复变函数简明教程的简明教程

前言

之前一直写的都是突击性的总结文章,这一次我突然想写一点稍微有一点营养的作品,顺便对我所学复分析的知识进行一个复习.说是有营养,其实也没有太多营养,你几乎可以把这本书理解为对Stein书一小部分的一个翻译.惟数不多原创性的内容在"用Green定理证明Goursat定理"和复对数的导数永远是单值函数这两部分.所以若此处有谬误,还望各位读者及时指正.

本书适用于需要快速查看定理的同学,以及想要对数学增进一些了解的工科同学,和想要稍微预习或者复习一下复变函数的同学.另外虽说本书叫做《复变函数简明教程的简明教程》,但这本书的逻辑顺序和《复变函数简明教程》还是相当不一样的.不如说后者的逻辑......有些一言难尽,因此本文主要采取了Stein教授所写课本的架构.关于积分变换部分,由于笔者暂时还没有深入了解傅里叶分析,所以就不班门弄斧强写些什么内容了.本书中例题很少,想要找些练习的同学可以看看Stein的书或者自己去找些题目来做.

囿于成文仓促,若有疏漏在所难免,还望各位读者及时批评指正.

2021/9/15

伟大的神罗皇帝

参考资料

Complex Analysis,Elias M. Stein.

Fourier Analysis An Introduction,Elias M. Stein.

Real Analysis, 陶哲轩.

Principle of Mathematical Analysis, W. Rudin.

目录

Chapter 1.复变函数基础

Section 1.1 复数和复平面

高中数学课程早已介绍过复数的概念.相信各位读者对复数已经有了许多”感性的认知“.因此,本书对复数的介绍将采用与感性了解不同的,理性的现代数学定义.

$$Def(\text{复数})\text{:复数集}\mathbb{C}\text{定义为}\{(x,y)\|\ x,y\in\mathbb{R}\},\mathbb{C}\text{中的元素称为复数}.$$
$$\text{并且称两个复数}(a,b)\text{、}(c,d)\text{相等,当且仅当}a=c\text{且}b=d$$

也就是说,复数其实就是$\mathbb{R}^2$中的元素,而$\mathbb{C}$自然是与$\mathbb{R}^2$中的元素一一对应的,所以复数集也称为复平面.而复平面与$\mathbb{R}^2$唯一的区别就是：我们将要在复数集上引入一些不同于二元数组的运算

$$\begin{aligned} Def(\text{复数的运算}):&\text{复数的加法：}(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)\\ &\text{复数的乘法}:(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)\\ &\text{复共轭}:\overline{(a,b)}=(a,-b)\\ &\text{复数的模}:|(a,b)|=\sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

由以上的运算法则我们立刻得到：

$$Lemma.\ (a,b)\times\overline{(a,b)}=|(a,b)|^2$$

并且立刻可以引出定义

$$Def(\text{复数的倒数}):\frac{1}{(a,b)}=\frac{\overline{(a,b)}}{|(a,b)^2|},(ab\neq 0)$$

同时,定义复数的除法为乘以除数的倒数.

这就是复数和二元实数最大的区别：复数有除法,但是二元实数没有除法.这也是为何复数有和$\mathbb{R}^2$完全不同的美妙性质.

在经过一些不复杂的推理,我们马上就可以得到：

$$\begin{aligned} Lemma.&\text{每一个复数}z\in\mathbb{C}\text{都可以写成}z=a+bi,\text{其中}a,b\in\mathbb{R}\text{。且}i^2=-1,-z=(-1)z\\ &\text{并且记}z\text{的实部}Re(z)=a\text{，}z\text{的虚部}Im(z)=b.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Lemma(\text{共轭运算的性质}).&\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w},\overline{-z}=z\overline{z},\overline{\overline{z}}=z\\ &\overline{z}=\overline{w}\text{当且仅当}z=w\\ &\overline{z}=z\text{当且仅当}z\in\mathbb{R}\\ &Re(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z}),Im(z)=\frac{1}{2}(z-\overline{z})\end{aligned}$$

最后,复数集构成度量空间:

$$Theorem.\ (\mathbb{C},d)\text{构成完备度量空间，其中度量}d(z,w):=|z-w|$$

那……什么是完备度量空间呢？简单来说,这句话的意思是$\mathbb{C}$满足一般意义下的极限定律、连续性并且任何复数集中的柯西列必收敛于某一复数.并且,在度量空间的意义下,$\mathbb{C}$与$\mathbb{R}^2$完全同构.

关于复数的基础知识,我们就谈到这里.读者可能会问：为什么我们不谈一谈复数的其他表示法？这是因为我们暂时还没有定义复指数函数,因此直接拿出欧拉公式是不合理的行为.接下来我们就来为定义初等复变函数做一些准备工作.

Extra discussion.复数的乘方

我们暂时不定义复数的开方运算,这是因为开方运算没法通过”限制“的手法把它变成一个真正的函数.我们暂时只定义复数的整数次幂,与实数的整数次幂运算一致.

$$Def(\text{复数的整数乘方}):n\text{为正整数时，}z^n:=\prod_{k=1}^{n}z.n\text{为负整数时，}z^n:=\prod_{k=1}^{-n}\frac{1}{z}$$

关于乘方运算,我们进行一些非正式的讨论.尽管我们还没有提到复数的指数表示法,但在此暂且不加论证的使用.现在对于$z=re^{i\theta}(r>0)$,我们假定其对于幂运算依然和实数情况一样.那么,开方运算,也即分数乘方,可以写作

$$z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i\theta}{n}}$$

由于θ上加上2π周期,表示的复数相同,所以这一些数都是z的n次方根

$$r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},k\in N.$$

由此得到,复数z的n次方根有n个,所以说我们没法定义一个对所有复数都成立的开方函数.但至少由此你能知道复数乘方的“朴素”求法.

Section 1.2 复幂级数和初等复变函数

$$Def(\text{复幂级数的收敛}).\text{对于复幂级数}\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n\text{，我们称其绝对收敛，当}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n||z|^n\text{收敛。}$$

我们不再赘述复幂级数收敛的各种判别法,它们可以轻松由实幂级数的判别法推出.并且为方便起见,以后我们都省略复字直接说幂级数.

$$\begin{aligned}&Theorem.\text{对于任意的幂级数, 必定存在}0 \le R \le +\infty\text{使得}\\&\quad (i)\text{若 }|z| < R,\text{级数绝对收敛}\\&\quad (ii)\text{若 }|z| > R,\text{级数发散}\\&\quad \text{并且收敛半径}R\text{定义为}\frac{1}{R} = limsup|a_n|^{1/n}(\text{上极限}),\text{区域 }|z| < R\text{称为收敛圆盘.}\end{aligned}$$

现在,我们就可以定义初等复变函数了.

$$\begin{aligned}Def(\text{初等复变函数}).\text{复指数函数}e^z &:= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\\ \text{复正弦函数}sin(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ \text{复余弦函数}cos(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\\ &\text{并且它们在整个复平面上收敛.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Corollary.\quad &z, w\text{是复数，}n\text{是整数，则：}\\ &e^{z+w} = e^z e^w\\ &e^{nz} = (e^z)^n\end{aligned}$$

$$Theorem(\text{欧拉公式}).\, cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$$
$$\text{特别地，若}z = a+bi\text{，则}e^{a+bi} = e^a\big(cos(b)+isin(b)\big)$$

在定义了这三个复变函数之后,我们可以引出：复数的指数表示法.

$$Lemma(\text{复数的指数形式}).\text{若复数}z = (a,b)\text{有极坐标表示}(r,\theta),\text{则此复数可写作}z = re^{i\theta}$$
$$\text{并且此时我们称}\theta\text{是复数}z\text{的一个幅角}(argument)\text{，并且}z\text{的幅角主值}arg(z)\text{定义为}\theta\text{在}(-\pi,\pi]\text{对应的角}$$

想到复数和R^2上的点一一对应,那么我们就可以借用欧式空间的极坐标表示来证明这个复数的"极坐标表示".

需要注意的是,我们暂时没有定义以任意复数为底数的指数函数（当然,整数次幂除外）,也没有定义复对数.而这两个问题的原因是一样的：这是因为复指数函数并不是一个单射.这意味着不存在在整个复平面上都成立的复对数,所以我们也没法定义在整个平面上都成立的任意数为底数的指数函数.幸运的是,这并非无法克服的困难,但我们要稍微把这个问题放后一些再议.

最后引出这样一个概念:

$$Def(\text{复解析函数}).\text{如果}f:\Omega\to\mathbb{C}\text{可以展开为以}z_0\in\Omega\text{为中心的幂级数，且此幂级数有正收敛半径，即}$$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$
$$f\text{在}z_0\text{处解析，并且若}f\text{在}\Omega\text{内任意点处都解析，则称}f\text{在}\Omega\text{解析.}$$

那么实际上,解析函数和幂级数,在收敛圆盘内都是连续且无穷次“复可微”的.我们马上就来探讨一下复函数的这些性质

Section1.3 定义在复平面上的函数

连续函数

由于$\mathbb{C}$构成完备度量空间,并且实际上与$\mathbb{R}^2$是同构的,所以这里已经没有叙述的必要了——此处的连续性和R^2的连续性是类似的.

并且以下的结论也是类似的.

$$Theorem.\text{定义在紧集}\Omega\text{上的连续函数一定有界，并且在}\Omega\text{上一定可以取到最大值和最小值}$$

全纯函数

从现在开始,我们将要讨论真正属于复数集的性质.首先我们定义“复可微”,也就是全纯(holomorphic).此处的定义,和二元函数的定义完全不一样.

$$Def(\text{全纯函数}).\ f:\Omega\to C,\text{若在}z_0\in\mathbb{C}\text{处以下极限存在则称}f\text{在}z_0\text{处全纯}$$
$$\lim_{h\to z_0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$
$$\text{若}f\text{在}\Omega\text{中任意点都全纯，则}f\text{在}\Omega\text{全纯。很自然地，记以上极限为}f'(z_0).$$

值得强调的是,h是可从任意方向趋向z_0的复数.

在二元函数的可微中,我们的分母是h的范数.但此刻我们直接把分子除以h,而非除以h的范数.

$$Corollary(\text{复函数求导运算}).\ \text{和你所想象的性质一样}$$

Cauchy-Riemann 方程

在集合论的意义上,复平面和实平面完全等同.所以任意的复函数$f(z)=u+iv$,它都对应了一个实函数$F(x,y)=(u,v)$.从映射的角度来说,这应该是完全相同的映射.所以在这个意义上,我们可以灵活运用如下记号:

$$f(z)=F(x,y)$$
$$\text{或者}f(z)=f(x,y)\text{当}z=x+iy$$

但显然,复可微和实可微是完全不一样的.比如说:

$$Example.\ f(z)=\overline{z}\text{不是全纯函数，但}F(x,y)=(x,-y)\text{是可微的。}$$

忘记了实变量的可微是怎么定义的吗？那我们在此叙述一下实变量的可微是如何定义的喵~

$$\vec{f}:R^n\to R^m\text{在}\vec{x}_0\text{处可微，即是说：}\exists\text{线性变换}T\text{：}R^n\to R^m\ \lim_{|\vec{x}|\to 0}\frac{\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{x}_0)-T\vec{x}}{|\vec{x}|}=0$$

（引自《级数、多元微分和积分的个人总结》by 伟大的神罗皇帝）

这个例子足以说明,F实可微无法推出f复可微.但,至少我们想得到一个复可微的必要条件.

现在我们研究上面的实函数F.假定它可微,那么必然有如下结果

$$F(x,y)=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}\\\frac{\partial v}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+o(x,y)$$

也就是说,u和v的偏导数统统存在.

若复函数f全纯,那么当$h=h_1+ih_2$分别沿着x与y方向逼近$z_0=x_0+iy_0$时

$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h_1}=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$
$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{ih_2}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

虽然我写的是$f(x_0,y_0+h)$,但你应该明白这实际上就是说$f(x_0+iy_0+ih_2)$

上式意味着

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

现在,因$f=u+iv$,照这样展开上式得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad and\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

这就是著名的Cauchy-Riemann方程,也就是复可微的必要条件.

不过,以上并不能作为严格的证明,但这也足以让我们理解这个方程组的由来.

有了这个铺垫,我们可以提出以下定理:

$$Theorem.\ f\text{是一个复函数，而}F\text{是其对应的实函数。}$$
$$\text{则}f\text{可微当且仅当}F\text{连续可微且满足}Cauchy-Riemann\text{方程}$$
$$\text{并且}detJ_F(x,y)=\left|f'(z)\right|^2\text{（}J_F\text{是}F\text{的雅可比矩阵）}$$

简单地证明一下：若$f=u+iv$全纯,则u,v都全纯,并且实际上全纯函数是无穷次可微的,所以u,v自然是连续的并且其偏导数也是连续的,而$F(x,y)=(u,v)$在u,v偏导连续的情况下是连续可微的,并且可以证明此时F(或者说f)必然满足Cauchy-Riemann方程.

反过来,如果F(x,y)=(u,v)连续可微并且满足Cauchy-Riemann方程,用定义即可验证f是全纯函数.

但首先,连续可微这个概念需要定义线性映射的范数(总之你知道连续可微当且仅当所有偏导连续就行)；其次,在下一章之前我们都无法证明全纯函数是无穷次可微的.因此在Stein教授的Complex Analysis中,本节内容分成两个定理：第一个是f全纯可推出Cauchy-Riemann方程、实可微和$detJ_F(x,y)=|f'(z)|^2$；第二个定理是F连续可微可推出复可微.

很容易可以看出,只要把下一章节的某些内容搬回来,立刻就可以证明这个优美的充分必要性(只要在命题1中能证出偏导数的连续性).所以说借助Cauchy-Riemann方程,我们架起了复可微和实可微的一座桥梁.

到目前为止我们还没有说明如何不用定义来求全纯函数的导数,但其实我已经说明了,只是我没有明说.回忆上文中的这两个式子:

$$f'(z_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h_1}=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$
$$f'(z_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{ih_2}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

这说明

$$f'(z_0)=\frac{1}{2}\big(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)+\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\big)$$

如果定义复微分算子如下,我们可得到如下结果:

$$Def.\ \frac{\partial}{\partial z}:=\frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\big)\quad \frac{\partial}{\partial \bar z}:=\frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\big)$$
$$Proposition.\text{若}f=u+iv\text{复可微，那么：}$$
$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}=2\frac{\partial u}{\partial z}\text{且}\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$$

证明显而易见,顺带一提,后一个微分算子等价于Cauchy-Riemann条件.

幂级数的性质

我只是为了逻辑链条的完整才把这个内容放在这里,其实早在上一节我们就可以谈论这些性质了.

$$Theorem.\text{幂级数在其收敛圆盘内是全纯函数，并且可以逐项求导到任意阶数}$$

在下一章,我们会证明这个定理的逆定理.这就是说,全纯和解析是一个意思,具体等到下一章再议.关于级数展开的问题,我们放到第二章Cauchy积分公式那一节.

复曲线积分

啊哈,怎么又是曲线积分.我希望你们没有被这个名词换起对多元微积分的恐怖回忆(想起『恐怖微积分』？).但如果你们能想起来的话,那最好了.我们马上就提出复曲线积分的定义.先做一些准备工作.

> Def(参数化曲线).
> 若$z:[a,b]\to\mathbb{C}$是从闭区间到复平面的映射，假定它满足一些正则性条件，那么它称为一个参数化曲线。
> 称这条曲线是光滑($smooth$)的，当$z'(t)$存在且在$[a,b]$上连续，并且恒不为0.
> 称这条曲线是闭($closed$)的，如果$z(a)=z(b)$
> 称这条曲线是简单($simple$)的，如果它不自相交
> 在区间端点处，我们采用单侧极限定义导数.
>
> > Def(分段光滑).
> > z是一条参数曲线，如果$z(t)$在$[a,b]$连续，且存在区间$[a,b]$的一个划分$\{a_1,\cdots,a_n\}$, 使得$z(t)$在每一个$[a_k,a_{k+1}]$光滑，则称z分段光滑.
> >
> > Def(等价参数化法).
> > z和$\tilde z$是两个参数化曲线，若存在一连续可微的双射$s\to t(s)$使得$t'(s)>0$且
> > $\tilde z(s)=z(t(s))$，则称两个参数曲线等价. 其中导数为正是为了保证曲线的行进方向不改变.
> > 等价的参数化法定义了$\mathbb{C}$中的一条有向曲线γ.
> > 顺便，对于$z(t)$，称$z^-(t)=z(a+b-t)$为它的反向参数化. 等价类定义了γ的逆曲线γ^-.

Def(环绕方向).
特别地，对于一个圆弧C, 我们称它的正环绕方向($positive\ orientation$)是逆时针方向,
反之为负环绕方向($negative\ orientation$)

若没有特殊说明,我们默认C指代的是圆弧的正环绕方向.

有了环绕方向的定义,我们就可以定义复曲线积分了,为方便起见,不引起混淆的情况下以后省略复字.

Def(曲线积分)γ是$\mathbb{C}$中的曲线，其参数化法为$z:[a,b]\to\mathbb{C}$, f是定义在曲线γ上的连续函数，则f沿着γ的积分定义为

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

特别地，曲线γ的长度定义为

$$lenth(\gamma) = \int_a^b |z'(t)|dt.$$

$Corollary$(曲线积分的性质). 曲线积分满足线性、齐性，有向性，绝对值不等式.

$$\text{有向性即}\int_\gamma f(z)dz = -\int_{\gamma^-} f(z)dz.$$

$$\text{绝对值不等式}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \sup_{z\in\gamma}|f(z)|\cdot lenth(\gamma)$$

复曲线积分和第二类曲线积分非常像,这可以从以下推导中看出来.

$$\begin{aligned}f(z)dz =&(u(z)+iv(z))(dx+idy)\\ =&u(z)dx-v(z)dy+i(v(z)dx+u(z)dy)\quad(\text{整理后即是第二类曲线积分})\\ =&\Big(u\big(z(t)\big)x'(t)-v\big(z(t)\big)y'(t)+i(v\big(z(t)\big)x'(t)+u\big(z(t)\big)y'(t))\Big)dt\\ =&f\big(z(t)\big)\cdot z'(t)dt\end{aligned}$$

这说明此定义是符合人的"一般直觉"的.

如果读者对微分形式的积分理论有所了解,就能更快的理解复曲线积分相关的理论.众所周知,在第二类曲线积分中,如果"被积函数",也即是说,微分形式,是恰当形式.那么,此积分将成立Newton-Leibnitz公式.复曲线积分亦然.

$Theorem(Newton-Leibnitz)$.
f是Ω上连续函数，且有原函数F, 也即$F'(z)=f(z)$, γ是以ω_1和ω_2为起止点的曲线，则：
$$\int_\gamma f(z)dz = F(\omega_2)-F(\omega_1)$$

证明很容易.由此定理立刻得到以下推论.

$Corollary$.
γ是开集Ω上的封闭曲线, 函数f连续且在其中存在原函数，那么：
$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

$Corollary$. 函数f是区域Ω上全纯函数，且$f'=0$，那么f是常数.

区域(region),即是指代连通的开集.而连通性,朴素的说就是任何两个点之间都存在一条完全包含在集合内的通路.

在之后,我们还会发现复曲线积分和第二类曲线积分的许多共同之处.比如说,后面将会用到Green定理的闭路变换手法.等到遇到的时候我们会再提到.

Chapter 2.Cauchy定理

本章,我们将仔细讨论全纯函数的性质.阅读过《复变函数简明教程》的读者肯定会有疑问：全纯到底是个什么东西?在工科数学教学中,我们一般都谈论的是"解析函数"而非"全纯函数".实际上,正如前文所说,在复数域上,这两个词是一个意思.但这两个词的本意是不一样的.然而,有些书里似乎根本没有出现全纯这个词.我的评价是：很难评价.

回忆一下之前的定义,全纯指的是函数在复数域上可导,而解析指的是一个函数可以展开成幂级数.这两个概念,在实数域上是不等价的,但在复数域上是等价的.这个等价性的建立,就来自于马上要提到的定理:Goursat定理.也就是说：在我们证明Goursat定理之前,我们无法说：复函数一次可导即是无穷次可导.所以,在网上,有些人用Green定理证明Goursat定理,这是不对的,是循环论证：因为在有Goursat定理之前,我们无法断言:f(z)=u+iv,u和v的偏导数是连续的.

Section 2.1 Goursat定理和Cauchy定理.

Goursat定理及其推论

回忆Newton-Leibnitz公式,它告诉我们：一个函数在开集Ω上有原函数,那么它在一条闭合曲线上的曲线积分为0.现在我们想问这个性质是否对任意的连续函数都成立.而答案当然是,确实成立.

$$\begin{aligned}&Theorem(Goursat).\\&\text{若}\Omega\subset\mathbb{C}\text{开集，且}T\subset\Omega\text{是一条三角形的周线}(contour),\text{且}T\text{的内部含于}\Omega\text{中，则：}\\&\int_T f(z)dz=0,\text{其中}f\text{是}\Omega\text{上全纯函数}.\end{aligned}$$

不能用Newton-Leibnitz公式证明,因为我们并没有说f有原函数.我们采用的证明方法是：把T切成一个个小的三角形分割积分,然后证明这个积分,被指数倍的小三角形积分控制.并且,即是乘上一个指数因子,小三角形积分也依然收敛于0.这里会用到闭集套定理.详细证明过程请看Theorem1.1,Chapter2,Complex Analysis,E.M.Stein.

第二章课后习题5是要求用Green定理"证明"Goursat定理.这里实际上是多增加了一个可微性条件,所以并非真正意义上的证明.

作为一个显然的推论,把上述定理中的三角形contour换成矩形,Goursat定理依然成立.

Goursat定理有一个不平凡的推论：任何全纯函数在开圆盘上存在原函数.

$$Theorem.\ f\text{是开圆盘}D\text{上全纯函数},\text{则在此圆盘内，}f\text{存在原函数。}$$

定理的证明是构造性的,构造的函数是

$$F(z)=\int_{\gamma_z}f(w)dw,\text{其中}\gamma_z\text{是以}D\text{中某一定点}z_0\text{到}z\text{的折线}.$$

然后,直接证明F的导数是f.

看过徐森林的《数学分析》第二卷的读者一定会发现,这个手法在证明某集合上恰当形式为闭形式的结论时用过.

尽管我们只在开圆盘上证明了这个定理,但读者应该意识到,此定理在任何开集(或者,至少得是单连通的)都能成立.关键在于,此集合的内部(interior)是定义明确的,并且我们选出一个用两点之间的曲线构造的”曲线积分函数“即可.

因此,在本书中我们提到的“周线(toy contour)”,就是满足以上两个条件的闭曲线.或许有读者会问,是否对其他类型的曲线,Goursat定理,以及接下来的Cauchy定理成立？答案是,根据Jordan定理,"a simple closed piecewise-smooth curve has a well defined interior that is 'simply connected(单连通).'"所以,依然成立.

接下来,就是著名的Cauchy定理.

$$Theorem(Cauchy).\ f\text{是开圆盘}D\text{上全纯函数}.\ \gamma\text{是}D\text{中一闭曲线，则}\int_\gamma f(z)dz=0$$

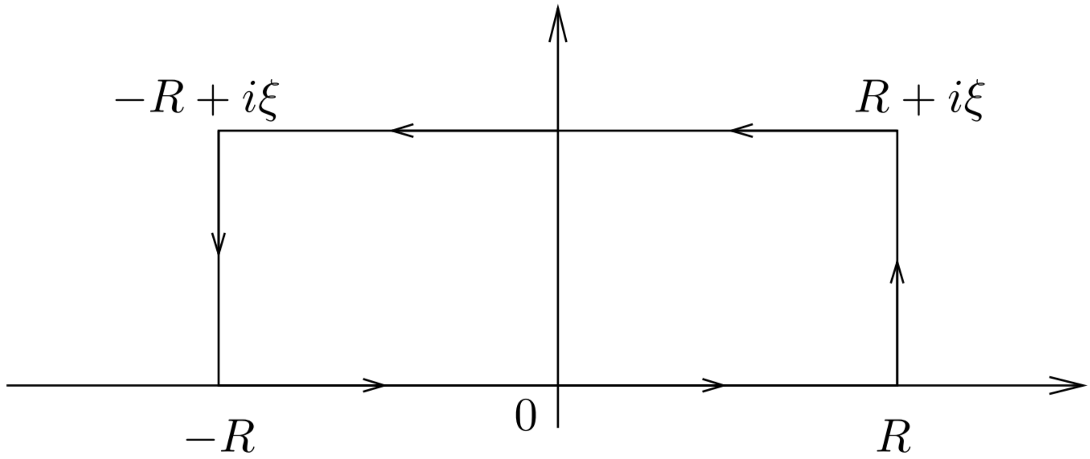
$$Corollary.\ Cauchy\text{定理对任意}contour\text{都成立}.$$

用Cauchy定理计算积分

我知道,读者很想问：Cauchy定理到底有什么用？所以我们给出一些积分估值问题让各位读者感受一下Cauchy定理的威力.就算没有留数(residue)公式,我们也可以用Cauchy定理处理许多许多积分问题.

$$\begin{gathered}Example1.\xi\in\mathbb{R},\text{则}\\e^{-\pi\xi^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi x^2}e^{-2\pi ix\xi}dx\end{gathered}$$

这实际上是一个Fourier变换,你当然可以纯粹用调和分析的技术弄出这个结果.但这次我们用复分析的手法来计算这个积分,用Cauchy定理来计算.我们将要构造一个曲线积分,而目标积分就是这个contour上的某一部分,下图正是所用的contourγ,按照逆时针方向环绕.被积函数定义为$f(z)=e^{-\pi z^2}$



按照Cauchy定理,此积分为0.

$$0=\int_\gamma f(z)dz=（\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}+\int_{\gamma_4}）f(z)dz$$

其中$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$分别指代这个contour的下,右,上,左边.其中γ_1的积分正是普通的实数轴上的积分:Gauss积分.

$$\int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}dx \to 1(R\to+\infty)$$

右边的积分按照如下方法计算

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz=\int_0^\xi f(R+it)idt=\int_0^\xi e^{-\pi(R^2+2iRt-t^2)}idt$$

显然,$R\to+\infty$可导出此积分为零,而γ_4与γ_3上的积分留做练习.答案是,左边的积分为0,而顶上的积分结果是

$$-e^{\pi\xi^2}\int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}e^{-2\pi ix\xi}dx$$

在原积分中让R趋向无穷大,得到:

$$0=1+0-e^{\pi\xi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}e^{-2\pi ix\xi}dx+0$$

$$\text{所以}e^{-\pi\xi^2}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}e^{-2\pi ix\xi}dx$$

这之中的关键问题在于,被积函数和contour的选取.相较而言,contour会更加好选一点,比如说当你看到一个积分可能和直线有关的时候,可以试试矩形contour;如果觉得和圆形有关可以试试圆形、半圆、扇形contour.但是contour的边界需要特别注意：你希望让哪些边趋向无穷,或者说哪些部分趋向无穷.比如说这道例题中,这个矩形仅仅是在长的方向趋向无穷,宽度不变,但有的题可能需要你两个都变动,或者变动长而不变动宽.

对于被积函数,其实直接使用被积函数就行了,如果你的技巧以及耐心非常高超,（应该或许）也能弄出结果.如果想选择巧妙一点的解法,或许就只能靠经验了.比如说：把$cos(z),sin(z)$换成e^{iz},然后根据初步计算的结果稍微再凑凑系数之类的.并且,被积函数的选取并不是唯一的,一个积分可能有不同的被积函数都能用于其的估值.

总之,这中的技巧还需要通过适当的练习来掌握.此处我们就只引这一个例题了.如需更多例题,可参看Stein的书第二章的Evaluation of some integrals（一些积分估值问题）一节.另外,此书的第二章章末习题也有几道计算题,有兴趣的读者可以做了找我对照一下答案（感觉要被群友抓计算错误）.

Cauchy's integral formulas

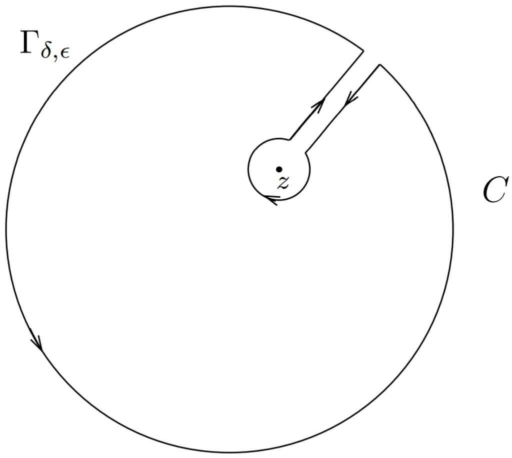
"Representation formulas, and in particular integral representation formu￾las, play an important role in mathematics, since they allow us to recover a function on a large set from its behavior on a smaller set."

这是Stein在他的书中所写的一句话：积分表示公式允许我们用一个函数的边界性质来复原它的整体性质.在Fourier分析中,Poisson's integral formula可以用于求解Dirichlet问题.在复分析中,Cauchy积分公式非常重要,许多重要结论都是通过此公式得出的(比如说全纯函数有无穷阶导数).我们甚至可以纯粹用复分析的工具得到Poisson积分公式,而那个工具,正是接下来要提到的Cauchy积分公式.

$Theorem(Cauchy's\ integral\ formula).$
f是开集上全纯函数，此开集包含了一圆盘D以及其闭包. 现记C为此圆盘的正向边界, 则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

我们将用到这个keyhole(锁眼) contour来证明,被积函数就是积分公式中的被积函数.



具体来说,是让走廊的宽度趋近于0,让这个积分分为外大圆C和内部以z为中心的小圆的积分,稍微再使那么些计算技巧即可证明Cauchy积分公式.

用数学归纳法,以及足够的耐心用于验证定义,我们立刻得到推论

$Corollary(Cauchy's\ integral\ formula).$
f是开集上全纯函数，此开集包含了一圆盘D以及其闭包. 现记C为此圆盘的正向边界, 则f有无穷阶导数且

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

至此,我们终于证明了全纯函数有任意阶导数,因此我们立刻(?)就能证明：全纯函数有幂级数展开式,因此全纯与解析是等价的概念,至此我们终于可以随意交换这两个词的位置了.

$Theorem(Power\ series\ expansion).$
f是开集Ω上全纯函数，D是此开集中以z_0为中心的圆盘，其闭包含于Ω中. 则f在z_0处有幂级数展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad 其中 a_n = \frac{f^n(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

证明：除了Cauchy积分公式,你还需要用到复几何级数,接着就是算算算.

另一个推论就是Cauchy不等式,不过此不等式非彼不等式.

$Theorem(Cauchy\,inequalities).$
f是开集上全纯函数，此开集包含了一以z_0为中心，半径为R的圆盘D以及其闭包. 现记C为此圆盘的正向边界, 则

$$|f^n(z)| \le \frac{n!\|f\|_C}{R^n}, 其中 \|f\|_C = \sup_{z\in C}|f(z)|$$

证明：对Cauchy积分公式用绝对值不等式.

Cauchy积分公式有很多很有意思的用法,并且绝不仅限于证明一个级数展开或者用于表示一个函数之类的.实际上,你可以用Cauchy积分公式证明Liouville定理,进而证明代数基本定理.但此处我们就不占用篇幅来谈论这些证明了.

一些应用

利用以上的定理,我们可以证明下面这些定理.在此我们仅做列举.

$Theorem(Morera).$ f是开圆盘D上连续函数. 若D中任意三角形周线T成立 $\int_T f(z)dz = 0$, 则f是全纯函数.

换句话说,这是Cauchy定理的逆定理.

$Theorem.$
$\{f_n\}$是一列定义在Ω上的全纯函数，若它在Ω的每一个紧子集上一致收敛，那么$f_n \to f$, f是Ω上全纯函数.
并且$\{f_n'\}$也在Ω的每一个紧子集上一致收敛到f'

这就是说,一致收敛保持全纯性.此定理对幂级数以及和函数理论有重要(?)作用.它断言函数项级数,若其一致收敛,则可由逐项求导的方法求出其和函数之导数.

Extra discussion1. 全纯函数和调和函数

u是一个调和(harmonic)函数,也就是说

$$\Delta u(x,y)=0, \text{其中}\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

实际上,我们有这样的结果

> u是定义在单位圆盘D上的两次连续可微调和函数，那么D上存在一个全纯函数f，使得$Re(f)=u$并且$Im(f)$除了一个常数的不同外也是唯一确定的.

加上一些玄妙的计算与"注意到",我们可以直接从Cauchy积分公式中导出Poisson积分公式.具体请参见Stein书第二章的习题11与12.

Extra discusstion2. 用Green定理证明特殊情况下的 Goursat定理

全纯函数f=u+iv,其对应的实函数为F(x,y)=(u,v).现在,假定u与v偏导数统统连续,我们来证明:

$$\int_T f(z)dz=0$$

其中T是Goursat定理中提到的三角形周线.如果直接取一个参数化,这个参数化必然只是分段光滑,所以我们先做一下处理.用锁眼周线的手法,我们可以把三角形周线变化为一个圆形周线.此时就有$\gamma=x+iy$作为圆周线C的一个光滑参数化法.

注意到:

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_a^b (u+iv)(x'(t)+iy'(t))dt\\ &= \int_a^b ux'(t)-vy'(t)dt+i\int_a^b vx'(t)+uy'(t)dt\\ &= \int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy\\ &= 0+i0=0\end{aligned}$$

如果没有F连续可微的假设,就不能使用Green定理.所以这其实并不是一个真正意义上的证明.

Chapter 3 亚纯函数和对数

什么是亚纯（meromprphic）函数？由字面意思来看,它指代的是全纯,但不完全全纯的函数.粗略的说,亚纯函数就是在其无定义的点以外全纯的函数.因此研究复平面上的特殊点是很有必要的.

总的来说,我们将复平面上的无定义点分成三类,统称为奇点(singularity).按照病态程度递增排序,它们分别是：

1. 可去奇点(removalbe singularites)
2. 极点(poles)
3. 本征奇点(essential singularities)

可去奇点类似于l'Hospital法则中,某些未定义点表现为不定式的时候,虽然它没有定义,但它在那一点有极限；那只要填充定义,它依然是连续函数.同样的,补充可去奇点处的定义,函数将变为原奇点处的全纯函数.

极点就是类似于$\frac{1}{z}$在0处表现的点,它来源于“除以零”.取0附近模的极限,此极限为$+\infty$,所以在复变函数在“除以零”时依然有发散到无穷大的表现：只不过是它的模发散而非复数本身发散到无穷大（这是因为复平面是无序关系的,所以不能直接说一个复数“很大”）.

本征奇点,类似于第二类间断点.亚纯函数在本征奇点附近将有无比快速的波动.在后文中,我们会看到一个定理：这个波动是如此的快,以至于其在本征奇点附近的象是$\mathbb{C}$中的稠密集！

Section 3.1 零点与奇点

为了研究奇点,我们需要先研究零点.现在考虑一个全纯函数f,它在z_0处有一个零点.我们知道全纯函数有幂级数展开式$f(z)=\sum a_n(z-z_0)^n$,按照最朴素的想法,幂级数和多项式性质类似,那么我们可以进行一个"因式分解"提取出非零部分.

$$f(z)=(z-z_0)^n g(z), g(z_0)\neq 0$$

此过程可以严格化为如下定理

$$
\begin{aligned}
&Theorem.\\
&f\text{是连通开集}\Omega\text{上的全纯函数，}z_0\in\Omega\text{是}f\text{的一个零点，且}f\neq 0,\text{则存在}z_0\text{的一个邻域}U\text{和一个不恒为}0\text{的全纯函数}g\\
&\text{和唯一整数}n\text{使得}f(z)=(z-z_0)^n g(z).
\end{aligned}
$$

此时称n为f在z_0的零点的阶数(order)或零点的multiplicity(恕我真的不明白该如何翻译,重数？).

poles的定义就是"除以零"的点,故你会想问,此定理是否对poles成立？答案是:

$$
\begin{aligned}
&Theorem.\\
&f\text{是连通开集}\Omega-\{z_0\}\text{上的全纯函数，}z_0\in\Omega\text{是}f\text{的一个极点，则存在}z_0\text{的一个去心邻域}U,\text{和一个的定义在}U\text{上的全纯函数}g\\
&\text{和唯一整数}n\text{使得}f(z)=(z-z_0)^{-n}g(z).
\end{aligned}
$$

由此定理立刻得到一种"广义的"幂级数展开.

$$
\begin{aligned}
&Corollary.\\
&f\text{是连通开集}\Omega-\{z_0\}\text{上的全纯函数，}z_0\in\Omega\text{是}f\text{的一个}n\text{阶极点，则存在}z_0\text{的一个去心邻域}U,\text{和一个的定义在}U\text{上的全纯函数}G\text{，则}\\
&f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+G(z)
\end{aligned}
$$

我们强调,复函数在极点处的这个展开非常重要.此展开式的分式和部分称为f在z_0的主部(principal part).其中a_{-1}称为f在z_0处的留数(residue),记做$res_{z_0}f=a_-1$.

为什么要叫留数？因为留数正是被"留下来"的那个数.在对f绕着z_0进行闭合曲线积分的时候,所有其他项都有原函数,所以统统是0.而留数那一项是没有原函数的,所以环绕一个pole的曲线积分,其值由f的留数唯一确定.由留数的定义我们立刻得到以下几个计算留数的方法:

1. 若z_0的阶为1,那么$res_{z_0}f=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$
2. 如果z_0的阶数为n,那么

$$res_{z_0}f=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d}{dz}(z-z_0)^n f(z)$$

Section 3.2 留数公式(the residue formula)

万众瞩目,计算重视型复变函数的顶峰,著名的留数公式！就是这么一个定理:

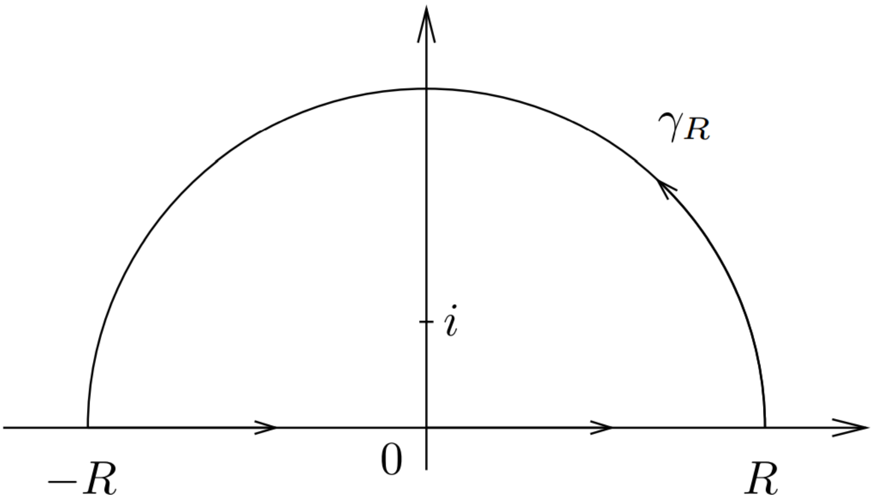
$$
\begin{aligned}
&Theorem(the\ residue\ formula).\\
&f\text{是连通开集}\Omega-\{z_0\}\text{上的全纯函数，}z_0\in\Omega\text{是}f\text{的一个极点，圆周}C\text{及其内部包含于}\Omega\text{，那么}\\
&\int_C f(z)dz=2\pi i res_{z_0}f
\end{aligned}
$$

它由上一节中的展开式以及Cauchy定理、Cauchy积分公式共同得到.自然,圆周C换成别的contour,留数公式亦成立.

定理本身没什么好说的,我们来看一下例题罢.

$$
\begin{gathered}
Example1. Prove\ that\\
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi
\end{gathered}
$$

用曲线积分计算积分.考虑如下contour:



考虑函数

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(i+z)(z-i)}$$

则f是此周线所围成区域中除了一点以外的全纯函数,唯一奇点是i,是一个pole.

根据留数定理:

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz=\frac{2\pi i}{2i}=\pi$$

在上半圆上的积分:

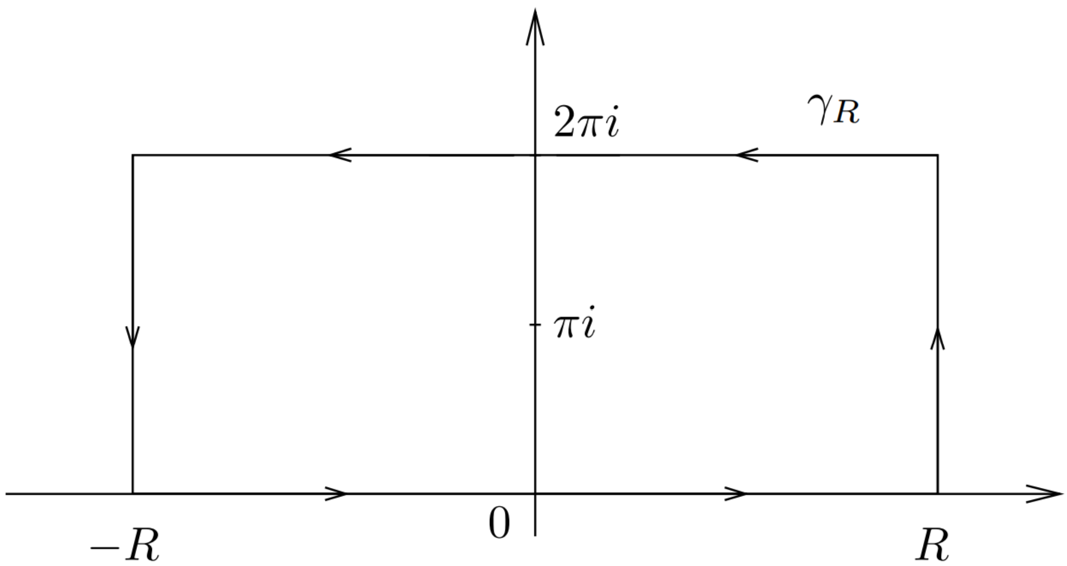
$$\left|\int_{C_R^+} f(z)dz\right|\leq \pi R\frac{B}{R^2}\leq\frac{M}{R}$$

其中已经用到如下事实:对于充分大的R,$|f(z)|\leq B/\left|z^2\right|$.现让$R\to\infty$以得出此极限为0,这就说明:

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz=0+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$$

$$\begin{aligned}&Example 2. Prove\ that\\&I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx=\frac{\pi}{\sin\pi a},\quad 0<a<1\end{aligned}$$

取$f(z)=e^{az}/1+e^z$和如下矩形contour:



f仅仅在πi处有一个pole,其余处都是全纯函数.我们先计算留数:

$$(z-\pi i)f(z)=e^{az}\frac{z-\pi i}{1+e^z}=e^{az}\frac{z-\pi i}{e^z-e^{\pi i}}$$

注意到：

$$\lim_{z\to\pi i}\frac{e^z-e^{\pi i}}{z-\pi i}=e^{\pi i}=-1$$

故$res_{\pi i}f=-e^{a\pi i}$

随后计算曲线积分,显然矩形顶部的积分结果为

$$-e^{2\pi i}I_R$$

其中I_R是矩形底部的积分.

现在看矩形右侧的积分,我们有:

$$\left|\int_{A_R}f\right|\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}}\right|dt\le Ce^{(a-1)R}$$

因a<1,$R\to\infty$得此积分为0,而左侧的情况是类似的.根据留数定理得到等式：

$$I-e^{2\pi ia}I=-2\pi ie^{a\pi i}\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{\sin\pi a}$$

关于做题,我们点到为止,有需要的同学可以自己找题来做.

Section 3.3 其他奇点

接下来我们谈谈可去奇点和本征奇点.可去奇点相比实数理论中的可去间断点要更强：根据Riemann给出的一个定理,只要全纯函数在某一奇点附近有界,那么这就是一个可去奇点.

$$Theorem(Riemann's\ Theorem\ on\ removable\ singularities).$$
$$f\text{是开集}\Omega-\{z_0\}\text{上的全纯函数，若}f\text{在}z_0\text{的邻域附近有界，则}z_0\text{是一个可去奇点.}$$

此定理由类似于Cauchy积分公式的手法证明.

此定理的推论是一个不言自明的结果:直观感觉一下你都知道这是正确的

$$Corollary(Riemann's\ Theorem\ on\ removable\ singularities).$$
$$f\text{在}z_0\text{处有一个奇点，则}z_0\text{是}f\text{的一个极点. 当且仅当}\ |f(z)|\to\infty,z\to z_0$$

取倒数后用上述定理即可证明.

回忆$\sin{(1/x)}$在0附近的表现,你会奇怪：难道对于复函数来说,不存在类似于这种在有限值以内无穷波动的奇点吗？答案是否定的：对于复函数来说,要么它就不波动,要么它就波动到整个复平面上,这就是如下的定理：

$$Theorem(Casorati-Weierstrass).$$
$$f\text{是去心圆盘}D_r(z_0)-\{z_0\}\text{上的全纯函数，且}z_0\text{是一个本征奇点. 那么此定义域在}f\text{下的像在}\mathbb{C}\text{中稠密}$$

对于$\mathbb{C}$中的任何点,f都可以在本征奇点附近给出能任意靠近此点的函数值.实际上:f(z)能无穷多次地取到任意的复数,最多有一个点例外.

Extra discussion. 亚纯函数与Riemann sphere

亚纯函数

前文已经说到,亚纯（meromprphic）函数,它指代的是全纯,但不完全全纯的函数.在本校课本中,这个概念并没有出现,但我还是打算写一写这个东西.

$$Def(\text{亚纯函数}).$$
$$f\text{是开集}\Omega\text{上的亚纯函数，加入它对这样一个在}\Omega\text{中午极限点的点列}\{z_0,\cdots,z_n\}\text{满足如下性质：}$$
$$(1)\ f\text{在}\Omega-\{z_0,\cdots,z_n\}\text{上是全纯函数.}$$
$$(2)\ \text{这些点中有}f\text{的奇点.}$$

通过扩张定义,把"无穷大"纳入复平面中,我们可以扩展亚纯函数的定义,定义出在扩充复平面上的亚纯函数(meromorphic in the extended complex plane).

$Def.$
(1) 无穷处的极点：若f对充分大的z是全纯函数，且0是$f(1/z)$的一个极点，则称f在无穷大处有极点
(2) 无穷处的本征奇点：$\cdots$
(3) 无穷处的可去奇点：$\cdots$

$Theorem.$
在整个扩充复平面上都是亚纯的函数是有理函数.

因此,有理函数仅仅由它所有的零点和极点以及其重数决定.

黎曼曲面

扩展复平面有一个非常方便的几何表示法：Riemann曲面.

在R^3中定义一个以(0,0,1/2)为球心,半径为1/2的球,此球称之为Riemann sphere S,球的北极$N=(0,0,1)$

现在,任给球上的点$W=(X,Y,Z)$,连接NW交xoy平面于点w,w用复数表示为$w=x+iy$,称为W的极球面投影(stereographic projection).w的坐标由如下公式给出:

$$x=\frac{X}{1-Z} \quad y=\frac{Y}{1-Z}$$

其逆投影由如下公式给出:

$$X=\frac{x}{x^2+y^2+1} \quad Y=\frac{y}{x^2+y^2+1} \quad Z=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$$

这就构造了复平面与Riemann曲面的一个一一对应,其中N(0,0,1)对应的是C的无穷远点.经此变换,无界集C变换到了R^3中的有界闭集S,也即是说,紧集S.故Riemann曲面也被称为$\mathbb{C}$的单点紧致化(one-point compactification).不仅如此,经此变换后亚纯函数可看做S到S的双射.我的评价是：非常顶级.

Section 3.4 复对数

我们终于可以开始讨论复对数函数了.朴素而言,任何复数z有指数表示法$z=rexp(i\theta)$,所以我们希望对数函数的形式为:

$$\log z=\log|z|+i\theta.$$

但θ,即z的幅角(argument),并不是唯一的,所以这不是真正意义上的函数.尽管幅角的多值性导致对数函数是"多值函数"(我打括号,是因为这个东西并不是函数,它充其量是一种映射),但对数函数的导数却永远是一个满足垂线检验的真正的函数！为此我们做如下讨论,考虑log对应的实函数:

$$g(x,y)=\log f^{-1}(x,y)=(\log\rho,\theta)=(u,v)$$

式中$f:(\rho,\theta)\to(x,y)$指代极坐标变换,取其任意一个满足f是单射且其雅可比行列式非零的定义域以定义逆映射.此时对于f应有:

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=-\rho\sin\theta \quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=\rho\cos\theta$$
$$\frac{\partial x}{\partial\rho}=\cos\theta \quad \frac{\partial y}{\partial\rho}=\sin\theta$$

在如上定义域内,f成立反函数定理,因此我们写f^{-1}是可行的,实际上你甚至可以写出逆映射从

$$\rho=x^2+y^2 \quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

而进行如下的求导计算:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{\cos\theta}{\rho}=\frac{x}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

同理可验证

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

这就说明g满足Cauchy-Riemann方程,加上其实可微性是显而易见的,故g对应的复函数是全纯函数.由于在不同定义域上g形式是一致的,其导数的形式自然也是一致的.所以log的导数是可以定义在整个复平面上的,真正的函数.我们接下来求出$f(z) = \log z$的导数:

$$\begin{aligned} f'(z) = 2\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

读者可以继续验证出：$\log f(z)$的导数必然是如下形式:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

Goursat定理的推论说,全纯函数在圆盘上有原函数.现有某圆盘Ω,γ是Ω中某一曲线,积分:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Newton-Leibnitz公式说明,此积分等于原函数在γ两端函数值之差,若γ是使$|f(z)|$不变的一条曲线,那么此积分代表f幅角的的变化.特别地,若γ是闭合曲线,那么幅角的变化完全由f在γ内部的零点和奇点决定,这就是幅角原理,我们将用如下事实证明.

首先,对于复对数函数来说,加法公式并不总是正确,但加法公式的导数总是正确,也即:

$$\frac{(f_1 f_2)'}{f_1 f_2} = \frac{f_1' f_2 + f_1 f_2'}{f_1 f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}$$

此公式推广为:

$$\frac{(\prod f_k)'}{\prod f_k} = \sum \frac{f_k'}{f_k}$$

因此,只要f有一个n阶零点,将零点分离后运用上述公式:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

对于n阶极点,情况类似:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

啊,这对于实数来说当然是显然的结论.接下来,运用留数公式即可证出如下不平凡的定理:

$$\begin{aligned} &Theorem(Argument\ principle). \\ &f\text{是包含一个圆}C\text{及其内部上的开集上亚纯函数，且}f\text{在}C\text{上无奇点且不消失, 那么} \\ &\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (f\text{在}C\text{内的零点数}) - (f\text{在}C\text{内的极点数}) \end{aligned}$$

所谓不消失,即nonvanishing,就是非零的意思.

利用幅角原理,我们可以证明三个层层递进的非常强大的定理.首先是Rouche’s theorem,然后是开映射(open mapping)定理,最后是著名的,但课本上没有的——最大模原理(Maximum modulus principle).

$$\begin{aligned} &Theorem(Rouche' stheorem). \\ &f\text{和}g\text{是包含一个圆}C\text{及其内部上的开集上全纯函数，若}|f(z)| > |g(z)|, \forall z \in C,\text{则} \\ &f\text{和}f+g\text{在}C\text{以内的零点数量相同}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Theorem(Open\ mapping\ theorem). \\ &f\text{是开区域}\Omega\text{上非常数的全纯函数，那么}f\text{把开集映射到开集，也即}f\text{是开映射}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Theorem(Maximum\ modulus\ pinciple). \\ &f\text{是开区域}\Omega\text{上非常数的全纯函数，则}|f|\text{在}\Omega\text{中不能取到最大值. 并且若}\overline{\Omega}\text{是}\Omega\text{的紧闭包}, f\text{在}\overline{\Omega}\text{上连续, 那么} \\ &\sup_{z\in\Omega}|f(z)| \leq \sup_{z\in\overline{\Omega}-\Omega}|f(z)| \end{aligned}$$

这就是说,f的最大值只能在边界上取到,并且由于f是闭集$\overline{\Omega}$上的连续函数,f的确能取到最大值.

现在我们把视野回到对数函数上来.前文已经提到,我们需要选择一个合适的集合,让这个集合中的每一个复数只对应一个对数.那这个"合适的"集合,到底应该长什么样子呢？请看如下定理:

$Theorem.$

Ω是一个单连通集合，且$1 \in \Omega, 0 \notin \Omega$，那么在$\Omega$中存在函数$F$满足如下性质：

(1) F是Ω上全纯函数.

(2) $e^{F(z)} = z, z \in \Omega$

(3) $F(r) = \log r, r$是一个靠近1的实数.

我们称$F(z) = \log_{\Omega}(z)$是Ω上的一枝$(branch)$对数函数

单连通集的意思就是,两条连接集合中两点a,b的任意曲线γ_1, γ_2,γ_1可以经过连续光滑的变化变成γ_2.