$

解：设函数 $f(z)=(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\cdots(z-a_n)^{m_n}\varphi(z)$，其中 $\varphi(z)$ 在 $|z|<2$ 内解析且 $\varphi(z)\neq 0$。因此， 有

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=1}\frac{f'(z)g(z)}{f(z)}\mathrm{d}z &= \oint_{|z|=1}\left(\frac{m_1}{z-a_1}+\frac{m_2}{z-a_2}+\cdots+\frac{m_n}{z-a_n}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)g(z)\ \mathrm{d}z\\ &=2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{m_1g(z)}{z-a_1},a_1\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{m_2g(z)}{z-a_2},a_2\right]+\cdots\mathrm{Res}\left[\frac{m_ng(z)}{z-a_n},a_n\right]+0\right\}\\ &=2\pi\mathrm{i}\left[m_1g(a_1)+m_2g(a_2)+\cdots+m_ng(a_n)\right]\\ &=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}m_kg(a_k) \text{。}\end{aligned}$$

七、 **本题得分** ______

（5 分）设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R\ (R>1)$ 内解析。证明：

$$\mathrm{Re}\left\{\oint_{|z|=1}\overline{f(z)}f'(z)\mathrm{d}z\right\}=0\text{。}$$

证 1：设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R\ (R>1)$ 内解析，则在 $|z|<R$ 内有

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots\text{。}$$

于是

$$\begin{aligned}\overline{f(z)}&=\bar{a}_0+\bar{a}_1\bar{z}+\bar{a}_2\bar{z}^2+\cdots+\bar{a}_n\bar{z}^n+\cdots, & |z|<R\\ &=\bar{a}_0+\bar{a}_1\frac{1}{z}+\bar{a}_2\frac{1}{z^2}+\cdots+\bar{a}_n\frac{1}{z^n}+\cdots\text{。} & |z|=1\end{aligned}\text{。}$$

因此

$$\operatorname{Re}\left\{\oint_{|z|=1}\overline{f(z)}f'(z)\mathrm{d}z\right\}=\operatorname{Re}\left[\oint_{|z|=1}\left(\bar{a}_0+\bar{a}_1\frac{1}{z}+\bar{a}_2\frac{1}{z^2}+\cdots+\bar{a}_n\frac{1}{z^n}+\cdots\right)\left(a_1+2a_2z+\cdots+na_nz^{n-1}+\cdots\right)\mathrm{d}z\right]$$

$$=\operatorname{Re}\left(2\pi\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2\right)=0。$$

证 2： 设函数 $f(z)$ 在 $|z|<R$ $(R>1)$ 内解析，且 $f(z)=u+\mathrm{i}v$。则 u,v 有连续的 2 阶偏导及

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\quad(1);\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad(2);\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\quad(3)。$$

故

$$\operatorname{Re}\left\{\oint_{|z|=1}\overline{f(z)}f'(z)\mathrm{d}z\right\}=\operatorname{Re}\left\{\oint_{|z|=1}(u-\mathrm{i}v)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)\right\}$$

$$=\operatorname{Re}\left\{\oint_{|z|=1}\left[\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\mathrm{i}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right](\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)\right\}$$

$$=\oint_{|z|=1}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(-u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}y \qquad \text{利用}(2)$$

$$=\oint_{|z|=1}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\mathrm{d}\left(u^2+v^2\right)$$

$$=0。\qquad \square$$

$$\operatorname{Re}\left\{\oint_{|z|=1}\overline{f(z)}f'(z)\mathrm{d}z\right\}$$

$$=\oint_{|z|=1}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(-u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}y \qquad \text{利用}(2)$$

或 $$=\oint_{|z|=1}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x+\left(-u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left[\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}-u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0。\qquad \text{利用}(2),(3)\text{和格林公式}$$