主管
领导
审核
签字

哈尔滨工业大学（深圳）2023年秋季学期

复变函数与积分变换期末试题

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得　分								
阅卷人								

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为120分钟，总分80分。

姓名　　学号　　班号　　学院

密　　封　　线

一、　本题得分 ______

填空题（每小题2分，共20分）

1. 复数 $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ 的主辐角是 $\underline{\frac{\pi}{4}}$。

2. $\ln\left[\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8\right]=$ $\underline{8\ln 2+\frac{2}{3}\pi i}$。

3. 函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)+\bar{z}\,\mathrm{Im}(z)+\bar{z}$ 在 $\underline{(1,-1)}$ 或 $\underline{1-\mathrm{i}}$ 可导。

4. 已知函数 $f(z)=2(x-1)y+\mathrm{i}v$ 是解析函数，其中 $v=v(x,y)$ 且 $f(2)=-\mathrm{i}$，则 $f(z)=$ $\underline{-\mathrm{i}(z-1)^2}$。

5. 设 C 是正向的圆周 $|z|=2$。则

$$\oint_C z\left(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}\right)dz=\underline{4\pi\mathrm{i}}。$$

6. 设函数 $f(z)=u+iv$ 在 $|z|<R\ (R>1)$ 内解析，则

$$\oint_{|z|=1}\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x-\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=\underline{\quad 0\quad}。$$

7. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2\mathrm{i})^n$ 在点 $z=0$ 处收敛，在点 $z=-2+2\mathrm{i}$ 处发散，则幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2\mathrm{i})^n$ 的收敛半径 $R=\underline{\quad 2\quad}$。

8. 洛朗函数 $\frac{1}{z^{2023}}+\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\cos(\mathrm{i}n)z^n$ 的收敛圆环域为 $\underline{0<|z|<\frac{1}{\mathrm{e}}}$。

9. 设 $F(s)=\frac{-5}{(s+1)^2+25}$，则其拉氏逆变换

$f(t)=\underline{-\mathrm{e}^{-t}\sin 5t}$。

10. 设 $f(t)=\cos t+\sqrt{3}\sin t$，则其傅氏变换

$F(\omega)=\underline{\pi\left[\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\delta(\omega+1)+\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\delta(\omega-1)\right]}$ 。

姓名________ 学号________ 班号________ 学院________

密 封 线

二、 本题得分 ______

单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1\. 设 $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$， 则 $1+z^{100}+z^{200}=$ （ A ）。

A. 1； B. 0； C. -1； D. 2 。

2\. 下列命题正确的是(B)。

A. $\forall z\in\mathbb{C},\ |\sin z|\le 1$； B. $f(z)=\ln z$ 没有孤立奇点；

C. $\forall z\in\mathbb{C},\ \arg z^2=2\arg z$； D. $f(z)=\mathrm{e}^z$ 的周期是 $\pi\mathrm{i}$ 。

3\. 设 $f(z)=\sqrt{z^2+1}$， 则 $f(\mathrm{i}+2)=$(D)。

A. $2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$； B. $\pm 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$；

C. $2^{\frac{5}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$。 D. $\pm 2^{\frac{5}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$。

4\. $z=\infty$ 是函数 $f(z)=\frac{z^9}{(z-2)^2(1+z^2)^3}$ 的(B)。

A. 可去奇点； B. 一阶极点；

C. 本性奇点； D. 非孤立奇点。

5\. $z=0$ 是函数 $f(z)=\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}-\frac{1}{z}$ 的(C)。

A. 非孤立奇点； B. 一阶极点；

C. 可去奇点； D. 本性奇点。

6. 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$在点$z=4$处发散，则它必在(C)。

A. $z=0$收敛； B. $z=3$收敛； C. $z=-1$发散； D. A, B, C均不正确。

7. 设函数$f(z)$在$|z|<R\ (R>1)$内解析，则对于正向圆周$C:|z|=1$，有

$$\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\,\mathrm{d}z = (\ \mathrm{D}\ )。$$

A. $2\pi i f(0)$； B. $2\pi i \overline{f(0)}$；

C. $2\pi i f'(0)$； D. $2\pi i \overline{f'(0)}$。

8. 幂函数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{n^2} z^{2n+1}$的收敛半径是(D)。

A. $R=1$； B. $R=3$；

C. $R=\frac{1}{3}$； D. $R=\frac{1}{\sqrt{3}}$。

9. 设$F(s)=\frac{4}{s^2+4}$，则其拉氏逆变换是(C)。

A. $4\sin t$； B. $\sin 4t$；

C. $2\sin 2t$； D. $\sin 2t$。

10. 下列傅氏变换中不正确的是 (C)。

A. $\mathcal{F}^{-1}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)] = e^{i\omega_0 t}$； B. $\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$；

C. $\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$； D. $\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)] = \frac{2}{i\omega}$。

姓名 密 学号 封 班号 线 学院

三、 本题得分 ______

运算题（每小题 5 分，共 10 分）

1. $I=\oint_{|z|=3}\dfrac{z^{2023}\mathrm{d}z}{(z+2)^{2023}(z-2)^{2023}(z-4)}$；

解： $I=\oint_{|z|=3}\dfrac{z^{2023}\mathrm{d}z}{(z+2)^{2023}(z-2)^{2023}(z-4)}$

$$=-2\pi\mathrm{i}\left\{\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2023}}{(z+2)^{2023}(z-2)^{2023}(z-4)},4\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2023}}{(z+2)^{2023}(z-2)^{2023}(z-4)},\infty\right]\right\}$$

$$=-2\pi\mathrm{i}\left\{\frac{1}{3^{2023}}-\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2022}}{(1+2z)^{2023}(1-2z)^{2023}(1-4z)},0\right]\right\}$$

$$=-\frac{2\pi\mathrm{i}}{3^{2023}}。$$

2. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x$。

解： $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x=\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x$

$$=\operatorname{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\cdot\operatorname{Res}\left[\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2-2z+10},1+3\mathrm{i}\right]\right\}$$

$$=\operatorname{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\frac{(1+3\mathrm{i})\mathrm{e}^{-3+\mathrm{i}}}{6\mathrm{i}}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3\mathrm{e}^3}(3\cos1+\sin1)。$$

四、　本题得分 ______

（10 分）求函数 $f(z)=\dfrac{z^{200}}{(z-1)(z+2)}$ 在区域 $1<|z|<2$ 内的洛朗展开式。

解： $$f(z)=\frac{z^{200}}{(z-1)(z+2)}=\frac{z^{200}}{3}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right)$$

$$=\frac{z^{200}}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}\right]$$

$$=\frac{z^{200}}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\frac{1}{z^{n-199}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3\cdot 2^{n+1}}z^{n+200}。$$

五、　本题得分 ______

（10 分）利用拉普拉斯变换求解下列初值问题

$$\begin{cases} y''-y'-6y=2; \\ y(0)=1,\ y'(0)=0。\end{cases}$$

解： 令 $L[y(t)]=Y(s)$。在第一个方程两边求拉普拉斯变换，并代入初值条件得

$$s^2Y(s)-s-sY(s)+1-6Y(s)=\frac{2}{s}$$

于是，有 $$Y(s)=\frac{s^2-s+2}{s(s+2)(s-3)}。$$

因此，得 $$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=-\frac{1}{3}+\frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{8}{15}e^{3t}。$$

六、 **本题得分** ______

（8 分） 设函数 $f(z)=\dfrac{z-2}{z^2-7z+12}$，计算

$$I_n=\oint_{|z-2|=\frac{1}{4}}\frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}}\,\mathrm{d}z,\ n=1,2,\cdots。$$

解 1： $I_n=\oint_{|z-2|=\frac{1}{4}}\dfrac{f(z)}{(z-2)^{n+1}}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\dfrac{f(z)}{(z-2)^{n+1}},2\right]$。

又

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{z-2}{z^2-7z+12}=(z-2)\left(\frac{1}{z-4}-\frac{1}{z-3}\right)\\
&=(z-2)\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z-2}{2}}+\frac{1}{1-(z-2)}\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-2)^{n+1},\quad |z-2|<1。
\end{aligned}$$

故

$$I_n=\oint_{|z-2|=\frac{1}{4}}\frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\left(1-\frac{1}{2^n}\right),\ n=1,2,\cdots。$$

解 2： $I_n=\oint_{|z-2|=\frac{1}{4}}\dfrac{f(z)}{(z-2)^{n+1}}\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[\dfrac{f(z)}{(z-2)^{n+1}},2\right]$。

$$=-2\pi\mathrm{i}\cdot\left\{\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}},3\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}},4\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}},\infty\right]\right\}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left(1-\frac{1}{2^n}\right),\ n=1,2,\cdots。$$

七、　　**本题得分** ______

（2 分）设函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析且 $\{z||z-a|\le R\}\subset G$。证明：如果

$$|f(z)|\le M,\ \forall z\in\{z||z-a|=R\},$$

则对任意 $w_1,w_2\in\left\{z||z-a|\le\frac{1}{2}R\right\}$，有

$$|f(w_1)-f(w_2)|\le\frac{4M}{R}|w_1-w_2|。$$

解：设函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析且 $\{z||z-a|\le R\}\subset G$。$\forall w\in\{z||z-a|<R\}$，由柯西积分公式，得

$$f(w)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z-w|=R}\frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z。$$

特别。如果 w_1,w_2 是圆盘 $|w-a|<\frac{R}{2}$ 内的任意两点，则

$$\begin{aligned}f(w_1)-f(w_2)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z-w|=R}\left[\frac{f(z)}{z-w_1}-\frac{f(z)}{z-w_2}\right]\mathrm{d}z\\&=\frac{w_1-w_2}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z-w|=R}\frac{f(z)}{(z-w_1)(z-w_2)}\,\mathrm{d}z。\end{aligned}$$

注意到，$|z-w_1|>\frac{R}{2}$ 及 $|z-w_2|>\frac{R}{2}$，我们有

$$\begin{aligned}|f(w_1)-f(w_2)|&\le\frac{|w_1-w_2|}{2\pi}\oint_{|z-w|=R}\frac{|f(z)|}{|(z-w_1)(z-w_2)|}\,\mathrm{d}s\\&\le\frac{|w_1-w_2|}{2\pi}\frac{M}{\frac{R^2}{4}}2\pi R\\&=\frac{4M}{R}|w_1-w_2|。\end{aligned}$$