《复变函数与积分变换》讲义合集（第 2–5 章）

Hye

写在前面：

本文档原来是我为给同届补考同学讲课时所写的讲义，其中涵盖教材的第二至五章。现整理发出，希望对正在学习《复变函数与积分变换》的同学有所帮助。

本文档大量摘录教材《复变函数与积分变换》的内容，一方面是因为本身只是作为教材的补充，一方面是为了减少工作量（笑）。同时参考了《复变函数》（史济怀、刘太顺著）与《简明复分析》（龚昇著）。这两本书，在我学习复变函数的过程中也起到了很大的帮助，感谢各位作者。推荐学有余力的同学阅读。

以下四份讲义，本来是独自成文，所以页码是相互独立的。

2023 年 9 月 12 日

真好，据这学期上这门课的一些同学说，这份讲义帮到了他们。

做了一些小修小改。

2023 年 12 月 10 日

第2章 解析函数

Hye

Course: **Complex Functions and Integral Tranformation**

Beginning date: January 11, 2023

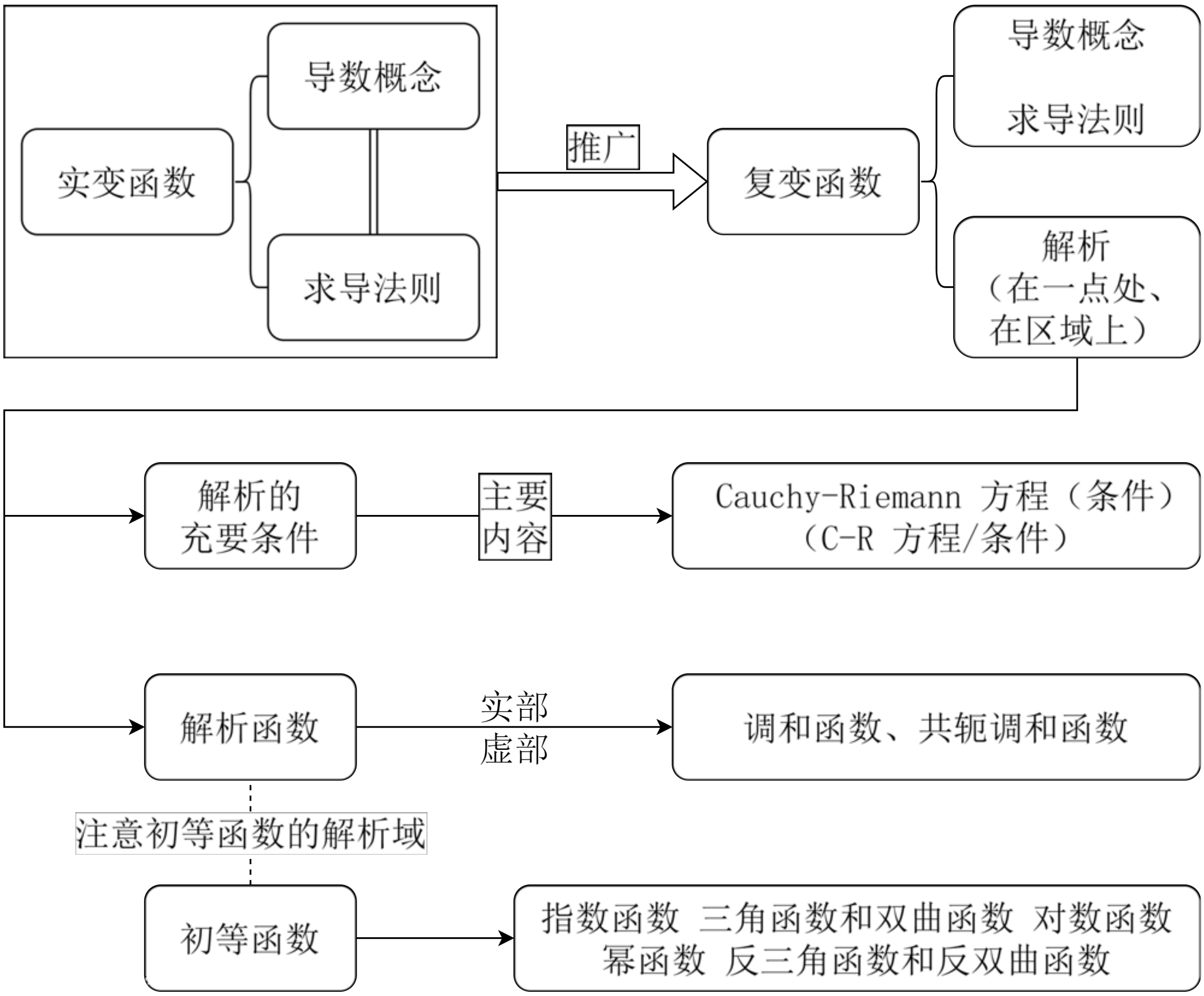
Completion date: January 14, 2023

Revision date: January 15, 2023

关键词

解析函数、Cauchy-Riemann 方程、调和函数、欧拉公式、初等函数

本章概念总览



概念总览讲解

上面的思维导图是这一章概念的示意简图。首先，复变函数中解析函数的概念是由实变函数中的可微函数（一元函数中可导函数即可微函数）的概念推广而来的。复变函数的导数概念和求导法则在形式上和实变函数的一模一样。函数解析分为两种，分别是在一点处解析和在区域上解析，归根结底是在区域上可导——在一点处解析即在该点邻域上可导。介绍了解析的概念后，需要探讨解析的充要条件，于是引出了重要的 Cauchy-Riemann 方程，简称 C-R 方程。这是本章 **最重要也是最常用的知识点**。通过基于 C-R 方程的简单推导，我们可以得到解析函数与调和函数的关系——前者的实部和虚部都是调和函数。由此也得到了共轭调和函数的定义。最后介绍了初等函数。其中要注意两点——①初等函数的解析域，即初等函数与解析函数的关系；②初等函数的定义逻辑，即实变初等函数是如何推广为复变初等函数的。把握这两点，有助于理解（复变）初等函数的一些特点。

1 解析函数的概念

2.1.1 复变函数的导数

定义 2.1.1 设 $w=f(z)$ 为定义在区域 D 内的单值函数, $z_0\in D$, 且 $w_0=f(z_0)$, 并记 $\Delta z=z-z_0, \Delta w=f(z)-f(z_0)$. 如果极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在点 z_0 处**可导**(或称**可微**), 并称此极限值为 $f(z)$ 在点 z_0 处的**导数**, 记作 $\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}|_{z=z_0}$, $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}|_{z=z_0}$ 或 $f'(z_0)$.

如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点上均可导, 则称 $f(z)$ 在区域 D 内可导. 这时, D 内每一点都对应于 $f(z)$ 的一个导数值, 因而在 D 内定义了一个函数, 称为 $f(z)$ 在 D 内的导函数, 简称 $f(z)$ 的导数, 记作 $\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$ 或 $f'(z)$. 于是 $f(z)$ 在点 z_0 处的导数可看作是导函数 $f'(z)$ 在点 z_0 处的值.

这里要注意趋限方式的任意性，$\Delta z\to 0$ 可以是沿任意路径的，可以沿 x 轴方向逼近，也可以沿 y 轴方向，还可以是其他任何方向。这一点，在前面讲连续这一概念的时候也有强调。这样的要求是很“苛刻”的，因为它实际上要求分别沿 x 轴方向和 y 轴方向这两个正交的、本应“不相关”的方向得到同一个极限。这也就暗示了 C-R 条件的存在，因为仅仅要求实部和虚部两个二元函数的偏导数存在甚至连续，都无法保证复变函数的导数存在。

复变函数的导数和实变函数的导数，在形式上可以说是一模一样的：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, x_0\in I \xrightarrow{\text{推广}} \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, z_0\in D.$$

两者的求导法则在形式上也是一样的。例如：
常数的导数为零：

$$C'=0$$

和（差）的导数等于导数的和（差）：

$$[f(z)\pm g(z)]'|_{z=z_0}=f'(z_0)\pm g'(z_0)$$

……（算了，直接贴课本吧）
完整内容见课本：

(1)(常数的导数)$C' = 0$;

(2)(和与差的导数) 若单值函数 $f(z), g(z)$ 在 z_0 点可导, 则单值函数 $f(z) \pm g(z)$ 也在 z_0 点可导, 且有

$$[f(z) \pm g(z)]'|_{z=z_0} = f'(z_0) \pm g'(z_0)$$

(3)(积的导数) 若单值函数 $f(z), g(z)$ 在点 z_0 处可导, 则单值函数 $f(z) \cdot g(z)$ 在点 z_0 处也可导, 且有

$$[f(z)g(z)]'|_{z=z_0} = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

(4)(商的导数) 若单值函数 $f(z), g(z)$ 在点 z_0 处都可导, 而且 $g(z_0) \neq 0$, 则单值函数 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 在点 z_0 处也可导, 且有

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'\Bigg|_{z=z_0} = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

(5)(复合函数的导数) 设单值函数 $\zeta = g(z)$ 在点 z_0 处可导, 单值函数 $w = f(\zeta)$ 在点 $\zeta_0 = g(z_0)$ 处可导, 则单值函数 $w = f[g(z)]$ 在点 z_0 处也可导, 且有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f[g(z)]\,|_{z=z_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta} f(\zeta)\,|_{\zeta=\zeta_0} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g(z)\,|_{z=z_0}$$

(6)(反函数的导数) 设函数 $w = f(z)$ 将区域 D 双方单值连续映射成区域 D^*, 又 $w_0 = f(z_0), z_0 \in D$, 那么若函数 $f(z)$ 在点 z_0 处可导且 $f'(z_0) \neq 0$, 则区域 D^* 上的单值连续反函数 $z = f^{-1}(w)$ 在 w_0 点也可导, 且有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} f^{-1}(w)\bigg|_{w=w_0} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

定义了导数之后，课本给出了函数解析的概念：

定义 2.1.2 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 点及 z_0 点的某个邻域内处处可导, 那么称 $f(z)$ 在 z_0 点**解析**. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点解析, 那么称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个**解析函数**, 并把 D 称为 $f(z)$ 的**解析区域**.

单就这个定义而言，重点要记住，在一点处可导和在一点处解析并不等价，在一点处解析还要求在其某个邻域上处处可导。

另外，此处应该给出“奇点”的定义，不然后面突然提出“孤立奇点”其实是很奇怪的。教材的第3版上有，简明教程上似乎没有（也可能我记错了）。还有一个几乎“不证自明”、实际上大家拿来就用的定理，也一并贴在下面。

定义 2.1.3 如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 处不解析, 但在点 z_0 的每一邻域内, 总有若干个点使 $f(z)$ 解析, 则 z_0 称为 $f(z)$ 的奇点.

例如, 函数

$$f(z)=\frac{1}{z}$$

当 $z\neq 0$ 时, 有 $f'(z)=-\frac{1}{z^2}$. 从而 $f(z)$ 在复平面上除去 $z=0$ 点外处处可导, 因此处处解析. 但在点 $z=0$ 处, $f(z)$ 没有意义, 导数当然也不存在, 所以 $f(z)$ 在点 $z=0$ 处不解析. 然而在点 $z=0$ 的每一邻域内, 除去点 $z=0$ 外, 每点都是 $f(z)$ 的解析点, 所以 $z=0$ 是 $f(z)=\frac{1}{z}$ 的奇点.

根据导数运算法则, 不难证明下面的定理.

定理 2.1.1 (1) 在区域 D 内解析的两个单值函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商 (除去分母为零的点) 在区域 D 内仍解析;

(2) 设单值函数 $\zeta=g(z)$ 在区域 D 内解析, 单值函数 $w=f(\zeta)$ 在区域 D' 内解析, 且 $D\subset D'$, 则单值函数 $w=f[g(z)]$ 在区域 D 内也解析.

从定理 2.1.1 可以推知, 所有多项式在复平面内是处处解析的, 任何一个有理分式函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$在分母不为零的点构成的平面区域内是解析函数, 使分母为零的点是它的奇点.

解析函数是复变函数理论中重要概念之一, 因为本书所要讨论的就是在某个区域内为解析的函数.

2 函数解析的充要条件

先摆结论。

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 D 上的复变函数，则函数 $f(z)$ 在 D 内一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可导的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在此点 (x,y) 可微，而且满足 C-R 方程。其中，C-R 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

在区域上相应地有：函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在其定义的区域 D 内解析的充要条件是：$u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内任一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 可微，而且满足 C-R 方程。

证明过程详见教材。

然后这一节就可以结束了（

不过最后还是会提一下 C-R 方程的不同形式，便于深入理解和熟练应用。

3 解析函数与调和函数

已知解析函数有任意阶导数（虽然这是第3章的内容，但我们确实“已知”），那么就有如下推导：

在 C-R 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

中两端分别对 x 与 y 求偏导数, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

由于 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 从而其实部 u 与虚部 v 具有二阶连续偏导数, 所以

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

于是有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

这就是我们所知道的**拉普拉斯 (Laplace) 方程**. 同理有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{2.3.1}$$

定义 2.3.1 凡在区域 D 内具有连续二阶偏导数而且满足拉普拉斯方程的二元实函数 $u(x,y)$, 称为区域 D 内的**调和函数**.

由此我们证明了下面的定理.

定理 2.3.1 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析, 则 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 都是区域 D 内的调和函数.

由定理 2.3.1, 一个解析函数的实部和虚部都是调和函数. 但是如果 u, v 是在区域 D 内的任意选取的两个调和函数, 则 $u+\mathrm{i}v$ 在 D 内就不一定解析. 要想 $u+\mathrm{i}v$ 在区域 D 内解析, u 及 v 还必须满足 C-R 条件.

定义 2.3.2 在区域 D 内满足 C-R 方程的两个调和函数 u, v 中, v 称为 u 的**共轭调和函数**.

前面我们往往是通过解析函数（复变函数）$f(z)$ 的实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 来研究解析函数（复变函数）的性质。此处则反过来，由 $f(z)$ 引出 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的特征（调和函数）和关系（共轭调和函数）。这一节的例题基本上都是根据 u 和 v 的表达式或它们之间的

关系式来求解 $f(z)$。基本思路是借助 C-R 方程列式，基本方法是不定积分。

4 初等函数

教材上介绍了下列初等函数：指数函数；三角函数和双曲函数；对数函数；幂函数；反三角函数和反双曲函数。首先，这些初等函数都是由实变初等函数推广得到的，两者的最直观区别在于 **自变量** 不同，是实数还是复数。但是推广并不是随意进行的，需要遵循一定的原则，其中之一就是要显得“自然”。~~所以先定义有**自然**常数 e 的指数函数。（误）~~

在我们刚给出复数和复变函数的定义之后，只有四则运算是自然而然可以进行的——也就是说，我们将四则运算的对象由实数 **推广** 为复数很“自然”。而多项式函数就是这样一种（一定意义上）只依赖加、减、乘和幂运算（非负整数次方）的函数。从而可以通过与多项式函数密切相关的 **幂级数** 进行“自然”推广。（这一思路贴在文末的附录，有兴趣的可以看看，加深理解。）但是我们的教材并没有采用这个做法，而是直接从 **欧拉公式** 出发，推广了指数函数，进而定义了其他初等函数。（其实是一致的，欧拉公式本身也可以借助级数推导。）

4.1 指数函数

不难发现，其他初等函数的定义基本上都是在指数函数的基础上给出的：三角函数和双曲函数是指数函数四则运算的结果，对数函数是指数函数的反函数，幂函数是指数函数和对数函数的复合，反三角函数和反双曲函数，顾名思义，不必多说。

指数函数的定义式：

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

在这一定义下，指数函数保留了原有的若干重要性质，主要有以下两条：

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\cdot \mathrm{e}^{z_2}, \quad \text{（在复平面内处处解析）}(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z.$$

具有了一个在实数域上没有的 **新性质——周期性**：以 $2\pi i$ 为周期。这一点可以从两方面进行理解。

一是通过纯粹的运算：

$$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1 \to \mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z\cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z.$$

二是通过映射关系：由定义式，$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$，可得 z 和 $f(z) = \mathrm{e}^z$ 之间如下关系：

$$x \mapsto r = \mathrm{e}^x, \quad y \mapsto \theta = y.$$

也就是说，z 的实部 x 映射为 $f(z)$ 的模长 $r = \mathrm{e}^x$，虚部 y 映射为 $f(z)$ 的辐角 θ。由于辐角本身的周期性，虚部自然呈现出周期性。

4.2 三角函数和双曲函数

由欧拉公式有

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x \end{cases} \to \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \\ \sin x = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \end{cases}, x \in \mathbb{R}$$

因为我们已经定义了复指数函数，所以可以将 $x \in \mathbb{R}$ 换成 $z \in \mathbb{C}$，得到正弦函数和余弦函数的定义：

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

同样地，这样的定义也保持了它们原有的许多性质，如：

$$\text{周期性：} \cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z,$$

$$\text{以及各种恒等式，如 } \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

这里要记住的是，可以证明对于实变数三角函数成立的一切恒等式，在复变数的情形自然成立。根本原因是我们所做的推广为 **解析延拓**，具体内容这里不加以展开，只需要记得解析函数能这样干就行了。但要注意，必须得是 **恒等式**，而不能是不等式，如 $|\cos z| \leq 1$ 和 $|\sin z| \leq 1$ 就不再成立。

至于零点的情况，和实变数的情形下一致。

其余复变三角函数可相应给出定义：

$$\text{正切：} \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{余切：} \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\text{正割：} \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \text{余割：} \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

这 4 个函数都在 z–平面上分母不为零的点处解析, 且

$$(\tan z)' = \sec^2 z, \qquad (\cot z)' = -\csc^2 z$$
$$(\sec z)' = \sec z \tan z, \qquad (\csc z)' = -\csc z \cot z$$

例如, 就函数 $\tan z$ 来说, 它在 $z \neq \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的各点处解析. 因为

$$\tan(z + \pi) = \frac{\sin(z + \pi)}{\cos(z + \pi)} = \frac{-\sin z}{-\cos z} = \frac{\sin z}{\cos z} = \tan z$$

可知正切函数的周期为 π. 余切、正割及余割函数的解析性与周期性可类似讨论.

此外, 定义

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\qquad \operatorname{cth} z=\frac{1}{\operatorname{th} z}$$

$$\operatorname{sech} z=\frac{1}{\operatorname{ch} z},\qquad \operatorname{csch} z=\frac{1}{\operatorname{sh} z}$$

并分别称为 z 的**双曲正弦**、**双曲余弦**、**双曲正切**、**双曲余切**、**双曲正割**及**双曲余割函数**.

显然, 它们都是解析函数, 各有其解析区域, 且都是相应的实双曲函数在复数范围内的推广.

由于 e^z 及 e^{-z} 皆以 $2\pi i$ 为基本周期, 故双曲正弦及双曲余弦函数也以 $2\pi i$ 为基本周期. $\operatorname{ch} z$ 为偶函数, $sh\ z$ 为奇函数, 而且它们都是复平面内的解析函数, 导数分别为

$$(\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z,\quad (\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z$$

根据定义, 不难证明

$$\operatorname{ch} iy=\cos y,\quad \operatorname{sh} iy=i\sin y$$

及

$$\begin{cases}\operatorname{ch}(x+iy)=\operatorname{ch} x\cos y+i\operatorname{sh} x\sin y\\ \operatorname{sh}(x+iy)=\operatorname{sh} x\cos y+i\operatorname{ch} x\sin y\end{cases}$$

除了最后那个三角函数和双曲函数的关系式，其他都毫无新意。所以特别抄在下面，加深印象：

$$\operatorname{ch} iy=\cos y,\quad \operatorname{sh} iy=i\sin y.$$

4.3 对数函数

前面我们定义指数函数时，提到它的一组映射关系——实部映射到模长，虚部映射到辐角。对数函数作为指数函数的反函数，自然有相反的映射：

$$w=u+iv=\operatorname{Ln} z:\quad r\mapsto u=\ln r=\ln|z|,\ \theta\mapsto v=\theta.$$

因此

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z.$$

考虑 $\operatorname{Arg} z$ 的主值 $\arg z$，就得到单值函数

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z.$$

根据辐角和主辐角的关系：其他值表示为：

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi\mathrm{i}\ (k = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

任一固定的 k 对应一个单值函数，是为 $\operatorname{Ln} z$ 一个 **分支**。

特别地，当自变量 z 为正实数 $x > 0$ 时，$\ln z = \ln x$。而此时负实数也有了对数，显然，它们的对数不是实数。

性质如下：

(1) 运算法则

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$$

$$\operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$$

上述两式在"集合相等"的意义下成立;

(2)$\operatorname{Ln} z$ 的主值 $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$ 在复平面上除去 $z = 0$ 和负实轴的单连通区域

$$\begin{cases} |z| > 0 \\ -\pi < \arg z < \pi \end{cases} \tag{2.4.5}$$

内解析, 且

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$

事实上, 在式 (2.4.5) 中所表示的区域内, 任给一点 z, 由于 $w = \ln z$ 的反函数 $z = \mathrm{e}^w$ 是单值的, 且有 $(\mathrm{e}^w)' = \mathrm{e}^w$, 则由反函数求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{(\mathrm{e}^w)'} = \frac{1}{\mathrm{e}^w} = \frac{1}{z}$$

由于 z 的任意性, 所以 $\ln z$ 在式 (2.4.4) 所给出的区域内解析.

4.4 幂函数

不同于实数域的情形，幂函数在复数域上是靠指数函数定义的：

$$z \neq 0, a \in \mathbb{C}, w = z^a = \mathrm{e}^{a \operatorname{Ln} z} = \mathrm{e}^{a\ln z + \mathrm{i}2ak\pi} = \mathrm{e}^{a\ln z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2ak\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

并且规定：当 $a > 0 (\in \mathbb{R}), z = 0$ 时，$z^a = 0$。

由于 $\operatorname{Ln} z$ 的多值性，幂函数也在一定条件下表现出多值性，取决于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2ak\pi}$ 这一项。

a 为整数 n 的情况很简单，得到的是单值函数：

$$n > 0, \quad w = z^n = \mathrm{e}^{n\ln z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2nk\pi} = \mathrm{e}^{n\ln z}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi})^n = \mathrm{e}^{n\ln z} \cdot 1 = \mathrm{e}^{n\ln z},$$

$n = 0$ 和 $n < 0$ 的情况，不作赘述。

a 为有理数时，可以表示为互质整数之比，从而出现多值性。

(2)a 为有理数 p/q (p 与 q 为互质的整数, $q>0$).

$$z^{\frac{p}{q}}=\mathrm{e}^{\frac{p}{q}\mathrm{Ln}\,z}=\mathrm{e}^{\frac{p}{q}\ln z+\frac{p}{q}\mathrm{i}2k\pi}\quad(k\text{为整数})$$

由于 p 与 q 互质, 当 k 取 $0,1,\cdots,q-1$ 时, 有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi\frac{p}{q}}=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2kp\pi})^{\frac{1}{q}}$$

是 q 个不同的值. 但若 k 再取其他整数值时, 将重复出现上述 q 个值之一, 所以

$$w=z^{\frac{p}{q}}$$

是 q 值函数, 因而有 q 个不同的分支.

a 为其他值时，函数 $w=z^a$ 为无穷多值函数。

幂函数的解析性：

由于对数函数 $\mathrm{Ln}\,z$ 的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是解析的, 因而不难看出幂函数 z^a, 它的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内也是解析的, 可以由复合函数的求导法则得到

$$(z^a)'=(\mathrm{e}^{a\ln z})'=\mathrm{e}^{a\ln z}\cdot(a\ln z)'=a\frac{\mathrm{e}^{a\ln z}}{z}=az^{a-1}$$

注：当 a 为整数 n 时, z^n 在复平面上处处解析.

4.5 反三角函数和反双曲函数

这一部分没有什么内容，主要是要求认识到这些函数都可以“非常简单地用对数函数表示”并能够进行推导。书上以反余弦函数为例进行了推导，可以自选另外五个函数之一推导一下，感受感受。其中要注意，“开根”是多值函数，具体来说，就是复变函数当中的平方根号已经相当于原来的“正负根号”了：

$$\pm\sqrt{x}\xrightarrow{\text{替换为}}\sqrt{z}.$$

4.6 小结

欧拉公式在初等函数的定义过程中又一次起到了重要作用，可见其威力。

指数函数是初等函数“一生万物”的那个“一”，甚至可以说“基本初等函数就只有指数函数及其反函数这一类”。

对数函数及由它引出的各函数的多值性是本节比较有趣的点。（根式函数也有多值性，因为它也可以看作是指数为分数的幂函数。）

重点提示

就本章而言，重点应该是 C-R 方程，毕竟本章标题是“解析函数”。欧拉公式其实也很重要，不过集中在“初等函数”这一节中，而且主要是贯穿在行文思路中，是理解的重点，而不作为考察的重点。

既然是重点，那主要就得靠一定的练习来掌握。就练习而言，书上例题和作业题其实足够了。

C-R 方程

1. C-R 方程的应用：
   判断函数在某点处和某区域内是否解析，在什么条件下解析——核心步骤：求偏导；
   “补全”解析函数，即已知 $f(z)$ 为解析函数，解出 u, v 或者其中的未知参量——核心步骤：列偏导数的等式，积分。

2. C-R 方程的理解：
   直角坐标形式。
   极坐标形式。相应的变量代换：
   $$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta;$$
   特殊形式（将 $z, \bar{z}$“形式地”看作互相无关的自变量，可得到一种特殊形式）。相应的变量代换：
   $$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z}).$$
   （有兴趣可以自己推一下后两条，最后一条可以得到很漂亮的结果。）

附录

（节选自《复变函数》，史济怀、刘太顺著）

设 $z = x + \mathrm{i}y$，如何定义复变数的指数函数 e^z 呢？考虑的原则有两条：第一，因为实变数的指数函数 e^x 在实轴上每点都有导数，所以我们要求 e^z 在平面 $\mathbb{C}$ 上每点都可导，即 e^z 是 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数（注，即我们所学的解析函数）。第二，当 $z = x$ 时，它和实变数的指数函数相一致。

下面的讨论对我们会有些启发。在微积分中我们已经知道，对任意实数 t，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^t &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \\
\cos t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \\
\sin t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

用 $t = \mathrm{i}y$ 代入 e^t 的展开式中，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}y)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}y)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}y)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos y + \mathrm{i} \sin y.
\end{aligned}$$

这个等式通常称为 **Euler 公式**，它启发我们给出 e^z 的下列定义：设$z = x + \mathrm{i}y$，定义

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x (\cos y + \mathrm{i} \sin y).$$

第3章 复变函数的积分

Hye

Course: **Complex Functions and Integral Tranformation**

Beginning date: January 17, 2023

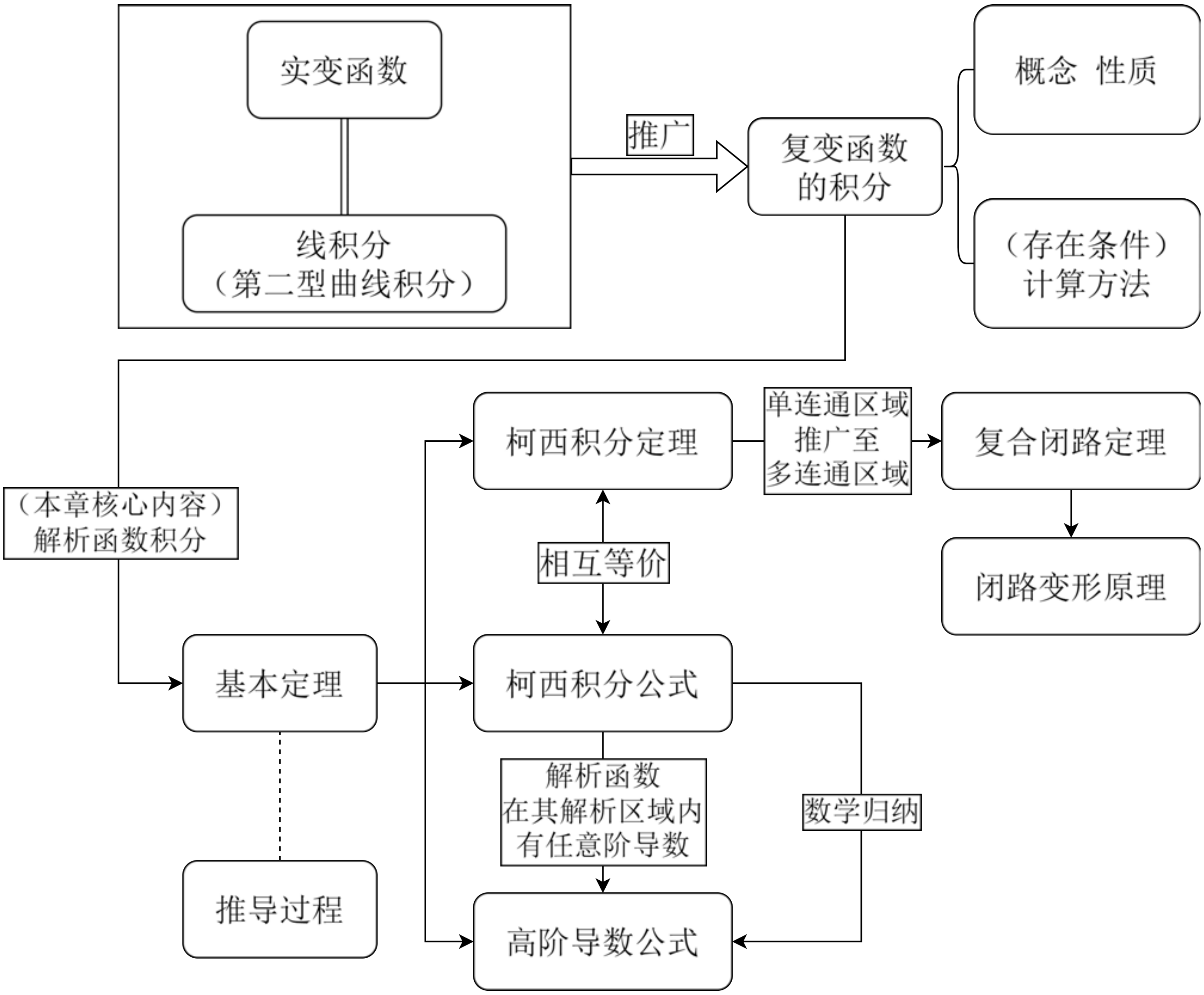
Completion date: January 20, 2023

Revision date: January 31, 2023

关键词

复变函数积分、柯西积分定理、复合闭路定理、柯西积分公式、高阶导数公式

本章概念总览



概念总览讲解

本章首先提出了复变函数积分的概念。这是由实变函数的线积分推广而来的，尤其与第二型曲线积分密切相关。然后介绍了复变函数积分的性质、存在条件和计算方法。从而引出解析函数的积分问题。其中最重要的定理即柯西积分定理，这也是“复变函数论的重要基石之一”。柯西积分定理可以由单连通区域推广至多连通区域，得到复合闭路定理，从而得到一个重要结论——闭路变形原理。柯西积分定理与随后引出的柯西积分公式其实是相互等价的，而后者更有助于计算。利用柯西积分公式，我们还可以推得一个重要的结论：解析函数在其解析区域内有任意阶导数（这条结论我们在前一章提到过）。通过数学归纳，可得到高阶导数公式。

1 复变函数积分的概念

1.1 积分的定义与性质

设 C 是以 z_0 为始点、Z 为终点的曲线，复变函数 $f(z)$ 在 C 上有定义，在 C 上沿着由 z_0 到 Z 的方向依次取分点 $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n = Z$，将 C 分为 n 小弧段，如下图所示。对应于每段作乘积 $f(\zeta_k)\Delta z_k, k = 1, 2, \cdots, n$，其中

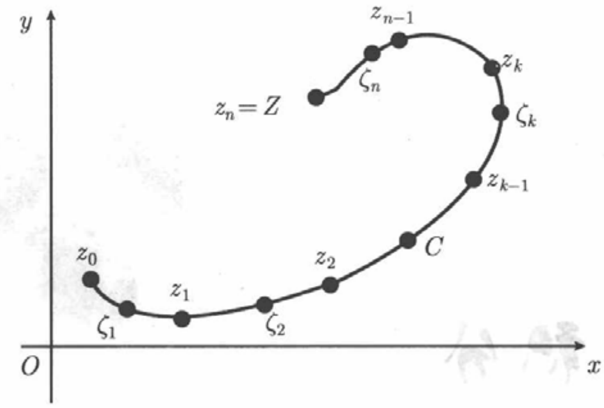


图 3.1.1

ζ_k 是以 z_{k-1} 及 z_k 为端点的那小弧段上的任意一点, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. 再作出和式

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{3.1.1}$$

令 δ 为所有小弧段的弧长的最大值. 当 $\delta \to 0$ 时, 如果不论对曲线 C 的分法及 ζ_k 的取法如何, 和式 S_n 都有唯一极限, 那么称函数 $f(z)$ 在曲线 C 上可积, 称此极限值为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分, 记作

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \lim_{n\to\infty} S_n \tag{3.1.2}$$

如果 C 为闭曲线, 且为逆时针方向, 那么沿此闭曲线的积分可记作 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$.

复积分的定义看书就好，与以往的积分定义并无什么大差别。

然后是几条性质，分别是（1）有向性、（2）路径可加性和（3、4）线性性以及（5）（在后面各种证明题当中）常用的估值不等式。

(1) $$\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{3.1.3}$$

其中 C^- 表示与 C 方向相反的曲线.

(2) $$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1\cup C_2} f(z)\mathrm{d}z \tag{3.1.4}$$

其中 C_1 的终点与 C_2 的始点重合.

(3) $$\int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z = \int_C [f(z)\pm g(z)]\mathrm{d}z \tag{3.1.5}$$

(4) $$\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z,\ k\in\mathbb{C} \tag{3.1.6}$$

(5) 设曲线 C 的长度为 L, $f(z)$ 在 C 上可积, 且 $|f(z)|\leqslant M$, 则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \leqslant ML \tag{3.1.7}$$

证明 (1)~(4) 显然成立, 至于 (5) 只须将不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\,\Delta s_k \leqslant ML$$

取极限便得, 其中 Δs_k 表示 z_k 与 z_{k-1} 之间的弧长.

用自然语言描述就是，积分的模不大于模的积分。这里要注意不等式当中的 $\mathrm{d}z$ 和 $\mathrm{d}s$，不能混淆。其中的

$$\int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s$$

是 $f(z)$ 的模长在曲线 C 上**对弧长的曲线积分**（第一型曲线积分），模长恒非负，自然确保了结果恒非负。但如果把 $\mathrm{d}s$ 写成 $\mathrm{d}z$，含义则发生变化，而且不等式就未必成立了。示例见附录。

1.2 积分的存在条件与计算

存在条件

连续 $\to$ 可积：复变函数可积的一个充分条件是，若**函数 $f(z)$ 在光滑（或按段光滑）曲线 C 上连续**，则 $f(z)$ 在 C 上可积。

计算方法

复变函数的积分可以化为两个二元函数的线积分：

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y.$$

可以用以下形式

$$f(z)\,\mathrm{d}z = (u+iv)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}(v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$$

来记忆。

然后就可以应用我们在微积分里学过的第二型曲线积分计算方法：

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中光滑曲线 C 由参数方程 $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)(a \le t \le b)$ 表示。顺便提一下，这里的参数很多时候就是 θ，特别是牵涉到圆、三角函数时。

至此我们已经可以计算各种积分了，只要按部就班操作即可，算不算得出来另说（）

这里书上给出了一个**重要的积分式**：

例 3.1.4 求积分 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$, 其中, $n \in \mathbb{N}$, C 是以点 z_0 为圆心 R 为半径的圆周, 圆周 C 取逆时针方向.

解 C 的参数方程可以写作

$$z = z_0 + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

这时

$$z'(\theta) = \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} &= \frac{\mathrm{i}}{R^{n-1}}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\mathrm{i}}{R^{n-1}}\int_0^{2\pi} [\cos(n-1)\theta - \mathrm{i}\sin(n-1)\theta]\mathrm{d}\theta \\
&= \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

我们可以看到这个积分值与 R 和 z_0 无关. 此例以后要用到.

其中只有 $n = 1$ 对应的积分值非零，个人认为这就是“留数”（后面要学到的一个重要概念）的含义——只有 $n = 1$ 的情况“留”了下来。

1.3 小结

本节介绍了一般（连续）复变函数的积分。

2 柯西积分定理

本节开始，我们进入核心内容——解析函数的积分。

2.1 柯西积分定理

如果函数 $f(z)$ 在简单光滑（或逐段光滑）闭曲线（又称**闭路**） C 上及其内部 D 内解析，则

$$\oint_C f(z) = 0.$$

书上给出 $f'(z)$ 连续条件——这里做了一定的简化——下的证明，其中应用了格林公式。在后续的内容当中，我们也能时不时看到格林公式的“影子”。

必须注意，$f(z)$ 必须在**闭路和内部**处处解析，不能有一个奇点。另外，如果不满足这一条件的闭路积分，求出来也是零，那也不必惊讶，因为“处处解析”只是充分条件。（例见附录）

2.2 不定积分

我们在微积分当中学习“格林公式”时，已经知道了“闭路积分为零”与“积分与路径无关”的等价关系。同样的，我们利用柯西积分定理，也可以证明**单连通区域上的解析函数的积分完全取决于起点和终点而与路径无关**。因此，固定起点 z_0，而在区域 D 内变动终点 z，沿 D 内任一（逐段光滑）路径，可以定义如下单值函数：

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

然后可以证明 $F(z)$ 也在 D 内解析，且 $F'(z) = f(z)$，于是自然可以将 $F(z)$ 定义为 $f(z)$ 的**原函数**，加上一个任意常数 C，就得到了 $f(z)$ 的不定积分。与实函数情况类似，也有相应的牛顿-莱布尼茨公式：

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(z) - F(z_0).$$

在微积分当中的积分公式，也就都可以“迁移”过来使用。

2.3 复合闭路定理

将柯西积分定理，从单连通区域推广至多连通区域，就得到了复合闭路定理，无论是定理的理解还是证明，都没有什么难度。只需要注意一下曲线的方向。

特别地，如果 D 是由内外两条闭路 C_0, C_1 所围成的环形域，而 $f(z)$ 在 D 内及其边界上是解析的，则有

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

这就是**闭路变形原理**。有了这一结论，我们就可以在解析区域内几乎“随意”变形，常见的操作就是根据圆内奇点的个数和位置把大圆缩成几个小圆，使得每个小圆内分别只有一个奇点，分而求之。

2.4 小结

本节核心是柯西积分定理，由此我们得到关于“闭路积分为零”、“积分与路径无关”（从而能够定义原函数和不定积分）和“闭路连续变形”的三条结论。

3 柯西积分公式

从这一节开始，我们就拥有了处理解析函数问题的重要计算工具——柯西积分公式和高阶导数公式。

3.1 柯西积分公式

（条件同柯西积分定理，略）

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

证明过程主要应用到了 $f(z)$ 的连续性、前面1.1节提到的估值不等式和1.2节提到的积分式，在各种证明题当中，也不时出现这些内容。（建议自行证明，加以巩固理解）

柯西积分公式揭示了一个重要的结论：对于解析函数，其区域边界的值确定了区域内部各点的值。当然，该公式也可推广至多连通区域。

柯西积分公式既可用于求积分，也可用于求某点的函数值，按需取用。

3.2 高阶导数公式

（条件略）

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

就形式上，可以把柯西积分公式，看作是高阶导数公式中 $n = 0$ 时的特例。

理解这一公式的推导过程很有助于做证明题。

作用同上。

3.3 小结

就计算而言，本节的方法可以由第五章的留数方法代替。但是，如果很熟悉这其中的证明过程，对于做证明题挺有帮助。

重点提示

计算方面，不必多说，关键在多练。当然也可以快进到留数方法。

证明方面，建议是看看本章的重要定理、公式的证明过程并加以体会，特别是高阶导数公式的~~（因为最长）~~，并且掌握基本思路和常用方法。

理解方面，可以回到开头的“本章概念总览”，思考各部分之间的逻辑关联。

附录

1. 关于估值不等式：
   设
   $$f(z) = 1, z \in \mathbb{C}.$$
   曲线 C 是从 0 到 -1 的有向线段。则有
   $$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{-1} 1\,\mathrm{d}x\right| = |-1| = 1,$$
   $$\int_C |f(z)|\,\mathrm{d}z = \int_0^{-1} 1\,\mathrm{d}x = -1 \neq \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s = 1.$$
   故有 $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s$，而非 $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}z$
   可见两者含义不同。而且我们所说的“积分的模不大于模的积分”，具体而言应该是“积分的模不大于模对弧长的积分”。

2. 关于柯西积分定理：
   设
   $$f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad \text{曲线 } C : |z| = 1,$$
   易得
   $$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$
   但点 $z = 0$ 为函数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ 在曲线 C 内部的奇点。

第4章 级数

Hye

Course: **Complex Functions and Integral Tranformation**

Beginning date: January 20, 2023

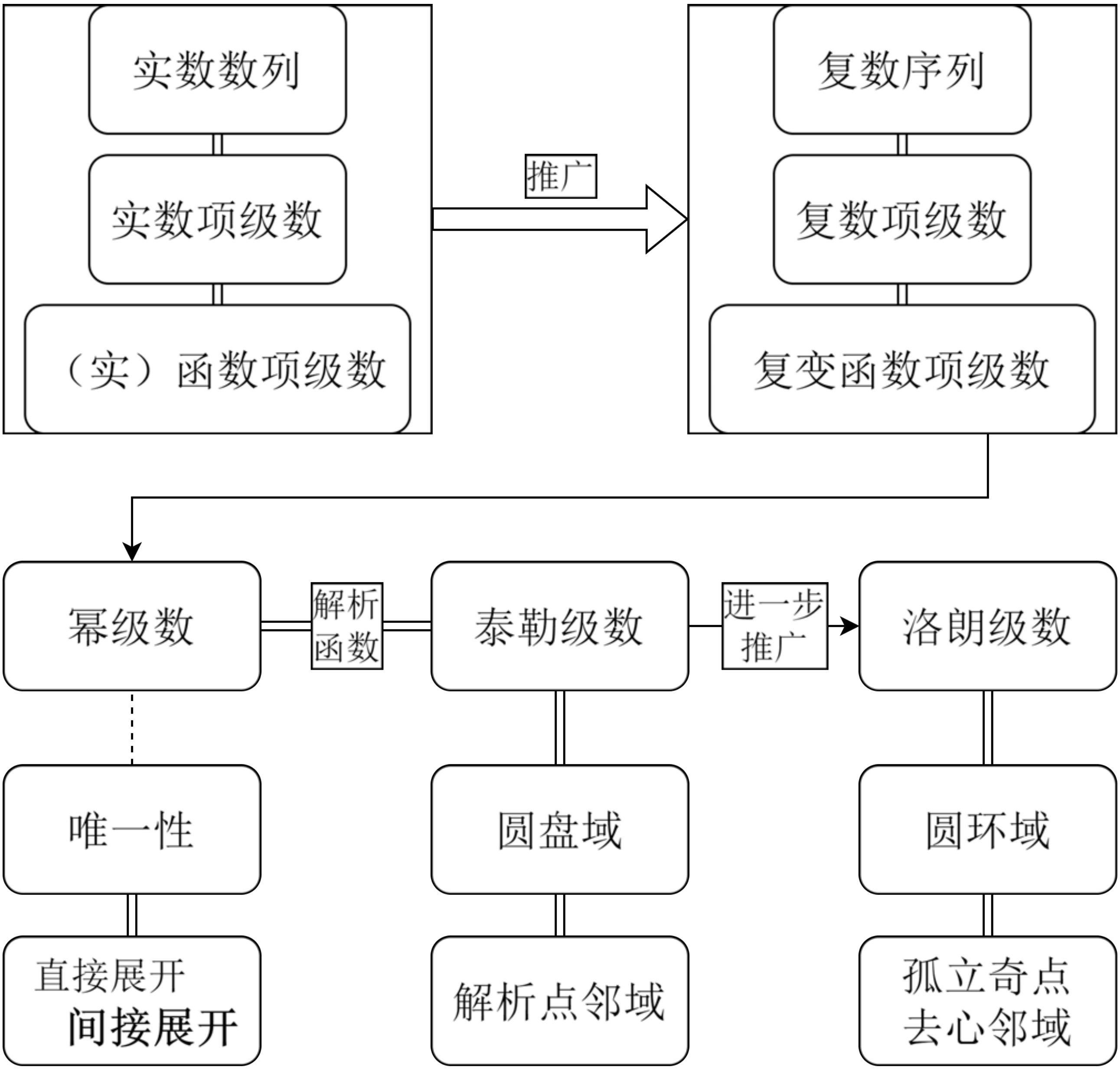
Completion date: January 26, 2023

Revision date: January 31, 2023

关键词

复变函数项级数、幂级数、级数的收敛、泰勒级数、洛朗级数

本章概念总览



概念总览讲解

以上是本章的概念导图。第一节介绍了复数序列、复数项级数和复变函数项级数的概念，这些都是由实数域当中的各概念，相应自然推广而来的。第二节介绍了复变函数项级数中的幂级数，指出解析函数可以展开为幂级数，得到泰勒级数。泰勒级数只含有非负幂次项，在圆盘域上收敛，也就是在解析点的邻域上。在此基础上加以推广，得到在圆环域上收敛的洛朗级数（较前者多了负幂次项）。在特殊情况下，这一圆环域可“蜕化”为孤立奇点的去心邻域。因此我们将在下一章用洛朗级数研究孤立奇点的性质。最后是级数的展开问题。对于相对简单或者无需求得系数通项的情形，我们可以使用直接展开法。不论是泰勒级数还是洛

朗级数，都有其唯一性定理。据此，我们还可以使用间接展开法，包括变量代换、逐项求导、逐项积分等手段。

1 复变函数项级数

这一节其实真没有什么内容，主要是没有太多新东西，绝大多数都是从实数到复数简单的“迁移”。

1.1 复数序列

无穷项实数数列 $\rightarrow$ 复数序列：将数项由实数改为复数即可。

定义复数序列的极限：形式上没有改变，只是原来描述距离用的是差值的“绝对值”，在复数域中改用“模”而已。（“绝对值”不就是“模”么？）

为了将实数序列极限的各种结论迁移到复数序列上来，我们需要这样一个定理：给定一个复数序列 $\{z_n\}$，其中

$$z_n = a_n + \mathrm{i}b_n, n = 1, 2, \cdots, \quad z_0 = a + \mathrm{i}b,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

的充要条件为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 和 } \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

既然复数序列极限可以归结为实部和虚部两个实数序列的极限，那么相应的运算理论（如四则运算）便可自然“迁移”，正如我们之前把一般复变函数的极限归结为两个二元实函数的极限那样。

1.2 复数项级数

复数项级数的定义及其收敛的定义，同样自然“迁移”。

与复数序列极限的情形一致，复数项级数的收敛也可以归结为实部和虚部的收敛。

另外，级数收敛可得通项趋于零（反之不成立），绝对收敛和条件收敛的关系等，也都是和实数项级数一样的。

1.3 复变函数项级数

因为课上也不讲**一致收敛**~~（工科数学是这样的）~~，这一节好像就没什么可讲的了。何况我们后面所接触的绝大多数函数项级数，（在我们的讨论范围内）都是自动满足这条性质的。需要注意的是一致收敛性是函数项级数可以逐项积分和逐项求导的条件之一。而幂级数在这一点上有很好的性质，使我们的各种方法也就畅通无阻了。

1.4 小结

唯迁移尔。

2 幂级数

幂级数是一种特殊的复变函数项级数。本节主要介绍了它的一般性质和运算，其中很多内容也是可以直接从实变数幂级数“迁移”而来的。

2.1 幂级数的概念

定义略。

我们通常讨论幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots .$$

因为幂级数的一般形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

可以令 $z_0 = 0$，即通过平移得到上述较简单的式子。

首先是幂级数的收敛特性~~（然后基本上就可以把一致收敛和收敛混为一谈了）~~：

下面的阿贝尔 (Abel) 定理展示了幂级数的收敛特性.

定理 4.2.1 (1) 若级数 (4.2.2) 在点 $z_0(\neq 0)$ 处收敛, 则它在以原点为圆心、$|z_0|$ 为半径的圆周内收敛且绝对收敛, 在所有半径小于 $|z_0|$ 的闭同心圆盘 $|z| \leqslant \rho|z_0|$ $(0 < \rho < 1)$ 上一致收敛; (2) 若级数 (4.2.2) 在点 $z_0(\neq 0)$ 处发散, 则它在满足 $|z| > |z_0|$ 的点 z 处发散.

可以想象，任取一点讨论幂级数的敛散性，就可以画出一圆，作为一道分界线——若该点处收敛，则收敛域还可再大些；若该点处发散，则收敛域只能再小些。这就自然引出了收敛圆与收敛半径的问题。

2.2 幂级数的收敛圆与收敛半径

幂级数的收敛情况有三种：（1）在复平面上除原点外处处发散（$R=0$）；（2）在整个复平面上处处收敛（$R=+\infty$）；（3）介于前两者之间，故有这样一个圆盘，使得幂级数在其内收敛，其外发散，其上各点则有待讨论。

关于收敛半径，书上给出了两条方法，分别是检比法和检根法：

定理 4.2.2 (达朗贝尔 (d'Alembert) 法则或检比法) 对于幂级数 (4.2.1), 若极限 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lambda$(包括为 0 或 $+\infty$ 的情形), 则它的收敛半径

$$R=\begin{cases}+\infty, & \lambda=0\\ \frac{1}{\lambda}, & 0<\lambda<+\infty\\ 0, & \lambda=+\infty\end{cases} \tag{4.2.3}$$

定理 4.2.3(柯西法则或检根法) 对于幂级数 (4.2.1), 若极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lambda$(包括 λ 为 0 或 $+\infty$ 的情形), 则它的收敛半径

$$R=\begin{cases}+\infty, & \lambda=0\\ \frac{1}{\lambda}, & 0<\lambda<+\infty\\ 0, & \lambda=+\infty\end{cases}$$

以上两条，根据情况使用即可。

2.3 幂级数的性质

前面已经讨论得到，幂级数在一圆盘（半径从 0 到 ∞）内收敛，换言之，幂级数的和函数是定义在收敛圆盘内的一个函数。需要注意的是，和函数的级数展开

$$s(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

这样一个等式只有在收敛域上才有意义，否则就空有形式，而不能进行“合法”的运算。强行运算，可能会歪打正着，更多时候会出现一些荒诞的结果，例见附录。

这一节讲的就两点：和函数在收敛域内解析且可以**逐项求导**，在收敛域内（任一光滑曲线上）可积且可以**逐项积分**。

2.4 幂级数的运算

这一节说的是幂级数的四则运算——加减乘除，与实变数幂级数的四则运算没有什么区别。

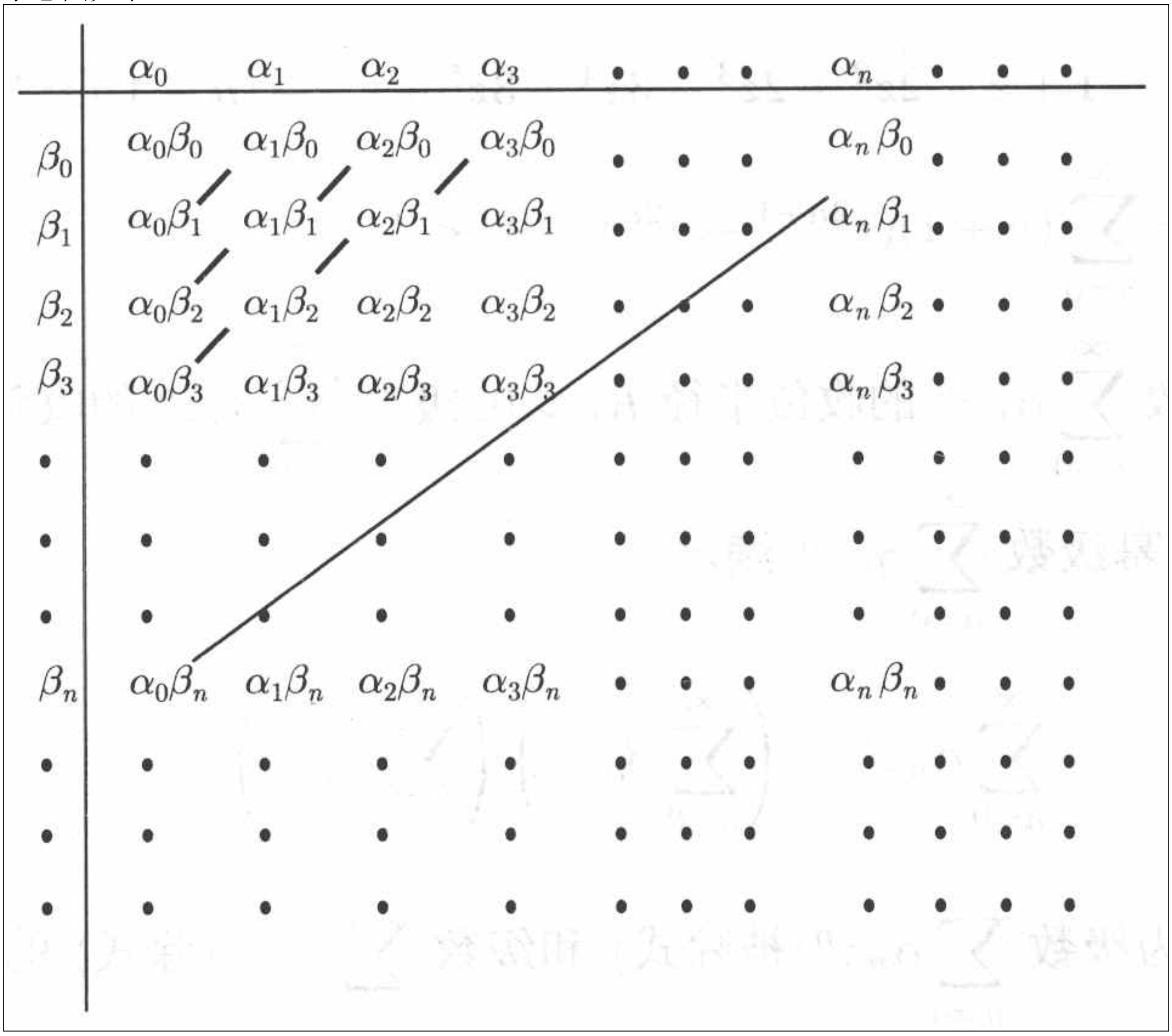
加减法：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nz^n\right)\pm\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_nz^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha_n\pm\beta_n\right)z^n,|z|<R(R\geq\min\{R_1,R_2\}).$$

乘法（采用柯西乘积）：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_0)z^n, |z|<R(R\geq\min\{R_1,R_2\}).$$

示意图如下：



除法：

除法 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ 的收敛半径 $R_1>0$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n$ 的收敛半径 $R_2>0$, 并且 $\beta_0\neq 0$. 若有幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n z^n$ 满足

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n z^n\right) \tag{4.2.9}$$

称级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n z^n$ 为级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$(被除式) 和级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n z^n$(除式) 的商, 而求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n z^n$ 的运算称为级数的除法. 由于 $\beta_0\neq 0$, 那么在点 $z=0$ 附近必有

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\cdots+\alpha_n z^n+\cdots}{\beta_0+\beta_1 z+\beta_2 z^2+\cdots+\beta_n z^n+\cdots}\\&=\gamma_0+\gamma_1 z+\gamma_2 z^2+\cdots+\gamma_n z^n+\cdots\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

下面我们采用长除法进行幂级数的除法, 得到商

$$\frac{\alpha_0}{\beta_0}+\frac{\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1}{\beta_0^2}z+\frac{\alpha_2\beta_0^2-\alpha_0\beta_0\beta_2-\alpha_1\beta_0\beta_1+\alpha_0\beta_1^2}{\beta_0^3}z^2+\cdots$$

2.5 小结

幂级数这一节的关键在于收敛圆和收敛半径这一部分。在收敛域内，幂级数就具有了十分良好的性质——可逐项求导和逐项积分。幂级数可逐项求导的性质中，已经暗含了其与解析函数的关系。

3 泰勒级数

首先要指出的是泰勒级数和幂级数的关系。就来源而言，两个概念并不是完全重合的，泰勒级数是从泰勒展开或者说是函数的导数引出的，应该说是一种特殊的幂级数，而幂级数的概念一开始并未提及导数。但是下面的泰勒展开定理指出，这两者对于解析函数来说是完全一致的。

3.1 泰勒展开定理

首先抄下定理：

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 是 D 内的一点，R 为 z_0 到 D 的边界的距离，则当 $|z-z_0|<R$ 时，有

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

其中，

$$a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n=1,2,\cdots,$$

C_r 为以 z_0 为圆心且落在 $|z-z_0|<R$ 内的任意圆周。

也就是说，函数在一点处解析和该点附近可用幂级数表示是等价的。进而我们就可以把泰勒级数和幂级数合而为一了——

（定理4.3.3）若 $f(z)$ 在点 z_0 附近可用形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 的幂级数表示，则此幂级数只能是 $f(z)$ 在点 z_0 的泰勒级数。这个定理可以通过对幂级数（的和函数）不断求导来证明，只要证明展开的幂级数系数和泰勒级数的系数相等即可。

上述定理所刻画的性质称为**解析函数的幂级数展开式的唯一性**。

3.2 几个初等函数的幂级数展开式

首先当然得记几个常用函数的幂级数展开式，这种就跟积分表一样，能记住当然是多多益善，记不住的话至少得记住一个吧（）：

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots,\quad |z|<1$$

通过变量代换（“换正负号”）可以得到

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^nz^n+\cdots,\quad |z|<1$$

通过逐项积分可以得到

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots,\quad |z|<1$$

直接展开法，即利用泰勒展开式，通过求导得到各项系数。如 $\mathrm{e}^z,\cos z,\sin z$（这三个都是在全平面内解析的函数，即 $|z|<+\infty$）的展开式都可以用这一方法简单求得。对于复杂的函数，如果只需要求出前几项的系数，实在没辙了也可以直接求导。

间接展开法，即利用已知的展开式，通过四则运算、求导、积分、代入（复合函数）等方式求得新展开式。

3.3 小结

解析函数的幂级数展开式的唯一性是本节的核心，它揭示了解析函数和幂级数的深刻关系。就应用而言，需要熟练掌握幂级数的展开方法，尤其是间接展开法。

4 洛朗级数

洛朗级数是幂级数的推广。就级数的结构而言，幂级数只包含正幂项（及常数项），而洛朗级数还包含负幂项。就适用的条件而言，幂级数（泰勒级数）在解析点附近，即（解析的）圆盘域上展开，而洛朗级数能够在（解析的）圆环域上展开，对于研究解析函数，特别是其孤立奇点的性质，有着重要作用。

4.1 洛朗级数的概念及性质

定义略。形式上，比幂级数多了负幂项。

与泰勒级数类似，要指出其收敛域、收敛情况、解析情况和（微积分）性质。

定理 4.4.1 若洛朗级数 (4.4.1) 有收敛域, 则该域必为圆环域 D: $R_1 < |z-z_0| < R_2(0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant +\infty)$, 且级数 (4.4.1) 在 D 内绝对收敛, 在闭圆环域 $D': R_1' \leqslant |z-z_0| \leqslant R_2'(R_1 < R_1' < R_2' < R_2)$ 上一致收敛, 和函数在 D 内解析, 而且可以逐项积分, 逐项求导.

4.2 洛朗展开定理

若函数 $f(z)$ 在圆环域 $D: R_1 < |z-z_0| < R_2 (0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty)$ 内解析，则

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

这里 C 为任意的圆周：$|z-z_0| = R, R_1 < R < R_2$.

如果细心的话，可以发现，在课本的证明过程中，形如 $\dfrac{1}{1-t}$ 的函数的级数展开起到了重要的作用。摘录如下：

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}$$

4.3 求解析函数的洛朗展开式的一些方法

洛朗级数的直接展开是很复杂的，所以通常是用间接展开法。

有理函数：

例如, 求有理函数的洛朗展开式, 只需利用部分分式法把有理函数分解成多项式与若干个最简分式之和, 然后再利用已知的几何级数, 经计算把它们展开成需要的形式.

更具体地说，你会把各种分式最后化成

$$(\pm)\frac{1}{1 \pm t}$$

的形式，其中后面的正负号往往是自动确定的，而前面的正负号要根据指定的圆环域确定，t 的具体内容会随着凑出来的这个 1 自然确定下来。剩下的就是利用

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots, \quad |z| < 1$$

来展开了（注意变量代换）。

其他函数：利用已知的基本初等函数的泰勒展开式，经过代换逐项求导、逐项积分等计算来展开。其中特别要注意倒代换（$\zeta = \frac{1}{z}$）和负代换（$m = -n$），因为这往往能够由泰勒级数产生负幂项。

4.4 小结

洛朗级数作为泰勒级数的推广，从理解到应用，有很多相似之处，尤其是在这一章，因为还没有讲到留数，尚没有充分展现出洛朗级数的作用。所以此处不作赘述。

重点提示

泰勒级数和洛朗级数及其展开方法是本章重点，需要多练。

附录

1. 关于罔顾收敛域得出的荒诞结果：
   考虑这样一个常见的级数
   $$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \quad |z| < 1.$$
   在收敛域 $|z| < 1$ 内，这个等式没有问题。但是如果不考虑收敛域而任意取值，就会出现一些荒诞的结果。比如，取 $z = 2$，得
   $$\frac{1}{1-2} = -1 \stackrel{?}{=} 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$
   这样的结果，提醒我们千万不能遗忘了在级数展开式后附上收敛域，**审题时同样如此**。

2. 关于这章讲义以及视频完成时间后延的原因：
   因为要过年。

第5章 留数

Hye

Course: **Complex Functions and Integral Tranformation**

Beginning date: January 26, 2023

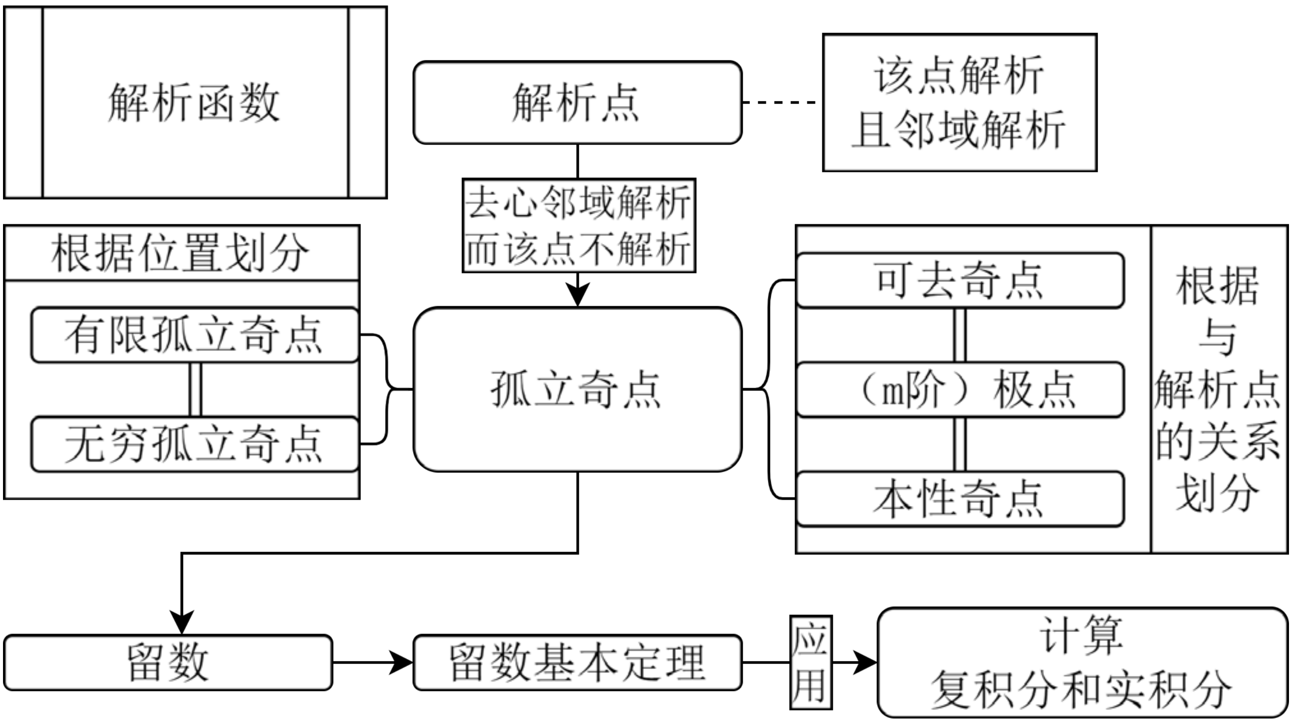
Completion date: January 30, 2023

Revision date: January 31, 2023

关键词

留数、孤立奇点、可去奇点、极点、本性奇点、留数基本定理

本章概念总览



概念总览讲解

以上是本章的概念导图。解析函数的孤立奇点是本章的核心概念，在理解其概念时可以结合解析点的概念来对照理解。根据位置划分，孤立奇点分为有限孤立奇点和无穷孤立奇点，相应地，在处理这两类奇点时会略有不同；根据与解析点的关系划分，孤立奇点分为可去奇点、（m阶）极点、本性奇点。解析函数在孤立奇点处的留数是本章的重点概念，本章介绍了其概念、基本定理以及在计算复积分和实积分中的应用。

1　孤立奇点

1.1　解析函数的孤立奇点及分类

孤立奇点的定义：若函数 $f(z)$ 在 z_0 点的邻域内除去 z_0 点外是处处解析的，即 $f(z)$ 在去心圆域 $D: 0<|z-z_0|<\delta(\delta>0)$ 内处处解析，则称 z_0 点是 $f(z)$ 的一个**孤立奇点**。

上述定义中的“去心圆域”，正是一种特殊的圆环域，因此可以在 D 内将 $f(z)$ 展开为洛朗级数：

$$\begin{aligned} f(z) = & \cdots + a_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} \\ & + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots,\ z \in D \end{aligned}$$

接下来，根据洛朗级数对孤立奇点进行分类。

可去奇点

无负幂项（负幂项系数均为零）→可去奇点：

$$\begin{aligned} f(z) = & \cancel{\cdots} + \cancel{a_{-m}(z-z_0)^{-m}} + \cancel{\cdots} + \cancel{a_{-1}(z-z_0)^{-1}} \\ & + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots,\ z \in D \\ \to f(z) = & \ a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots,\ z \in D \end{aligned}$$

之前我们强调过级数的收敛域问题，上述等式在去心邻域 D 内成立，而在点 z_0 处不成立。但是我们可以看到右边这个级数只含正幂项，在形式上就是泰勒级数，它的和函数（记为 $F(z)$）是在点 z_0 处解析的函数。令 $z = z_0$，就可以得到 $F(z_0) = a_0$。也就是说，如果令 $f(z_0) = a_0$，我们就可以让上述等式在包括点 z_0 在内的圆盘域上成立。换而言之，补充定义后的 $f(z)$ 在点 z_0 可以展开为泰勒级数，当然也就解析了。

只需要稍稍调整该点的函数值，就可以让它从奇点变为解析点，称之为**可去奇点**，再合适不过了。

m阶极点

含有限多个（系数不为零的）负幂项（关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为$(z-z_0)^{-m}$）→（m阶）极点：

$$f(z)=\cancel{\cdots+}\,a_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{-1}$$
$$+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots(m\geq 1, a_{-m}\neq 0),\ z\in D$$

这种情况下，如果要使这一奇点“变为”解析点，就没有那么简单了。但毕竟负幂项是有限多个，总可以找到关于 $(z-z_0)^{-1}$ 的最高幂 $(z-z_0)^{-m}$，形式上，只需要等式两边同乘以 $(z-z_0)^m$，就可以消除负幂项，得到泰勒级数，相应地就得到这么一个解析函数

$$g(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+a_0(z-z_0)^m+a_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots,\ |z-z_0|<\delta$$

其中，$g(z_0)=a_{-m}\neq 0$，z_0 是 $f(z)$ 的奇点，但同时是 $g(z)$ 的解析点。于是就有这一结论，或者说是极点的一种定义：

定理 5.1.1 **设函数 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，则 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点的充要条件是 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内可表示成**

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$$

的形式，其中函数 $g(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 内解析且 $g(z_0)\neq 0$.

本性奇点

含无穷多个（系数不为零的）负幂项→本性奇点：

$$f(z)=\cdots+a_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{-1}$$
$$+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots,\ z\in D$$

这种情况下，在原式上乘以次数多高的正幂次项 $(z-z_0)^m$，都无法将奇点“变为”解析点，颇有一种“本性难移”的意思。于是我们就形象地把这类奇点称为“本性奇点”。

举一例子：$f(z)=\mathrm{e}^{1/z}$ 在点 $z=0$ 的邻域 $0<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开式为

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots+\frac{1}{m!}z^{-m}+\cdots$$

显然，$z=0$ 是 $\mathrm{e}^{1/z}$ 的本性奇点。

1.2 解析函数在有限孤立奇点的性质

直接摆结论：

- 可去奇点：该点极限存在且有限；
- 极点：该点极限趋于无穷；
- 本性奇点：该点不存在有限或无穷的极限。

与微积分当中“间断点”的概念相类比：可去奇点就类似于可去间断点；极点类似于无穷间断点；本性极点类似于跳跃间断点和振荡间断点，表现出很“极端”的趋限行为，比如用计算机绘图时会发现本性奇点附近的图像很“扭曲”。

1.3 解析函数的零点与极点的关系

首先是零点的定义：

设函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域 $N(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$ 内解析，并且 $f(z_0)=0$，那么点 z_0 称为解析函数 $f(z)$ 的一个零点.设 $f(z)$ 在 $N(z_0,\delta)$ 内的泰勒展开式为

$$f(z)=a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$$

如果 $a_n=0$, $n=1,2,\cdots$, 那么 $f(z)$ 在 $N(z_0,\delta)$ 内恒等于零.

如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 中不全为零, 则存在正整数 m, $a_m\neq 0$, 而对于 $n=1,2,\cdots,m-1$, $a_n=0$, 那么称 z_0 是 $f(z)$ 的 m阶零点. 于是

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z) \tag{5.1.6}$$

其中 $\varphi(z)=a_m+a_{m+1}(z-z_0)+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots$ 在 $N(z_0,\delta)$ 内解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$. 因而可以找到一个正数 ε, 使得当 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 时, $\varphi(z)\neq 0$, 于是 $f(z)\neq 0$. 换句话说, 存在着 z_0 的一个邻域, 其中 z_0 是 $f(z)$ 的唯一零点.

然后是零点的重要性质：函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析，则 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点的充分必要条件是：

$$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

最后是零点和极点的关系： z_0 是 $f(z_0)$ 的 m 阶极点 $\iff$ z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点。

1.4 解析函数在无穷孤立奇点的性质

之所以要专门设置一节来讲无穷孤立奇点，原因之一是无穷远点比较特殊，它始终是奇点（当然，不一定是孤立的）。哪怕对于在全平面内解析的函数来说，无穷远点也是奇点。比如，

$$f(z)=\mathrm{e}^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots,\ |z|<+\infty$$

在全平面（$|z|<+\infty$）上解析，但这仍然可以看作只是在无穷远点的去心邻域上解析。而且，直接讨论形如 $f(\infty)$ 这样的东西又会产生更多的麻烦。所以课本上关于无穷孤立奇点的

讨论，是从一系列**规定**开始的：

> 若函数 $f(z)$ 在域 $D: R < |z| < +\infty$ $(R > 0)$ 内解析, 则称 $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点.
>
> 设 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点. 为了研究 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 邻域内的性质, 我们作变换 $\zeta = 1/z$, 将 $z = \infty$ 的邻域变为点 $\zeta = 0$ 的邻域, 函数
>
> $$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$
>
> 在 $D': 0 < |\zeta| < \dfrac{1}{R}$ 内解析, $\zeta = 0$ 是它的一个孤立奇点.
>
> 我们规定如果 $\zeta = 0$ 是函数 $g(\zeta)$ 的可去奇点, (m 阶) 极点或本性奇点, 则 $z = \infty$ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点、(m 阶) 极点或本性奇点.

其中的关键在于通过倒代换（$\zeta = 1/z$），将无穷远点处转移到原点处，通过有限孤立奇点定义无穷孤立奇点。后面计算无穷孤立奇点处留数时，也需要用到倒代换。

$f(z)$ 在无穷远点的邻域 $D: R < |z| < +\infty$ 内解析，展开为洛朗级数：

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

那么，就可以先分析 $g(\zeta)$ 在 $0 < |z| < \dfrac{1}{R}$ 上展开的洛朗级数，再经过倒代换（$\zeta = 1/z$），即

（正幂项） $\zeta^n = z^{-n}$ （负幂项）

得到无穷孤立奇点的相关结论：

> $$g(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \zeta^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^{-n} \tag{5.1.8}$$
>
> 我们知道, 如果在级数 (5.1.8) 中, 不含负幂项、含有有限多的负幂项并且 $a_m \zeta^{-m}$ 为出现的最高负幂项和有无限多的负幂项, 那么 $\zeta = 0$ 是 $g(\zeta)$ 的可去奇点, m 阶极点和本性奇点. 这样根据上面的规定, 有:
>
> (1) 当 $a_n = 0,\ n = 1, 2, \cdots$ 时, $z = \infty$ 是函数 $f(z)$ 的可去奇点;
>
> (2) 当 $a_m \neq 0$, $a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = 0$ $(m \in N)$, $z = \infty$ 是函数 $f(z)$ 的 m 阶极点;
>
> (3) 当有无穷多个自然数 n, 使得 $a_n \neq 0$, $z = \infty$ 是函数 $f(z)$ 的本性奇点.

无穷孤立奇点处极限的性质，见上面的1.2节——解析函数在有限孤立奇点的性质。

1.5 小结

本节重点在于，一方面把握孤立奇点的概念，主要从洛朗级数和该点处极限两方面进行理解；一方面要能够判断奇点类型，特别是确定极点的阶数。

2 留数

2.1 留数的定义及其计算规则

设函数 $f(z)$ 在 z_0 点的去心邻域 $D: 0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析，z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点。函数 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的留数定义为

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z) \, \mathrm{d}z,$$

记作 $\mathrm{Res}[f(z), z_0]$，其中 C 是包含在 D 内且围绕 z_0 的任意一条正向简单闭曲线。

留数（又称“残数”），名副其实。根据柯西积分定理，如果在解析区域里画闭路，而且围住的都是解析点，那么积分值为零；但如果围住了孤立奇点，那就可能“残留”下非零值，留数刻画的就是这一内容。

既然讨论孤立奇点，那么自然考虑洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

因此

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[f(z), z_0] &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z) \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right] \mathrm{d}z \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z \end{aligned}$$

这里出现了一个重要的积分式

$$\oint_C (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi \mathrm{i}, & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

这个积分式，我们在第三章讲过（讲义第5页有课本截图），只不过当时讨论的形式是

$$\oint_C \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}[f(z), z_0] &= \left(\sum_{n=-\infty}^{-2} a_n \cdot \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C (z-z_0)^n \,\mathrm{d}z\right) \\
&\quad + a_{-1} \cdot \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C (z-z_0)^{-1} \,\mathrm{d}z \\
&\quad + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C (z-z_0)^n \,\mathrm{d}z\right) \\
&= 0 + a_{-1} \cdot \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \cdot 2\pi \mathrm{i} + 0 \\
&= a_{-1}.
\end{aligned}$$

有趣的是，在洛朗级数的所有系数当中，只有 a_{-1} “留”了下来。

至于无穷孤立奇点，如下：

> **若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，即 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，我们定义 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的留数为**
>
> $$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C-} f(z)\mathrm{d}z \tag{5.2.3}$$
>
> **其中，C 为包含在区域 D : $R<|z|<+\infty$ 内且围绕原点的任意一条正向简单闭曲线.**

同样利用洛朗级数，相应可得

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z) \,\mathrm{d}z = -a_{-1}.$$

接下来，就是留数的计算问题。总的思路，就是要得到洛朗级数的那个关键的系数 a_{-1}。下面先讨论**有限点**的情形。

可去奇点

对于可去奇点来说，对应的洛朗级数没有负幂项，$a_{-1}=0$，留数为零。但是**无穷**可去奇点的留数不一定为零。

极点

对于极点来说，如果 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \{(z-z_0)^m f(z)\}$$

证明思路从表达式上就可以看出来：根据洛朗展开式，乘以 $(z-z_0)^m$ 得到泰勒级数，通过求导，将系数 a_{-1} 提至常数项，再取极限，只保留常数项 $(m-1)!a_{-1}$，然后再除一下就得到结果了。

特别地，一阶极点的留数比较常见，求起来也比较简单，书上特地写了一下：

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

此外，还有一个结论：

推论 5.2.2 设 $f(z) = P(z)/Q(z)$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 $z_0 \in \mathbb{C}$ 点解析, 如果 $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0) \neq 0$, 那么 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点, 并且

$$\text{Res}[f(z),\ z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \tag{5.2.7}$$

证明 因为 $Q(z_0) = 0$ 及 $Q'(z_0) \neq 0$, 所以 z_0 为 $Q(z)$ 的一阶零点, 从而 z_0 为 $1/Q(z)$ 的一阶极点. 因此

$$\frac{1}{Q(z)} = \frac{1}{z-z_0}\varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 点解析, 且 $\varphi(z_0) \neq 0$. 于是

$$f(z) = \frac{1}{z-z_0}g(z)$$

这里, $g(z) = \varphi(z)P(z)$ 在 z_0 解析, 且 $g(z_0) = \varphi(z_0)P(z_0) \neq 0$. 故 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点.

由推论 5.2.1, $\text{Res}[f(z),\ z_0] = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$, 而 $Q(z_0) = 0$, 所以

$$(z-z_0)f(z) = \frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}$$

令 $z \to z_0$, 即得式 (5.2.7).

这个结论挺有用的。证明过程中就关键一步在于凑导数的形式。

本性奇点

求本性奇点处的留数，没法用前面的方法，一般是回到洛朗级数本身。既然要求 a_{-1}，那如果能把洛朗级数直接写出来，那也就得到留数了。通常也不需要求出系数通项（能轻易求出当然没问题），而是通过幂级数的各种运算，集中求出 $(z-z_0)^{-1}$ 的系数即可。需要强调的是，这一方法是通用的，也可以用于求解极点处的留数。

2.2 留数的基本定理

留数基本定理：设 C 是一条正向的简单闭曲线，若函数 $f(z)$ 在 C 上及 C 的内部除去有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析，那么

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$$

推广的留数基本定理：如果函数 $f(z)$ 在扩充的复平面内只有有限的孤立奇点，那么 $f(z)$ 在各孤立奇点（包括∞点）的留数之和等于零。

前面讲了有限孤立奇点的留数计算法则，利用留数基本定理，可以给出无穷孤立奇点的留数计算方法：

$$\mathrm{Res}[f(z), \infty] = -\,\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}, 0\right]$$

或者直接根据推广的留数定理有

$$\mathrm{Res}[f(z), \infty] = -\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$$

留数基本定理，证明起来没有什么难度，不赘述。关键在于，留数基本定理将我们所讨论的解析函数的积分问题，都归结为求留数的问题了。这也正是留数的用武之地。

利用留数计算复积分的步骤，一般就是，根据积分路径找孤立奇点，然后求留数。求留数的过程中，要善于选取方法以及运用推广的留数定理化繁为简，将难算的留数（特别是高阶极点的留数）转化为易算的留数。

2.3 小结

本节主要内容就是留数的概念和计算方法，前者注意结合洛朗级数理解，后者则需要一定的练习。

3 留数在定积分计算中的应用

应用留数基本定理计算特定类型实函数的积分有多种方法。一种是通过变量代换（如3.1）。一种是将定积分的积分区间 I（实轴或实轴上的线段）**补充为闭路** γ，并且根据被积函数 $f(x)$ **选取适当的复变函数** $F(z)$，将待求的定积分转化为闭路内部各奇点处的留数和补充部分上的积分。这样描述可能比较抽象，通过下面的例子（3.2和3.3）就比较好理解了。

3.1 形如 $\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

$R(\sin\theta, \cos\theta)$ 为 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的有理函数且 $R(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 = 1$ 上无奇点——这个是确保复变函数可以在单位圆周上积分。设 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$
$$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \frac{1}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z$$

于是

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

设

$$F(z) = \frac{1}{\mathrm{i}z}R\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]$$

若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $F(z)$ 在单位圆周 $|z| < 1$ 内的奇点，则有

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z), a_k]$$

这一类只是进行了简单的变量代换，较为简单，积分的形式也很容易辨认。

当然，还可以简单推广一下，有：

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2}\left(z^n + z^{-n}\right)$$
$$\sin n\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z^n - z^{-n}\right)$$

3.2 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分

首先上结论：

当被积函数 $R(x)$ 是 x 的有理函数，而**分母的次数至少比分子的次数高二次**，并且 $R(x)$ 在实轴上没有奇点时，积分是存在的。若设 $R(z)$ 在上半平面 $\mathrm{Im}\,z > 0$ 的极点为 $a_1, a_2, \cdots, a_p$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}[R(z), a_k]$$

这一节的开头提到过两个关键步骤：积分区间扩充为闭路，选取合适的复变函数。在这里，积分区间是整个实轴，我们通过在上半平面沿逆时针画半圆来形成闭路（如下图，$R \to +\infty$），而选取的复变函数是实函数的直接扩充（$R(x) \to R(z)$）。

这里有一关键之处是，当 $R \to +\infty$ 时，我们添加的辅助曲线 C_R 上的积分趋于零。这是有条件的——**分母的次数至少比分子的次数高二次**。这样一来，待求的定积分就等于闭路积分，也就可以直接由上半平面的极点的留数表示。

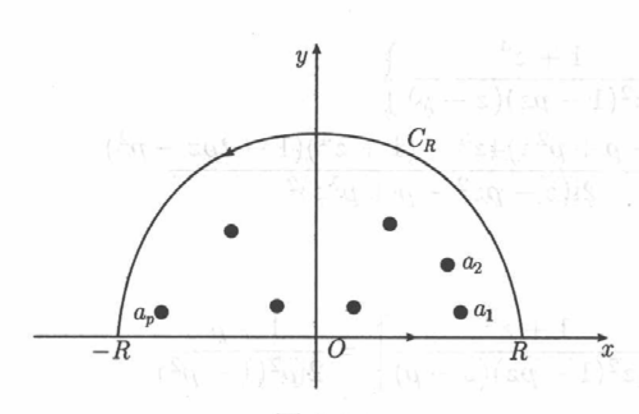


图 5.3.1

3.3 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\,\mathrm{d}x(a>0)$ 的积分

同样先上结论：

当被积函数 $R(x)$ 是 x 的有理函数，而分母次数至少比分子的次数**高一次**，并且 $R(x)$ 在实轴上没有奇点时，积分是存在的。若设 $R(z)$ 在上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 的极点为 $a_1,a_2,\cdots,a_p$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}az},a_k]$$

这和上一类是一样的，都是补个半圆，都是能够证明半圆上积分趋于零的，被积函数也是只做了直接扩充。当然，这里的被积函数含有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$，积出来的一般不会是实数，但我们通常需要求的也并非是这个积分值本身，而是它的实部和虚部：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\left(\cos ax+\mathrm{i}\sin ax\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\,\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

也就是说，我们可以用这种方法求出这两类实函数的定积分——

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}az},a_k]\right\},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}az},a_k]\right\}.$$

3.4 小结

这一节主要是应用，没什么特别的，只要准确判断待求定积分类型，然后按部就班求就行了。

重点提示

1. 奇点类型的判断；
2. 留数的计算；
3. 利用留数计算特定类型的定积分。

附录

复变函数部分，完结撒花*★,°*:.☆(￣▽￣)/$:*.°★* 。