主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2023 年秋季学期

复变函数与积分变换期末试题

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得　分								
阅卷人								

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为 120 分钟，总分 80 分。

姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 班号＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿

密 封 线

一、　本题得分 ＿＿＿＿

填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 复数 $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ 的主辐角是＿＿＿＿＿＿。

2. $\ln\left[\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{8}\right]=$ ＿＿＿＿＿＿

3. 函数 $f(z)=z\operatorname{Re}(z)+\bar{z}\operatorname{Im}(z)+\bar{z}$ 在＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿可导。

4. 已知函数 $f(z)=2(x-1)y+\mathrm{i}v$ 是解析函数，其中 $v=v(x,y)$ 且 $f(2)=-\mathrm{i}$，则 $f(z)=$ ＿＿＿＿＿＿

5. 设 C 是正向的圆周 $|z|=2$。则

$$\oint_C z\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}+\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}\right)\mathrm{d}z=\_\_\_$$

6. 设函数 $f(z)=u+iv$ 在 $|z|<R\ (R>1)$ 内解析，则

$$\oint_{|z|=1}\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x-\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_\_$$。

7. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2\mathrm{i})^n$ 在点 $z=0$ 处收敛，在点 $z=-2+2\mathrm{i}$ 处发散，则幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2\mathrm{i})^n$ 的收敛半径 $R=$ ____。

8. 洛朗函数 $\frac{1}{z^{2023}}+\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\cos(\mathrm{i}n)z^n$ 的收敛圆环域为 ________

9. 设 $F(s)=\frac{-5}{(s+1)^2+25}$，则其拉氏逆变换

$f(t)=$ ________。

10. 设 $f(t)=\cos t+\sqrt{3}\sin t$，则其傅氏变换

$F(\omega)=$ ________________________________ 。

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

二、 本题得分 ______

单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 设 $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$，则 $1+z^{100}+z^{200}=$（ ）。

A. 1； B. 0； C. -1； D. 2 。

2. 下列命题正确的是( )。

A. $\forall z\in\mathbb{C},\ |\sin z|\le 1$； B. $f(z)=\ln z$ 没有孤立奇点；

C. $\forall z\in\mathbb{C},\ \arg z^2=2\arg z$； D. $f(z)=\mathrm{e}^z$ 的周期是 $\pi\mathrm{i}$ 。

3. 设 $f(z)=\sqrt{z^2+1}$，则 $f(\mathrm{i}+2)=$( )。

A. $2\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$； B. $\pm 2\sqrt{2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$；

C. $2^{\frac{5}{4}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$。 D. $\pm 2^{\frac{5}{4}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$。

4. $z=\infty$ 是函数 $f(z)=\frac{z^9}{(z-2)^2(1+z^2)^3}$ 的 ）。

A. 可去奇点； B. 一阶极点；

C. 本性奇点； D. 非孤立奇点。

5. $z=0$ 是函数 $f(z)=\frac{1}{\mathrm{e}^z-1}-\frac{1}{z}$ 的( )。

A. 非孤立奇点； B. 一阶极点；

C. 可去奇点； D. 本性奇点。

6. 若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$在点$z=4$处发散，则它必在(　　)。

A. $z=0$收敛；　B. $z=3$收敛；　C. $z=-1$发散；　D. A, B, C均不正确。

7. 设函数$f(z)$在$|z|<R\ (R>1)$内解析，则对于正向圆周$C:|z|=1$，有

$$\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\,\mathrm{d}z = (\quad)。$$

A. $2\pi i f(0)$；　　B. $2\pi i\ \overline{f(0)}$；

C. $2\pi i f'(0)$；　　D. $2\pi i\ \overline{f'(0)}$。

8. 幂函数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{n^2} z^{2n+1}$的收敛半径是(　　)。

A. $R=1$；　　B. $R=3$；

C. $R=\frac{1}{3}$；　　D. $R=\frac{1}{\sqrt{3}}$。

9. 设$F(s)=\frac{4}{s^2+4}$，则其拉氏逆变换是(　　)。

A. $4\sin t$；　　B. $\sin 4t$；

C. $2\sin 2t$；　　D. $\sin 2t$。

10. 下列傅氏变换中不正确的是 (　　)。

A. $\mathcal{F}^{-1}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_0)\right]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$；　　B. $\mathcal{F}\left[u(t)\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)$；

C. $\mathcal{F}\left[\sin\omega_0 t\right]=\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$；　　D. $\mathcal{F}\left[\mathrm{sgn}(t)\right]=\frac{2}{\mathrm{i}\omega}$。

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

三、 本题得分 ______

运算题（每小题 5 分，共 10 分）

1. ______________ ;

解

2. $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}\,\mathrm{d}x$ 。

解

四、　　**本题得分** ______

（10 分）求函数 $f(z)=\dfrac{z^{200}}{(z-1)(z+2)}$ 在区域 $1<|z|<2$ 内的洛朗展开式。

解：

五、　　**本题得分** ______

（10 分）利用拉普拉斯变换求解下列初值问题

$$\begin{cases} y''-y'-6y=2; \\ y(0)=1,\ y'(0)=0。\end{cases}$$

解

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

密 封 线

六、 本题得分 ______

（8 分）设函数 $f(z)=\dfrac{z-2}{z^2-7z+12}$，计算

$$I_n=\oint_{|z-2|=\frac{1}{4}}\frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}}\mathrm{d}z,\ n=1,2,\cdots。$$

解 1：

解 2：

七、 **本题得分 ______**

（2 分）设函数 在区域 内解析且 | | 。证明：如果

$$\left|f(z)\right| \le M, \ \forall z \in \left\{z \middle| \left|z-a\right| = R\right\},$$

则对任意 $w_1, w_2 \in \left\{z \middle| \left|z-a\right| \le \frac{1}{2}R\right\}$，有

$$\left|f(w_1) - f(w_2)\right| \le \frac{4M}{R}\left|w_1 - w_2\right|。$$

解：