No.

Date

复变函数与积分变换

第1章 复数与复变函数

一、复数

1、复数概念：形如 $z=x+iy$，x、y 为实数

其中 i 为虚单位，具有性质 $i^2=-1$

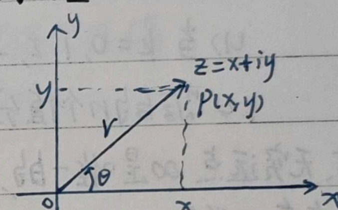
其中 x、y 分别称为 z 的实部与虚部，记作 $x=\mathrm{Re}\,z$，$y=\mathrm{Im}\,z$

特别地，虚部为零的复数是实数；实部为零且虚部不为零的复数是纯虚数

两复数相等，当且仅当其实部和虚部分别相等（或模相等，辐角差 $2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$）

2、复数的几何表示：

以下三者一一对应：复数 $z=x+iy$、复平面上的点 (x,y)、复平面上的向量 $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}$



复数 z 的模：向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度 r，记作 $|z|$

辐角：实轴正向转到与 $\overrightarrow{OP}$ 同向时所成的角，记作 $\mathrm{Arg}\,z$

辐角的主值：满足 $-\pi<\theta_0\le\pi$ 的辐角的值，记作 $\arg z$

$$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

由复数 z 的实部 x 与虚部 y 来表示辐角主值 $\arg z$：一四不变，二加三减

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x} & z\in \mathrm{I}、\mathrm{IV}\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & z\in \mathrm{II}\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi & z\in \mathrm{III}\end{cases}$$

由直角坐标与极坐标的关系，有：$\begin{cases}r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan\theta=\tan(\mathrm{Arg}\,z)=\frac{y}{x}\end{cases}$ 以及 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$

由欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

复数 z 的三角表示式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

指数表示式 $z=re^{i\theta}$

3、复数运算的性质　复数不能比大小！　一个复数的共轭等于它本身 $\Longleftrightarrow$ 该复数是实数

① $z_1+z_2=z_2+z_1$

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$

$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$

$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$

② $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\ (z_2\ne0)$

$\overline{\overline{z}}=z$

③ $\mathrm{Re}\,z=x=\frac{z+\overline{z}}{2}$

$\mathrm{Im}\,z=y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$

☆ $z\overline{z}=x^2+y^2=|z|^2$

$|\overline{z}|=|z|$

④ $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$

用 $|z|^2=z\overline{z}$ 证明

其中 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}$

$=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$

$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$

No.

Date

psp_dada

4、复数的乘除、乘方与开方

- 两复数相乘：模相乘，辐角相加 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$，$Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2$

几何作图法：$z_1 \cdot z_2 \Rightarrow$ 将 z_1 沿自身方向伸长 $|z_2|$ 倍后，再旋转一个角度 $\arg z_2$，得到 $z_1 \cdot z_2$

- 两复数相除：模相除，辐角相减 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$，$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg\, z_1 - Arg\, z_2$

- 求复数的n次方（n为整数）：模求n次方，辐角成n倍 $\Rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta = e^{in\theta}$
- 开方：对 $z \in \mathbb{C}$，若存在 $w \in \mathbb{C}$ 满足 $w^n = z$ $(n \in \mathbb{Z}, n > 1)$，则称 w 为 z 的n次方根，

记作 $w = \sqrt[n]{z}$ 对 $z = re^{i\theta}$，其n次方根：

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}},\quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

(1) 当 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 时，得到n个相异的值 $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$

(2) $\sqrt[n]{z}$ 的n个值分布在以原点为圆心，$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆内接正n边形的顶点上

5、无穷远点 ∞ 是唯一的，$|\infty| = +\infty$，其实、虚部、辐角无意义 有限复平面 $\mathbb{C}$ 扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

与复球面对应

二、复变函数

1.定义 设G是复数 $z = x + iy$ 的集合，若存在一个法则f，按f对于G中每个z，都有一个（或多个）确定的复数 $w = u + iv$ 与之对应，则称 w 是 z 的复变函数，记作

$$w = f(z)$$

其中z称自变量，w称因变量，G称为w的定义集合，函数值集合 $G^* = f(G) = \{w = f(z) : z \in G\}$

- 函数分为单值函数和多值函数
- 对函数 $w = f(z)$，令 $z = x + iy$，$w = u + iv$，则 $u + iv = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$

即 给定一个复变函数 $w = f(z)$ $\Longleftrightarrow$

给定两个二元实变函数 $u = u(x, y)$ $v = v(x, y)$，s.t. $w = u + iv$

2、极限

定义：设复变函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $\mathring{U}_\rho(z_0)$ 内有定义，若 $\exists A \in \mathbb{C}$，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，s.t. 当 $0 < |z - z_0| < \delta \le \rho$ 时，恒有 $|f(z) - A| < \varepsilon$ 成立，则称A为当z趋向 z_0 时函数 $f(z)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$

$z = x + iy \to z_0 = x_0 + iy_0$ 的方式是任意的、无限的

Campus

定理：设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则

$\lim_{z\to z_0} f(z)=A=a+ib \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} u(x,y)=a,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} v(x,y)=b$

定理：若 $\lim_{z\to z_0} f(z)=A$，$\lim_{z\to z_0} g(z)=B$，则

(1) $\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$，　(2) $\lim_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=AB$

(3) $\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\frac{A}{B}$ $(B\neq 0)$

(4) 设 $w=f[g(z)]$ 由 $w=f(\xi)$，$\xi=g(z)$ 复合，若 $\lim_{z\to z_0} g(z)=A$

且在 $\mathring{N}(z_0,\delta)$，$g(z)\neq A$，又 $\lim_{\xi\to A} f(\xi)=B$，则 $\lim_{z\to z_0} f(g(z))=B$

或换成f连续

3.连续性

定义：函数 $f(z)$ 在 z_0 处有极限，且 $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续

定理：在一点处连续的复变函数的和、差、积、商与复合均在该点连续

定理：函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续

$\iff$ $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处均连续

4.导数

定义：设 $w=f(z)$ 为D内的单值函数，$z_0\in D$，且 $w_0=f(z_0)$，若极限

$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

存在，则称 $f(z)$ 在点 z_0 处可导，称此极限值为 $f(z)$ 在 z_0 处的导数，

记作 $\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0}$，$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}$，$f'(z_0)$

性质：1.可导函数的和、差、积、商、复合、反函数的导数求法同高数

2.可导必连续，连续不一定可导　　eg. $f(z)=|z|^2$ 仅在原点可导

5.解析：

定义：若函数 $f(z)$ 在点 z_0 及其某个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在点 z_0 解析

性质：函数在一点可导 $\Leftarrow$ 在一点解析

函数在区域内可导 $\iff$ 在区域内解析　　区域：连通的开集

☆定理：函数 $f(z)=u+iv$ 在一点可导 $\iff$ $u(x,y)$、$v(x,y)$ 在该点可微，且满足C-R方程

① 多元函数：有一阶连续偏导数 $\to$ 可微 $\to$ 可偏导

② C-R方程：$u_x=v_y$，$u_y=-v_x$

③ 若将 $z=x+iy$ 与 $\bar{z}=x-iy$ 形式地看成独立变数，写作 $w=F(z,\bar{z})$，则 $\frac{\partial F(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}}=0 \iff$ C-R方程

用法：若 $f(z)$ 不含 $\bar{z}$，只显式地表示成 z 的函数，则 $f(z)$ 解析，其求导类似于高数求法

No.

Date

定理：函数$f(z)=u+iv$在区域D内解析<=>$u(x,y)$, $v(x,y)$在D内任一点均可微且满足C-R方程

推论：若$f(z)$可导，则 $f'(z)=u_x+iv_x$

利用C-R方程，可得到四种不同计算式

题型：证明解析函数$f(z)$在D内为常数 => 证明$u_x=u_y=v_x=v_y=0$

6、调和：

· 定义：一个二元实函数$u(x,y)$在区域D内具有二阶连续偏导数，且满足拉普拉斯方程，则称$u(x,y)$为D内的调和函数

其中，拉普拉斯(Laplace)方程为一偏微分方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$

· 定理：设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在D内解析，则$u(x,y)$, $v(x,y)$均为D内的调和函数

· 定义：在D内满足C-R方程的两个调和函数u, v中，v称为u的共轭调和函数

注：此处的共轭是不具对称性的

· 定理：复变函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在D内解析

<=> 其虚部$v(x,y)$是实部$u(x,y)$的共轭调和函数

· 应用：在单连通域D上，若已知一个解析函数的实部$u(x,y)$（或虚部$v(x,y)$），则必可以找到其一簇虚部（或实部），构成一解析函数 $w=u+iv$

eg. 已知$u(x,y)$，求$v(x,y)$使$f(z)=u+iv$解析

法一：全微分法 由$dv=v_xdx+v_ydy=-u_ydx+u_xdy$

知$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u_ydx+u_xdy+C$，一般取折线计算，并取$(x_0,y_0)=(0,0)$

法二：偏积分法 $v(x,y)=\int v_ydy=\int u_xdy$，再将$v(x,y)$代入$v_x=-u_y$，定出系数

· 应用：已知$w=f(x+iy)$解析，如何将w表示成z的函数

已知w与$\bar{z}$无关，令$y=0$，得到$w=f(x)$，再用z替代x，得到$w=f(z)$

三、初等函数

1.指数函数

定义 $\exp z=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ $\forall z=x+iy\in C$

此处e^z中的e不再是2.718…,而是复指数函数的专用记号

性质 1) $|e^z|=e^x$, $\mathrm{Arg}\,e^z=y+2k\pi, k\in Z$ 由$e^x>0$知$e^z\neq 0$

2) e^z是单值的

3) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$

4) 周期性:函数e^z以$2\pi i$为基本周期,即$e^{z+2k\pi i}=e^z$, $k\in Z$

5) 解析性:e^z在复平面内解析,且$(e^z)'=e^z$

2.对数函数

定义:若$z=e^w$, $z\neq 0$,则把w称为复变量z的对数函数,记作$w=\mathrm{Ln}z$

$\mathrm{Ln}z$是多值的 $\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}z$

其主值是单值的 $\ln z=\ln|z|+i\arg z$

则其他分支 $\mathrm{Ln}z=\ln z+i\cdot 2k\pi$, $k\in Z$

性质:1) $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2$ $\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2$

理解:以上两式中每一式右端的对数取其一个分支所确定的值,左端也一定有一个分支的值与之相等

2) 解析性:对$\mathrm{Ln}z$的每一个分支$(\mathrm{Ln}z)_k=\ln z+i2k\pi$,在复平面上除去原点和负实轴的单连通域

$\begin{cases}|z|>0\\-\pi<\arg z<\pi\end{cases}$内解析,且$(\mathrm{Ln}z)_k'=\frac{1}{z}$

3) 一般地,$\mathrm{Ln}z^n=n\,\mathrm{Ln}z$不成立 4) 多值函数以不解析,因为"增量之比"无意义

3.幂函数

定义:$z\neq 0, a\in C$ $w=z^a=e^{a\mathrm{Ln}z}=e^{a\ln z}e^{a(2k\pi i)}$

特殊情况 1) $a\in Z_+$, $n\in Z_+$ $w=z^n=e^{n\ln z}(e^{2k\pi i})^n=e^{n\ln z}$,即z的n次幂,是单值的

2) $a\in Z_-$, $n\in Z_+$, $w=z^{-n}=e^{-n\ln z}=\frac{1}{e^{n\ln z}}=\frac{1}{z^n}$

3) $a=0$, $w=z^0=e^{0\ln z}=1$

No.

Date

4) $a\in Q$, $a=\frac{p}{q}$ p,q为互质的整数, q>0

$z^a=z^{\frac{p}{q}}=e^{\frac{p}{q}\ln z+\frac{p}{q}i2k\pi}$

当k=0,1,2,…,q-1时,有 $e^{\frac{p}{q}i2k\pi}=(e^{i2kp\pi})^{\frac{1}{q}}$ ⇒ $z^{\frac{p}{q}}$为q值函数

5) a为其他值时, $w=z^a$为无穷多值函数

解析性 z^a的各个分支在除去原点和负实轴的复平面内是解析的

若a为整数, 则z^a在复平面上处处解析, 且

$(z^a)'=az^{a-1}$

4. 三角函数

定义 $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$ …

性质 1) 周期性 sinz、cosz 均以2π为周期, tanz以π为周期…

2) 对于实变三角函数成立的一切恒等式, 在复变三角函数的情况下自然成立

注: 不等式 不一定仍成立

3) 解析性 同实变的情况 4) 零点情况: $\sin z=0 \Rightarrow z=k\pi$ $\cos z=0\Rightarrow z=\frac{\pi}{2}+k\pi$

5. 双曲函数

定义 $shz=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$ $chz=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$ $thz=\frac{shz}{chz}$

1) 周期性 shz、chz 以2πi为周期 shz 奇函数 chz 偶函数

2) 解析性 复平面内解析, 且 $(shz)'=chz$, $(chz)'=shz$

6. 反三角函数 求法: 令 $w=\mathrm{Arcsin}z \Rightarrow z=\sin w$ 反解出w

$\mathrm{Arcsin}z=-i\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$ $\mathrm{Arccos}z=-i\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$

$\mathrm{Arctan}z=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$

7. 反双曲函数

$\mathrm{Arsh}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$ $\mathrm{Arch}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$

$\mathrm{Arth}z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}$

No.

Date

第三章 复变函数的积分

一、概念

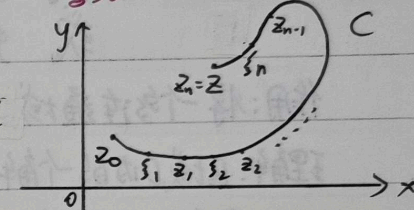
1.定义：复变函数的积分主要考虑沿复平面上的曲线的积分　分割取近似,作和求极限

设C是复平面上,以z_0为始点、z为终点的逐段光滑的有向曲线,$f(z)$在C上有定义且为单值

在C上沿由z_0到z的方向依次取n+1个分点 $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n=z$,将C分成n个小弧段,

取ξ_k是$\widehat{z_{k-1}z_k}$上任一点,$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$,作和式 $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$

则…… $f(z)$沿C的积分 $\int_C f(z)dz=\lim\limits_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k=\lim\limits_{\delta\to 0} S_n$



2.性质 ①有向性 $\int_{C^-} f(z)dz=-\int_C f(z)dz$

②线性性 $\int_C[kf(z)+bg(z)]dz=k\int_C f(z)dz+b\int_C g(z)dz$, $k,b\in C$

③可加性,若C_1的终点与C_2的始点重合,有

$$\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz=\int_{C_1\cup C_2} f(z)dz$$

④估计　设曲线C的长度为L,$f(z)$在C上可积 且$|f(z)|\le M$,则

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\le\int_C |f(z)|ds\le ML$$

3.可积的充分条件　连续必可积

4.积分的计算 对一般连续函数给出的

设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在曲线C上连续,则　　记忆：$\int_C f(z)dz=\int_C (u+iv)(dx+idy)$　其中,$dz=z_x dx+z_y dy=dx+idy$

$$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy$$

若曲线C可由参数方程给出：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$　$t:a\to b$　$z(t)=x(t)+iy(t)$　$z'(t)=x'(t)+iy'(t)$

则 $\int_C f(z)dz=\int_a^b f[z(t)]z'(t)dt$

其中a、b分别为曲线C的起点、终点对应的参数

另：若曲线C可写成 $y=g(x)$, $x:a\to b$, $z=x+ig(x)$

则 $\int_C f(z)dz=\int_a^b f[z(x)]z'(x)dx$

5.柯西积分定理　对解析函数给出的

定理：若函数$f(z)$在光滑闭曲线C上及其内部D内解析,则 $\oint_C f(z)dz=0$

或：定理：若函数$f(z)$在单连通域D内处处解析,则$f(z)$沿D内任何一条简单光滑闭曲线C的积分为零,即$\oint_C f(z)dz=0$

注：条件① D为一单连通域　② $f(z)$在D内解析
即C不能包绕奇点

No.

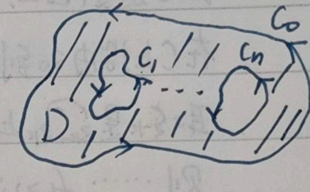
Date

6、复合闭路定理

概念：称简单光滑（或逐段光滑）闭曲线为闭路

概念：设多连通区域D的边界由n+1条闭曲线构成，其中C_0为外边界，$C_1, C_2, \cdots C_n$在C_0内部且互不相交、互不包含，此时，关于D的正向边界曲线组成复合闭路

$$C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$$



定理：设$f(z)$在以上式表示的复合闭路C上及其为边界的区域D内解析，则 $\oint_C f(z)dz = 0$

或 $\oint_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$

作用：将一个多连通域边界上的积分转换为多个单连通域边界上的积分

理解：区域D内的一个解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内的任何变形而改变积分的值——又称闭路变形定理

7、不定积分

由柯西积分定理可知：单连通域上的解析函数的积分只由积分的起点与终点决定，而与积分路径无关

固定z_0而让z在D内变动，曲线C为D内从z_0到z的任一逐段光滑曲线，记

$$F(z) = \int_C f(\zeta)d\zeta = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

定理：若$f(z)$在单连通域D内解析，则$F(z)$也在D内解析，且有 $F'(z) = f(z)$

故 $F(z)$称为$f(z)$的原函数，$F(z)+C$（C为任意常数）称为$f(z)$的不定积分

定理：若$f(z)$在单连通域D内解析，$H(z)$为$f(z)$的一个原函数，则

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = H(z) - H(z_0) \triangleq H(z)\Big|_{z_0}^{z}$$

8、柯西积分公式

定理：设$f(z)$在闭路C上及其内部D内是解析的，z_0是D内任意一点，则

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

理解：① 对于解析函数，若知道了其在区域边界上的值，通过上述积分，就能确定区域内部的点的值

② 对于两个解析函数，若在区域边界上的值处处相等，则它们在整个区域上恒等

注：该公式即留数基本定理中 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i \, Res\left[\frac{f(z)}{z-z_0}, z_0\right] = 2\pi i \lim_{z\to z_0} f(z) = 2\pi i f(z_0)$

9.高阶导数公式

定理：若$f(z)$在闭路C上及其所围成的单连通域D内是解析的，则：

在D内任一点z_0，$f(z)$有任意阶导数；且在D内，下式恒成立

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = 2\pi i\,Res\left[\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}, z_0\right] = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

理解：解析函数的导数仍是解析函数……

注：①对上述两个公式，推广到多连通区域，在前式所给出的复合闭路C上仍成立

其中$C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-$

②对于D内任一点z，上述两个公式也可写成

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = 2\pi i f(z)$$

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z)$$

10.平均值公式

设C为以z_0为圆心，R为半径的圆周，设$f(z)$在C上及内部解析　$C: z=z_0+Re^{i\theta}\ (0\le\theta\le 2\pi)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})d\theta$$

即解析函数$f(z)$在一点的值，等于它在以该点为圆心的圆周上的值的平均值

11.柯西不等式

设M是$|f(z)|$在上述圆周C上的上界，有

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\oint_C \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}ds \le \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}\oint_C ds = \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R = \frac{n!M}{R^n}$$

特别当$n=1$时，$|f'(z_0)|\le\frac{M}{R}$

定理：若函数$f(z)$在z平面上解析且有界，则$f(z)$为一常数

由柯西不等式，R可取任取正数，令$R\to\infty$，有$\forall z_0\in C$，$|f'(z_0)|=0 \Rightarrow f(z)$为常数

注：为何解析函数$f(z)$有$f'(z)=0$则$f(z)$为常数？

$\because f(z) = u_x + iv_x = \cdots = 0 \Rightarrow u_x=u_y=v_x=v_y=0 \Rightarrow u、v$为常数$\Rightarrow f(z)$为复常数

第四章 级数

一、复变函数项级数

1.复数序列

定义：一列无穷多个有序复数 $z_1、z_2、\cdots、z_n\cdots \Rightarrow \{z_n\}$

收敛定义：给定一个复数序列 $\{z_n\}$ 和复常数 $z_0=a+ib$，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n\geq N$ 时，恒有

$$|z_n-z_0|<\varepsilon$$

则称 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$ 或 $z_n\to z_0$，$n\to+\infty$

定理：给定一个复数序列 $\{z_n\}$，其中 $z_n=a_n+ib_n$，$n=1,2,\cdots$ $z_0=a+ib$

$$\lim_{n\to\infty} z_n=z_0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=a \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} b_n=b$$

2.复数项级数

定义：给定一个复数序列 $\{z_n\}$，复数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n=z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots$

定义：部分和 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} z_i=z_1+z_2+\cdots+z_n$，n取自然数得部分和序列 $\{S_n\}=\{S_1,S_2,\cdots\}$

定义：若 $\{S_n\}$ 有极限，则称复数项级数收敛，记为 $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$，称 S 为级数的和

定理：给定 $\{z_n\}$，$z_n=a_n+ib_n$，$n=1,2,\cdots$ 考查复数项级数的敛散性 $\Leftrightarrow$ 考查部分和数列的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n、\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 同时收敛}$$

定理：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$ 注意 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ 的区别！

定义：对给定的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$，若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$（$z_n$ 的模构成的级数）收敛，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 发散，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛

定理：绝对收敛的级数必收敛

3.复变函数项级数

定义：给定一个复变函数序列 $\{f_n(z)\}$，复变函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$

取定 z_0，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 成为一复数项级数，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛，则称 z_0 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的收敛点，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的收敛点的全体称为收敛域 D

记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 的部分和 $S_n(z)=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)$

在收敛域 D 上，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 有和函数 $S(z)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$，$z\in D$

No.

Date

定义：给定 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$，其中 $f_n(z)$ $n=1,2,\cdots$ 均定义在集合E上，若对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N=N(\varepsilon)$

（即N只与 ε 有关而与z无关）当 $n>N$ 时，有 $|S(z)-S_n(z)|<\varepsilon$ 在E上恒成立

则称 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在E上一致收敛于和函数 $S_n(z)$

定理：一致收敛 ⇒ 逐点收敛

定理（控制判别法）：若 $f_n(z)$，$n=1,2,\cdots$ 均定义在集合E上，且有不等式 $|f_n(z)|\le M_n$ $n=1,2,\cdots$ 成立，若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在E上一致收敛

定理：若 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在D内一致收敛于和函数 $S(z)$，且有在D内：

$f_n(z)$ 连续 ⇒ $S(z)$ 连续

$f_n(z)$ 可积 ⇒ $S(z)$ 可积 且 $\int_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(z)dz$ 即可逐项积分

$f_n(z)$ 解析 ⇒ $S(z)$ 解析 且 $\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right]^{(p)}=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z)$ 即可逐项求导

二、幂级数

1、概念 $f_n(z)=a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$

令 $z_0=0$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$ (*)

其中 z_0 和 a_n，$(n=0,1,2,\cdots)$ 均为复常数

幂级数只有正幂项，无z的负幂项

2、定理

阿贝尔定理：(1) 若级数(*)在 $z_0\neq0$ 处收敛，则在原点为心，$|z_0|$ 为半径的圆周的内部收敛且绝对收敛；在所有半径小于 $|z_0|$ 的闭圆盘上一致收敛

(2) 若级数(*)在 $z_0\neq0$ 处发散，则在满足 $|z|>|z_0|$ 的所有点z处都发散

⇒ 幂级数有收敛半径 $R(0\le R\le+\infty)$，和一收敛圆

当 $0<R<+\infty$ 时，幂级数在收敛圆内部绝对收敛，圆外部发散，圆上不一定

3、幂级数收敛半径的求法：

对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$，检比法 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$ 检根法 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$

则其收敛半径为 $R=\begin{cases}+\infty & \rho=0\\ \frac{1}{\rho} & 0<\rho<+\infty\\ 0 & \rho=+\infty\end{cases}$

注：若幂级数不是标准形式，则用一般的比值、根值审敛法求收敛半径

Campus

psp_dada

No.

Date

3、幂级数的和函数的性质　　注：$R=0$的幂级数不收敛于一个解析函数

定理：设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$的$R>0$，则它的和函数$S(z)$在收敛圆盘$|z|<R$内：

解析且　$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right]^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n)^{(p)}$

可积，且　$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C a_n z^n dz$

4、幂级数的运算

加减法　$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \pm \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n$

乘法　柯西乘积　说白了就是从低次到高次找出z^n的系数，和并成$a_0, a_1, \cdots$

除法　长除法　注意，$\frac{a}{b} \Rightarrow b \overline{)\,a}$

三、泰勒级数

上面已经证明了，任一幂级数的和函数在其收敛圆盘内解析，下面证明其反面：

任一在圆域内解析的函数都可以用幂级数—泰勒级数来表示

1、泰勒展开定理

用于计算　　用于证明

设$f(x)$在$D=\delta(z_0,R)$内解析，则在D内，有　$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots$$

称上式为$f(z)$在z_0附近的泰勒展开式，称右端为$f(z)$在点z_0的泰勒级数

麦克劳林展开：$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + f'(0) z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \cdots \quad |z|<R$

2、定理：函数$f(z)$在点z_0解析 $\Longleftrightarrow$ $f(z)$在z_0附近可用幂级数表示

且此幂级数必是泰勒级数

即解析函数的幂级数展开是唯一的

3、泰勒展式的求法

工具：逐项积分、逐项求导、利用幂级数的运算

直接法：利用泰勒展开式，只需求$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$　$n=1,2,\cdots$

间接法：待定系数法（由于泰勒系数是唯一的）、级数代入法（求$F(g(x))$的展开式）

泰勒级数的注意事项

1、要写完整，包括成立区域$|z-z_0|<R$和省略号……

2、若没法写出通项的，只需写到x的4~5次方项

KOKUYO

No.

Date

四、洛朗级数

1.定义：称形如 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ 的级数为洛朗级数，其中 z_0、a_n，$n=0,\pm1,\pm2\cdots$ 为复常数

洛朗级数是幂级数的推广，包含了正、负幂项

洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$

正幂项：解析部分 $= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$

负幂项：主要部分 $+ a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + \cdots + a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \cdots$

2、定理：若洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 有收敛域，则该域必为某一圆环域 D：$R_1<|z-z_0|<R_2$，($0\le R_1<R_2\le+\infty$)，且级数在 D 内绝对收敛，在闭圆环 D'：$R_1'\le|z-z_0|\le R_2'$，($R_1<R_1'<R_2'<R_2$) 上一致收敛，且其和函数在 D 内解析、可以逐项积分，逐项求导

$\forall$ 曲线 $\Gamma\subset D$，$\int_\Gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_\Gamma a_n(z-z_0)^n dz$

$$\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right]' = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[a_n(z-z_0)^n\right]'$$

例题：求洛朗级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛圆环域

Step 1. 确定两个部分是在同一点展开

Step 2. 注意 检比法和根值法求出来的是负：内圆周半径需要取倒数

故 外圆周：$R_2 = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}}$

内圆周：$R_1 = \left[\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{-n}}\right)^{-1}\right]^{-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_{-n}}$

收敛圆环域 $R_1<|z|<R_2$

3.洛朗展开定理

若函数 $f(z)$ 在圆环域 D：$R_1<|z-z_0|<R_2$ ($0\le R_1<R_2\le+\infty$) 内解析，则

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 其中 $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$，$n=0,\pm1\cdots$ C 为任意圆周 $|z-z_0|=R$，$R_1<R<R_2$

用于证明，不用于计算

且上述展开式是唯一的

4.洛朗展开式的求法

间接法：利用洛朗展开式的唯一性 分两类题型

① 求有理函数的洛朗展开式：裂开 → 利用几何级数 $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+\cdots$ $|z|<1$

注：i 注意几何级数的成立范围 $|z|<1$

ii 在圆环域 $a<|z-z_0|<b$ 展开，即展开后与 z 有关的必为 $(z-z_0)$

同时需通过提出常数或提出 $(z-z_0)^n$ 使得待展开式满足几何级数成立范围

例：将以下有理复变函数在指定圆环域内展开成洛朗级数

(1) $\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$，　$1<|z|<2$

$\frac{1}{(z^2+1)(z-2)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{z}{z^2+1}-\frac{2}{z^2+1}\right)=\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}-\frac{2}{z^2}\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}\right)$ 其中：$|\frac{z}{2}|<1$，$|\frac{1}{z^2}|<1$，可用几何级数

$=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n-\frac{2}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{5\cdot 2^{n+1}}\right)z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5}\frac{1}{z^{2n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{5}\frac{1}{z^{2n+2}}$

(2) $\frac{1}{z(z+2)^3}$，　$0<|z+2|<2$

$\frac{1}{z(z+2)^3}=(z+2)^{-3}\frac{1}{z}=(z+2)^{-3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-\frac{z+2}{2}}=-\frac{1}{2}(z+2)^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^{n-3}}{2^{n+1}}$　　$\underline{0<|z+2|<2}$

要写上

含z的均为z+2的形式，已是该形式的则不必处理

(3) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$　① $1<|z|<2$　② $2<|z|<+\infty$　① $0<|z-1|<1$　④ $1<|z-1|<+\infty$

⑤ $0<|z-2|<1$　⑥ $1<|z-2|<+\infty$

$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$

① $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\cdots$　其中 $|\frac{z}{2}|<1$，$|\frac{1}{z}|<1$

② $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\cdots$　其中 $|\frac{2}{z}|<1$

③ $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{1-(z-1)}-\frac{1}{z-1}=\cdots$　其中 $|z-1|<1$

④ $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}-\frac{1}{z-1}=\cdots$　其中 $|\frac{1}{z-1}|<1$

⑤ $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{1+z-2}=\cdots$　其中 $|z-2|<1$

⑥ $\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=\cdots$　其中 $|\frac{1}{z-2}|<1$

② 其他初等函数 ⇒ 同求泰勒级数的间接法

No.

Date

常用麦克劳林展开式

1、 $e^{z}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^{2}}{2!}+\cdots+\frac{z^{n}}{n!}+\cdots \quad |z|<+\infty$

2、 $\sin z=z-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}-\frac{z^{7}}{7!}+\cdots+(-1)^{m}\frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}+\cdots \quad |z|<+\infty$

3、 $\cos z=1-\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}-\frac{z^{6}}{6!}+\cdots+(-1)^{m}\frac{z^{2m}}{(2m)!}+\cdots \quad |z|<+\infty$

4、 $\ln(1+z)=z-\frac{z^{2}}{2}+\frac{z^{3}}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{n}}{n}+\cdots, \quad |z|<1$

5、 $\frac{1}{1-z}=1+z+z^{2}+\cdots+z^{n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n} \quad |z|<1$

6、 $\frac{1}{1+z}=1-z+z^{2}-\cdots+(-1)^{n}z^{n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}z^{n} \quad |z|<1$

psp_dada

No.

Date

第五章 留数

一、孤立奇点

1. 奇点：若$f(z)$在点z_0处不解析，且在z_0的任一邻域内，总有若干个使$f(z)$解析的点，则称z_0为$f(z)$的奇点 eg.（解析）→ 奇点

2. 孤立奇点：若z_0为$f(z)$的奇点，且$\exists\delta>0$，使$f(z)$在去心圆域$D: 0<|z-z_0|<\delta$内处处解析，则称z_0为$f(z)$的孤立奇点 eg. $e^{\frac{1}{z}}$，$z_0=0$ $\frac{1}{z(z-1)}$ $z_0=0,1$

注：不是所有奇点都是孤立的 eg. $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$，$z_0=0$不孤立，因为$\frac{1}{z}=k\pi \Rightarrow z=\frac{1}{k\pi}\to 0$，$k\to\infty$

3. 孤立奇点的分类：

设z_0为$f(z)$的孤立奇点，在$D: 0<|z-z_0|<\delta$内将$f(z)$展开为洛朗级数

$$f(z)=\cdots+a_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots \quad z\in D$$

(1) 可去奇点：没有主要部分，即$a_{-1},a_{-2},\cdots,a_{-m},\cdots$均为零

(2) m阶极点：只有有限个$(z-z_0)$的负幂项的系数非零，且最高幂为$(z-z_0)^{-m}$，即

$$f(z)=a_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots \quad (m\geq1, a_{-m}\neq0)$$

(3) 本性奇点：有无穷多个$(z-z_0)$的负幂项系数非零 eg. $e^{\frac{1}{z}}$、$\cos\frac{1}{z}$、$\sin\frac{1}{z}$的$z=0\Rightarrow$本性

即：$f(z)=\cdots+a_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots \quad z\in D$

本性奇点↑…… ↑m阶极点…… ↑可去奇点……

4. 性质

(1) 可去奇点：z_0，$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a_0$，若定义$f(z_0)=a_0$，则在圆$|z-z_0|<\delta$内，$f(z)$解析

(2) m阶极点：设$f(z)$在$D: 0<|z-z_0|<\delta$内解析，则z_0是$f(z)$的m阶极点

$\Leftrightarrow f(z)$在D内可表示成$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$

其中$g(z)$在$|z-z_0|<\delta$解析且$g(z_0)\neq0$

5. 解析函数在有限孤立奇点的性质

z_0是$f(z)$的何种奇点：完全取决于$z\to z_0$时$f(z)$的变化情况

定理：设$f(z)$在$0<|z-z_0|<\delta$ $(0<\delta\leq+\infty)$内解析，则

z_0（或∞）是$f(z)$的可去奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0}f(z)$存在

极点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$ （或$\lim\limits_{z\to\infty}$）

本性奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0}f(z)$不存在，也不为无穷大

注：用极限无法判断极点的阶数

KOKUYO

6、解析函数的零点

定义：设 $f(z)$ 在 $D:|z-z_0|<\delta$ 内解析，且 $f(z_0)=0$，则称 z_0 为解析函数 $f(z)$ 的一个零点

定义：若解析函数 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，$\varphi(z)$ 解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$，

则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点

注：不恒为0的解析函数的零点一定是孤立的

判定定理：若 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点

$$\Longleftrightarrow f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0)\neq 0$$

性质：若 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 阶零点、$g(z)$ 的 n 阶零点，则

$$\begin{cases} f(z)=(z-z_0)^m\varphi_1(z) & \varphi_1(z_0)\neq 0 \\ g(z)=(z-z_0)^n\varphi_2(z) & \varphi_2(z_0)\neq 0 \end{cases}$$

$z=z_0$ 为 $f(z)g(z)$ 的 $(m+n)$ 阶零点

为 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的 $\begin{cases} \text{可去奇点} & m\geq n \\ (n-m)\text{阶极点} & m<n \end{cases}$

用法：遇到 $\frac{f(z)}{g(z)}$，可先分别讨论 $f(z)$ 和 $g(z)$，再用性质

7. 解析函数的零点与极点的关系

定理 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点 $\Longleftrightarrow$ $z=z_0$ 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点

8、解析函数在无穷孤立奇点的性质

定义：若 $f(z)$ 在域 $D: R<|z|<+\infty$，$(R>0)$ 内解析，则称 ∞ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点

规定：作变换 $t=\frac{1}{z}$，令 $\varphi(t)=f(\frac{1}{t})$，若 $t=0$ 是 $\varphi(t)$ 的可去奇点、m 阶极点、本性奇点

则 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点、m 阶极点、本性奇点

注：若 $t=0$ 不是 $\varphi(t)$ 的孤立奇点，则 $z=\infty$ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点 eg. $f(z)=\frac{1}{(\sin\pi z)^3}$

一切 ∞ 倒代换成 0 去讨论

例：求 $f(z)=\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 的所有奇点

① 分母 令 $\sin\pi z=0 \Rightarrow z=k\ (k=0,\pm1,\cdots)$ $\sin\pi z|_{z=k}=0$，$(\sin\pi z)'|_{z=k}\neq 0 \Rightarrow$ 1阶零点 $\Rightarrow$ 分母的3阶

② 分子 $z=1$ 1阶 $z=-1$ 1阶 $z=2$ 3阶零点

$\Rightarrow$ $z=1,-1$ 时 $\frac{1\text{阶}}{3\text{阶}} \Rightarrow$ 2阶极点 $z=2$ $\frac{3\text{阶}}{3\text{阶}} \Rightarrow$ 可去奇点 $z=k\ (k\neq\pm1,2) \Rightarrow$ 3阶极点

③ 无穷远点：$f(\frac{1}{t})=\frac{(\frac{1}{t^2}-1)(\frac{1}{t}-2)^3}{\sin(\frac{\pi}{t})^3}=\frac{(1-t^2)(1-2t)^3}{t^5\sin(\frac{\pi}{t})^3}$ $\sin\frac{\pi}{t}=0$ $t=\frac{1}{n}\to 0$，0不是孤立奇点

从而 ∞ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点

注意：求所有孤立奇点时要考虑无穷远点

注：无穷远点不是孤立奇点的情况 $\begin{cases} \text{① 分母含 } \sin z\text{、}\tan z\text{、}1+e^z\text{，则 } \infty \text{ 是孤立奇点的极限点} \\ \text{② 含 } \ln(1+z)\text{，函数在负实轴上不解析} \end{cases}$

二、留数

1、有限孤立奇点处留数的定义

设函数 $f(z)$ 在 $D: 0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则

$f(z)$ 在孤立奇点 z_0 处的留数为 $Res[f(z),z_0] \triangleq \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = a_{-1}$

其中：C 为 D 内且围绕 z_0 的任一条正向简单闭曲线

a_{-1} 为 $f(z)$ 在 z_0 处洛朗级数的项 $\frac{1}{z-z_0}$ 的系数

2、留数计算规则

①可去奇点处 $a_{-1}=0$ 留数为0

②本性奇点处 展开后取 a_{-1}

③极点处 i 展开后取 a_{-1}

ii z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点，则 $Res[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

iii z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，则 $Res[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)}\Big|_{z=z_0}$

注：该公式与高阶导数公式无区别

对 $f(z)$，z_0 为其 m 阶极点，则 $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$，$\varphi(z)$ 解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$

有 $\oint_C f(z)dz=\oint_C \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}dz = 2\pi i\frac{1}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(z)\Big|_{z=z_0} = 2\pi i\frac{1}{(m-1)!}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)}\Big|_{z=z_0} = 2\pi i\cdot a_{-1}$

注：$[(z-z_0)^m f(z)]^{m-1}\Big|_{z=z_0}$ 指 $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$

iv. 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$、$Q(z)$ 在 z_0 处解析，且 $P(z_0)\neq 0$，$Q(z_0)=0$，$Q'(z_0)\neq 0$，则

z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点，且有 $Res[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

3.留数基本定理

设 C 为一条正向简单闭曲线，函数 $f(z)$ 在C上及内部D除去有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外处处解析，

则 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res[f(z),z_k]$

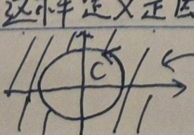
4.无穷孤立奇点处留数的定义

设函数 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则

$f(z)$ 在 ∞ 处的留数为 $Res[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz = -a_{-1}$

其中：C 为 D 内且围绕原点的任一正向简单闭曲线

这样定义是因为「闭曲线的正向」与「无穷远点邻域的正向」是反向的



无穷远点的邻域

No.

Date

5、推广的留数基本定理

函数 $f(z)$ 在扩充复平面 $C\cup\{\infty\}$ 内只有有限个孤立奇点，则

$f(z)$ 在各孤立奇点（包括 ∞）处的留数之和为零

作用：若要算 $\oint_C f(z)dz$ 但 C内部奇点太多难以计算，则可以转换到 ∞ 的留数去计算

6、无穷孤立奇点处留数的计算

$$Res[f(z),\infty]=Res[-\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0]$$

注：求无穷孤立奇点处留数的方法

① 将 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 处展开，$Res[f(z),\infty]=-a_{-1}$

② 将 ∞ 处的留数用公式转化为 0处的留数计算

③ 先求出 $f(z)$ 其余所有孤立奇点处留数，再用推广的留数基本定理

注：若 $z=\infty$ 是解析函数 $f(z)$ 的可去奇点：$Res[f(z),\infty]$ 不一定为0

洛朗级数无正次幂项

7.利用留数基本定理计算实函数的积分

(1) $\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ 或 $\int_{-\pi}^{\pi}$

令 $z=e^{i\theta}$，则 $\int_0^{2\pi}\to\oint_{|z|=1}$，$\cos\theta=\frac{1}{2z}(z^2+1)$，$\sin\theta=\frac{1}{2iz}(z^2-1)$，$d\theta=\frac{1}{iz}dz$，将 θ 全换成 z，有

$$\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta=\oint_{|z|=1}F(z)dz=2\pi i\sum_k Res[f(z),z_k]$$

其中 $z=z_k$ 是 $F(z)$ 在圆 $|z|=1$ 内部的极点

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_k Res[R(z),z_k]$

其中 $R(z)$ 是 $R(x)$ 的扩充，$z=z_k$ 是 $R(z)$ 在上半平面 $Im\,z>0$ 的极点

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx=2\pi i\sum_k Res[R(z)e^{iaz},z_k]$ $(a>0)$

其中 $R(z)e^{iaz}$ 是 $R(x)e^{iax}$ 的扩充，$z=z_k$ 是 $R(z)e^{iaz}$ 在上半平面 $Im\,z>0$ 的极点、

注：$\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos ax\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,Re[e^{iax}]dx=Re[\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx]$；$\sin ax$ 同理

注：若为半无穷区域 $\int_0^{+\infty}$ 或 $\int_{-\infty}^{0}$，先用奇偶性

No.

Date

第六章 傅里叶变换

一、积分变换

定义：通过积分运算把属于某函数类A的函数$f(t)$，通过含参变量τ的积分

$$F(\tau)=\int_a^b f(t)K(t,\tau)dt$$

变为另一函数类B中的函数$F(\tau)$，则$f(t)$称像原函数，$F(\tau)$称像函数

$K(t,\tau)$是一个给定的二元函数，称该积分变换的核

当选取不同的积分域与核函数时，得到不同的积分变换

二、傅里叶变换

1. Fourier 积分定理

若定义在$(-\infty,+\infty)$上的$f(t)$满足

i) Dirichlet条件：$f(t)$在任一有限区间内除去有限个第一类间断点外处处连续，且$f(t)$仅有有限个极值点

ii) 绝对可积条件：$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<+\infty$

则$f(t)$的傅里叶积分收敛，且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-iw\tau}d\tau\right]e^{iwt}dw=\begin{cases}f(t), & t\text{为}f(t)\text{连续点}\\ \frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)], & t\text{为}f(t)\text{第一类间断点}\end{cases}$$

2. Fourier变换

若$f(t)$满足上述两个条件则称 $F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iwt}dt$

为$f(t)$的Fourier变换，记作$F(w)=\mathscr{F}[f(t)]$

称（略去间断点） $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{iwt}dw$

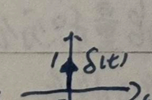
为$F(w)$的Fourier逆变换，记作$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(w)]$

注：t与w均为实变量，$f(t)$是实函数，$F(w)$一般是复函数

t：时间，w：频率：$f(t)$：时域 $\longrightarrow$ $F(w)$：频域

3. 单位脉冲函数 $\delta(t)$

定义：$\delta(t)$满足 $\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$ 图像：



同理，$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\neq t_0\\ \infty & t=t_0\end{cases}$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)dt=1$

No.

Date

4.单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的性质

1) 筛选性质：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$ 即 $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$ 即 $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$

2) 坐标放缩性质：$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$

3) 高阶导数：定义：$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t)f(t)dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f^{(n)}(t)dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)f(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f'(t)dt = -f'(0)$

性质：$\delta^{(n)}(-t) = (-1)^n\delta^{(n)}(t)$

说明 $\delta(t)$ 是偶函数，$\delta'(t)$ 是奇函数 …

5. Fourier 变换的性质

1) 线性性 正：$\mathcal{F}[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1\mathcal{F}[f_1(t)] + k_2\mathcal{F}[f_2(t)]$

负：$\mathcal{F}^{-1}[k_1 F_1(w) + k_2 F_2(w)] = k_1\mathcal{F}^{-1}[F_1(w)] + k_2\mathcal{F}^{-1}[F_2(w)]$

2. 对称性 若 $F(w) = \mathcal{F}[f(t)]$，则 $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-w)$ $\mathcal{F}[F(-t)] = 2\pi f(w)$

3. 翻转性 若 $F(w) = \mathcal{F}[f(t)]$，则 $F(-w) = \mathcal{F}[f(-t)]$

4. 位移性 若 $F(w) = \mathcal{F}[f(t)]$ $f(t) \longleftrightarrow F(w)$

则 $\mathcal{F}[f(t\pm t_0)] = e^{\pm iwt_0}F(w)$ $f(t+t_0) \longleftrightarrow e^{jwt_0}F(w)$

$\mathcal{F}^{-1}[F(w\pm w_0)] = e^{\mp iw_0 t}f(t)$ $e^{-iw_0 t}f(t) \longleftrightarrow F(w+w_0)$

一侧平移、另一侧乘因子；时移同正负、频移符号反

5. 坐标放缩性质：设 $\mathcal{F}[f(t)] = F(w)$，$a\in R$，$a\neq 0$，则

$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})$

6. 乘积定理 设 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(w)$，$\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(w)$ 则

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(w)}F_2(w)dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_2(w)}F_1(w)dw$

$\Rightarrow$ 能量积分公式 $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(w)|^2 dw$

7. 微分性质 $\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (iw)^n F(w)$ $\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(w)] = (-it)^n f(t)$

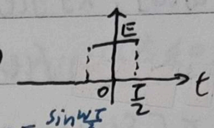
8. 积分性质 $\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau] = \frac{F(w)}{iw} + \pi F(0)\delta(w)$

No.

Date

常用傅氏变换对

1. 单个方形脉冲函数 $M(t)=\begin{cases} E & |t|<\frac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2} \end{cases}$ $(E,\tau>0)$



$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} M(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E(\cos\omega t-i\sin\omega t)dt=2E\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}$

① $M(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} \frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}$

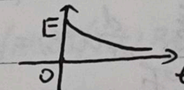
$M(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}\cos\omega t\,d\omega$

令 $t=0$, $\tau=2$, $M(0)=E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2E}{\omega}\sin\omega d\omega \Rightarrow$ Dirichlet 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\pi$

常用: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega=\begin{cases}\pi & t>0 \\ -\pi & t<0\end{cases}$

注: 两个技巧: ① 对称性 & 偶倍奇零 ② $f(t)$ 是实函数, 不能含有 i

2、指数衰减函数 $E(t)=\begin{cases} Ee^{-\beta t} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ $(E,\beta>0)$

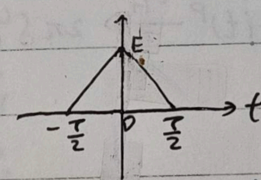


$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}E(t)e^{-i\omega t}dt=\int_0^{+\infty}Ee^{-(\beta+i\omega)t}dt=\frac{E}{\beta+i\omega}$

② $E(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} \frac{E}{\beta+i\omega}$ 即 $e^{-\beta t} \longleftrightarrow \frac{1}{\beta+i\omega}$

3、单个三角脉冲函数

$T(t)=\begin{cases} \frac{2E}{\tau}(t+\frac{\tau}{2}) & -\frac{\tau}{2}<t<0 \\ -\frac{2E}{\tau}(t-\frac{\tau}{2}) & 0<t<\frac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2} \end{cases}$



$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{\text{偶}}{T(t)}e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=2\int_0^{\frac{\tau}{2}}[-\frac{2E}{\tau}(t-\frac{\tau}{2})\cos\omega t]dt \overset{\text{分部积分}}{=\!=\!=} \cdots$

③ $T(t) \rightleftharpoons \frac{8E}{\tau\omega^2}\sin^2\frac{\omega\tau}{4}$

4. $f(t)=e^{-\beta|t|}$

$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta|t|}e^{-i\omega t}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\cos\omega t\,dt \overset{\text{分部积分}}{=\!=\!=} \cdots$

④ $e^{-\beta|t|} \rightleftharpoons \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$ 常与对称性质一起使用: $\mathcal{F}[\frac{2\beta}{\beta^2+t^2}]=2\pi e^{-\beta|\omega|}$

5. 钟形脉冲函数 $f(t)=Ee^{-\beta t^2}$

⑤ $Ee^{-\beta t^2} \rightleftharpoons Ee^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}$

⑥ $\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$ $\quad \delta(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i\omega t_0}$

⑦ $1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$ $\quad e^{i\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t\,dt=2\pi\delta(\omega)$

KOKUYO

No.

Date

⑧、若 $F(w)=\mathscr{F}[f(t)]$，则 $f(t)\cos w_0 t \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{2}[F(w+w_0)+F(w-w_0)]$

$f(t)\sin w_0 t \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{i}{2}[F(w+w_0)-F(w-w_0)]$

⑨ $\cos w_0 t \xrightarrow{\mathscr{F}} \pi[\delta(w+w_0)+\delta(w-w_0)]$

$\sin w_0 t \xrightarrow{\mathscr{F}} i\pi[\delta(w+w_0)-\delta(w-w_0)]$

10、符号函数 $\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}-1 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$

⑩ $\operatorname{sgn}(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{2}{iw}$

$\mathscr{F}^{-1}[\frac{2}{iw}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{iw}e^{iwt}dw=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{iw}(\cos wt+i\sin wt)dw=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin wt}{w}dw=\operatorname{sgn}(t)$

11.单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$

$u(t)$ 有性质：$\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$，$\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=u(t)$

⑪ $u(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \pi\delta(w)+\frac{1}{iw}$

⑫ $\delta^{(p)}(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} (iw)^p$　　$\delta^{(p)}(t-t_0) \xrightarrow{\mathscr{F}} (iw)^p e^{-iwt_0}$

⑬ $(-it)^p \xrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi\delta^{(p)}(w)$　　$(-it)^p e^{iw_0 t} \xrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi\delta^{(p)}(w-w_0)$

其它题目

1. 设 $F(w)=\mathscr{F}[f(t)]$，求 $\mathscr{F}[f(at-t_0)]$

法一：$f(t) \xrightarrow{\text{位移}} f(t-t_0) \xrightarrow{\text{相似}} f(at-t_0)$

$F(w)$　　$e^{-iwt_0}F(w)$　　$\frac{1}{|a|}e^{-i\frac{w}{a}t_0}F(\frac{w}{a})$

法二：$f(t) \xrightarrow{\text{相似}} f(at) \xrightarrow{\text{位移}} f(at-t_0)$

$F(w)$　　$\frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})$　　$\frac{1}{|a|}e^{-iw\frac{t_0}{a}}F(\frac{w}{a})$

2. 求积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$

由 $f(t)=\begin{cases}E, & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$，$\mathscr{F}[f(t)]=\frac{2E}{w}\sin\frac{w\tau}{2}$ 知

$E^2\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(w)|^2dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4E^2}{w^2}\sin^2\frac{w\tau}{2}dw$　令 $\tau=2$，

得 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4E^2}{w^2}\sin^2 w\,dw=2E^2 \Rightarrow I=\pi$

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt=\pi$

3. 设 $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$，求 $\mathscr{F}[f(t)]$

解：由于 $\mathscr{F}[e^{-|t|}]=\frac{2}{1+w^2}$ 故由对称性质，$\mathscr{F}[\frac{2}{1+t^2}]=2\pi e^{-|w|}$ 从而 $\mathscr{F}[f(t)]=\pi e^{-|w|}$

Campus

No.

Date

§ 卷积

1. 定义：函数 $f_1(t), f_2(t)$ 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上，则 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积是如下一个函数

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$$

记作 $g(t)=f_1(t)*f_2(t)$

2. 卷积运算过程

(1) 对 $f_1(t)$，只需将自变量 t 换成 τ

(2) 对 $f_2(t)$，先翻转后平移

(3) 对任一给定的 t 值，乘积 $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$ 是 τ 的函数，画出 $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$ 的图像

(4) 求出 $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$ 曲线下的面积，是卷积 $g(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 对于给定 t 的函数值

3. 卷积的性质

(1) 交换性质 $f_1*f_2=f_2*f_1$

(2) 结合性 $[f_1*f_2]*f_3=f_1*[f_2*f_3]$

(3) 线性性 $[k_1f_1*k_2f_2]*f_3=k_1f_1*f_3+k_2f_2*f_3$

(4) 微分性质 $\frac{d}{dt}[f_1*f_2]=f_1*\frac{d}{dt}f_2=\frac{d}{dt}f_1*f_2$

(5) 积分性质 $\int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)*f_2(\tau)d\tau=[\int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)d\tau]*f_2(t)=f_1(t)*[\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)d\tau]$

4. 卷积定理

若函数 $f_1(t), f_2(t)$，记 $F_1(w)=\mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(w)=\mathscr{F}[f_2(t)]$，则

$$f_1(t)*f_2(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} F_1(w)\cdot F_2(w)$$

$$f_1(t)\cdot f_2(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{2\pi} F_1(w)*F_2(w)$$

5. 其他性质

$f(t)*\delta(t)=f(t)$

$\delta(t)$ 为偶函数

$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=f(t)$

$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$

$f(t)*\delta^{(n)}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta^{(n)}(t-\tau)d\tau=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta^{(n)}(\tau-t)d\tau=(-1)^n(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(n)}(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=f^{(n)}(t)$

$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$

psp_dada

No.

Date

第七章 拉普拉斯变换

一、Laplace 变换的概念

1. Laplace 变换的定义

设函数 $f(t)$ 在 $t\geq0$ 有定义，积分 $F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$ （s是复参变量）对复平面上某一范围 s 收敛，则称由这个积分确定的函数

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

为 $f(t)$ 的 Laplace 变换，记作 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$

称 $f(t)$ 是 $F(s)$ 的 Laplace 逆变换，记作 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

事实上，$f(t)$ $(t\geq0)$ 的 Laplace 变换就是 $[f(t)u(t)e^{-\beta t}]$ $(\beta>0, s=\beta+i\omega)$ 的傅氏变换

2. Laplace 变换存在定理

设函数 $f(t)$ 在 $t\geq0$ 的任何有限区间内按段连续，当 $t\to+\infty$ 时，$f(t)$ 增长的速度不超过某一指数函数，即 $\exists M>0$, $c_0>0$, s.t. 在 $t\in[0,+\infty)$，有 $|f(t)|\leq Me^{c_0t}$

则在半平面 $\mathrm{Re}s>c_0$ 上 $\mathcal{L}[f(t)]$ 存在，且 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ 是 s 的解析函数

3. 定理

① 若 $\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$ 在 $s_1=\beta_1+i\omega_1$ 处收敛，则该积分在 $\mathrm{Re}s>\beta_1$ 上处处收敛，且 $F(s)$ 在 $\mathrm{Re}s>\beta_1$ 上解析

② 若 $\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$ 在 $s_2=\beta_2+i\omega_2$ 处发散，则该积分在 $\mathrm{Re}s<\beta_2$ 上处处发散

二、Laplace 变换的性质

1. 线性性 $\mathcal{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha\mathcal{L}[f_1(t)]+\beta\mathcal{L}[f_2(t)]$

$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]+\beta\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]$

2. 微分性质 若 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，则 $\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0^+)$

推广：$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0+)-\cdots-sf^{(n-2)}(0+)-f^{(n-1)}(0+)$

像函数微分性质：若 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，则 $F'(s)=\mathcal{L}[-tf(t)]$

推广：$F^{(n)}(s)=(-1)^n\mathcal{L}[t^nf(t)]$

3. 积分性质 若 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，则 $\mathcal{L}[\int_0^tf(\tau)d\tau]=\frac{F(s)}{s}$

推论 $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^{\infty}F(u)du$

令 $s\to0$，有 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^{+\infty}F(u)du$

KOKUYO

No.

Date

Laplace 变换和 Fourier 变换的延迟、位移相似性质形式一致

4. 延迟性质：若 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，则 $\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$

证：$\int_0^{+\infty}f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st}dt=\int_{t_0}^{+\infty}f(t-t_0)e^{-st}dt\xlongequal{u=t-t_0}\int_0^{+\infty}f(u)e^{-s(u+t_0)}du$

$=e^{-st_0}\int_0^{+\infty}f(u)e^{-su}du=e^{-st_0}F(s)$

5. 位移性质：若 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，则 $\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$　$a\in R$

证：$\int_0^{+\infty}e^{at}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(s-a)t}dt=F(s-a)$

6. 相似性质：若 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，则 $\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$　$a>0$

证：$\mathcal{L}[f(at)]=\int_0^{+\infty}f(at)e^{-st}dt\xlongequal{u=at}\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(u)e^{-s\frac{u}{a}}du=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

7. 初值定理：若 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ 且 $\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$ 存在有限，则

$$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$

8. 终值定理：若 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ 且 $\lim\limits_{s\to 0}sF(s)$ 存在有限，且 $sF(s)$ 的奇点全落在 s 平面的左半部分即 $\mathrm{Re}\,s<0$ 内，则

$$f(+\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s)$$

9. 卷积

由于拉氏变换中认为 $f(t)$ 在 $t<0$ 时恒为零，则拉氏变换的卷积

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

拉氏变换的卷积也满足交换律、结合律、加法分配律

定理：若 $\mathcal{L}[f_1(t)]=F_1(s)$，$\mathcal{L}[f_2(t)]=F_2(s)$，则

$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s)$$

三. Laplace 逆变换

1. 拉氏反演积分

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{st}ds\quad(t>0)$$

是从像函数 $F(s)$ 求其像原函数 $f(t)$ 的一般公式，其中积分路径是在右半平面的任一直线 $\mathrm{Re}\,s=\beta$ 上

2. Laplace 逆变换的计算

定理：若函数 $F(s)$ 的奇点为 $s_1,s_2,\cdots,s_n$，且 $F(s)$ 满足 $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$，设 $\beta>0$ 使 $\mathrm{Re}[s_k]<\beta$，

则 $f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{st}ds=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st},s_k]$

注：若在 $t_0>0$ 处 $f(t)$ 间断，则上式左边应为 $\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$

定理：若$F(s)$是有理函数，$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}$，其中$A(s)$、$B(s)$是互质多项式，$A(s)$：n次，$B(s)$：m次，且$n<m$，设$B(s)$的零点为$s_1, s_2, \cdots, s_k$，其阶数分别为$p_1, p_2, \cdots, p_k$（由代数学基本定理，$\sum p_j = m$）则有：

即$F(s)$的极点的阶数

$$f(t)=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(p_j-1)!}\lim_{s\to s_j}\frac{d^{p_j-1}}{ds^{p_j-1}}\left[(s-s_j)^{p_j}\frac{A(s)}{B(s)}e^{st}\right] \quad (t>0)$$

不要漏这个

No.

Date

常用拉氏变换

1. 单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$

$$\mathcal{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s} \quad Re[s]>0$$

① $u(t)$ 或 $1 \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \quad Re[s]>0$

2、求 $\mathcal{L}[e^{kt}]$，$k\in R$

$$\mathcal{L}[e^{kt}]=\int_0^{+\infty} e^{kt}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s-k)t}dt=-\frac{1}{s-k}e^{-(s-k)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-k},\quad Re[s]>k$$

② $e^{kt}\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s-k} \quad Re[s]>k$

3、$\sin wt$, $\cos wt$

$$\mathcal{L}[\sin wt]=\int_0^{+\infty}\sin wt\, e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2i}(e^{iwt}-e^{-iwt})e^{-st}dt=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}[e^{-(s-iw)t}-e^{-(s+iw)t}]dt$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{-e^{-(s-iw)t}}{s-iw}+\frac{e^{-(s+iw)t}}{s+iw}\right]_0^{+\infty}=\frac{w}{s^2+w^2},\quad Re[s]>0$$

③ $\sin wt\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{w}{s^2+w^2} \quad Re[s]>0$

④ $\cos wt\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{s}{s^2+w^2}$

5、设 $f(t)$ 满足 $f(t+T)=f(t)$，$T>0$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{kT}^{(k+1)T}f(t)e^{-st}dt\xlongequal{令t=u+kT}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^T f(u+kT)e^{-s(u+kT)}du$$

$$=\int_0^T f(u)e^{-su}du\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-sT})^k=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt \quad Re[s]>0$$

⑤ $f(t)=f(t+T)$ 则 $\mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt \quad Re[s]>0$

⑥ $\mathcal{L}[t^{\alpha}]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \quad Re[s]>0$

若 m 为正整数，$\mathcal{L}[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}} \quad Re[s]>0$

注：伽玛函数 $\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}x^{t-1}e^{-x}dx$，$t\in R$, $t>0$

满足：$\Gamma(1)=1$，$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$　当 n 为正整数时，$\Gamma(n)=(n-1)!$

为求有 $\delta(t)$ 的Laplace变换，修正定义为 $F(s)=\int_{0^-}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$

$$\mathcal{L}[\delta(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt=e^{-st}\Big|_{t=0}=1$$

⑦ $\delta(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}1$　平移：$\delta(t-t_0)\xrightarrow{\mathcal{L}}e^{-st_0}$

$\delta'(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}s$

No.

Date

变换常用性质对照

	Fourier	Laplace
1.线性性	$\mathscr{F}[k_1 f_1(t)+k_2 f_2(t)]=k_1\mathscr{F}[f_1(t)]+k_2\mathscr{F}[f_2(t)]$	同
	$\mathscr{F}^{-1}[k_1 F_1(w)+k_2 F_2(w)]=k_1\mathscr{F}^{-1}[F_1(w)]+k_2\mathscr{F}^{-1}[F_2(w)]$	同
2.相似性质	$f(at)\xrightarrow{\mathscr{F}}\frac{1}{\lvert a\rvert}F(\frac{w}{a})$	$f(at)\xrightarrow{\mathscr{L}}\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$ $a>0$
3.延迟性质	$f(t-t_0)\xrightarrow{\mathscr{F}}F(w)\cdot e^{-iwt_0}$	$f(t-t_0)u(t-t_0)\xrightarrow{\mathscr{L}}F(s)\cdot e^{-st_0}$
4.位移性质	$e^{iw_0t}f(t)\xrightarrow{\mathscr{F}}F(w-w_0)$	$e^{at}f(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}F(s-a)$
5.微分性质		
—像原	$f'(t)\xrightarrow{\mathscr{F}}iwF(w)$	$f'(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}sF(s)-f(0^+)$
	$f''(t)\xrightarrow{\mathscr{F}}(iw)^2F(w)$	$f''(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}s^2F(s)-sf(0^+)-f'(0^+)$
—像	$(-it)f(t)\xrightarrow{\mathscr{F}}F'(w)$	$-tf(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}F'(s)$
	$(-it)^2f(t)\xrightarrow{\mathscr{F}}F''(w)$	$(-t)^2f(t)\xrightarrow{\mathscr{L}}F''(s)$
6.积分性质		
—像原	$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\xrightarrow{\mathscr{F}}\frac{F(w)}{iw}+\pi F(0)\delta(w)$	$\int_0^t f(\tau)d\tau\xrightarrow{\mathscr{L}}\frac{F(s)}{s}$
—像		$\frac{f(t)}{t}\xrightarrow{\mathscr{L}}\int_s^{\infty}F(u)du$
		$\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^{+\infty}F(u)du$