No.

Date.

复变必背:

主幅角 $(-\pi,\pi]$

解析 $\Longleftrightarrow$ u,v 可微且 C-R条件成立 ; 定义: 某邻域内可导

C-R: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

偏导连续 $\Rightarrow$ 可微

$\sinh ix = i\sin x$ $\cosh ix = \cos x$ ~~cos ix = ...~~

$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + \mathrm{Arg}\, z$

调和函数: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 连续, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

$f=u+iv$ 解析 $\Leftrightarrow$ u, v 共轭调和

共轭调和: 满足 C-R 的调和函数 u: v

对于给定调和函数, 共轭调和唯一, f(z) 唯一 (指差一个 C)

$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

给定调和 u, $v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C$ 与路径无关

已知 u 求 v

1) ①先验证: u 调和: ②构造 $\int$

2) 解析 求 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 得 v 代入 $\frac{\partial v}{\partial x}$

若 f 在逐段有界光滑曲线 C 上连续 则 $\int_C f(z)dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$

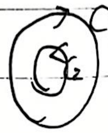
若 $\oint_C f\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt$, 换元

$\left|\oint_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|\,ds \le ML$ $ds = |z'(t)|dt$

$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$

若f在D及简单光滑闭曲线$\partial D$上解析（充分不必要）则 $\oint_C f(z)dz=0$

$\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)dz$ . $\oint_{\Gamma} f(z)dz$, $\Gamma=C\cup C_1^-\cup\dots\cup C_n^-$



f 在 $\int_{C_1} f(z)dz=\int_{C_2} f(z)dz$，解析仍应成立

若f在单连通D内解析，$z\in D$，则 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在D上解析，且 $F'(z)=f(z)$

$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ , $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

若f在$\mathbb{C}$有界解析则 $f\equiv C$ $|f'(z_0)|\le\frac{M}{R}$

~~R为C的~~ R为$\partial D$的S，M为$|f(z)|$的

若f在D上连续，对$\forall C\subset D$ $\oint f(z)dz=0$ 则f在D上解析

若f在开区域D上解析：若 $|f(z)|\le|f(z_0)|$ 则 $f\equiv C$

若为有界闭区域，且 $f\not\equiv C$，则 $|f|_{min/max}$ 在$\partial D$上

若且f无零点则 $|f(z)|_{min}$ 在$\partial D$上

$f_n: D\to\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, 若 $|f_n(z)|\le M_n$, $\forall z\in D$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛

则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在D一致收敛

若 $\sum_{k=1}^{n} f_k(z)=S_n(z)\rightrightarrows S(z)$ 则在D连续

若$f_n$在C上连续 则 $S(z)$在C上连续

若$f_n$在D上解析则 $S(z)$解析

阿贝尔定理　$R=\sup\{|z|\,|\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 收敛$\}$

$\lambda=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda\in[0,+\infty]$，$\lambda=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ $=\lambda$，$R=\frac{1}{\lambda}$

$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi-z_0|=r}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$

若 $f$ 在 $R<|z-z_0|<R_1$ 解析，则 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$　$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$

($C$ 为圆环域内)

$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ 要 $f$ 在 $B(z_0,R)$ 内解析才成立

使用 $\frac{1}{1-z}$ 公式要 $|z|<1$　$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$

同一中心由奇点隔开的环域展开不同

可去奇点：$n<0$ 时 $c_n=0$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to z_0}f(z)$ 存在且有限

极点：$\Leftrightarrow\lim_{z\to z_0}|f(z_0)|=+\infty$ 或 $\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0$．$m$ 极点阶：$n<-m$ 时 $c_n=0$ 且 $c_{-m}\neq0$

本性：不存在有限或无穷的极限，可收敛于任意点

若 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，且 $\varphi(z_0)\neq0$，$z_0$ 为 $f$ $m$ 阶零点

$z_0$ 为 $f$ 的 $m$ 级极点 $\Leftrightarrow$ $z_0$ 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 $m$ 级零点

令 $\varphi(w)=f(\frac{1}{w})=f(z)$ $\Rightarrow$ $\varphi$ 在 $\mathring{B}(0,\frac{1}{\delta})$ 解析，0 为 $\varphi$ 孤立奇点

若 0 为 $\varphi$ 可去奇点、$m$ 阶极点或本性奇点，则称 $\infty$ 为 $f$ 的可去奇点、$m$ 阶极点或本性奇点

可

或为极限判断与 $z_0$ 处同，是否为奇点用 $\varphi$ 判断

$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = C_{-1}$

$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$

若 $f(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$，$F(z_0) \neq 0$，$G(z_0) = 0$，$G'(z_0) \neq 0$

则 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{F(z_0)}{G'(z_0)}$

$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{k!}\lim_{z \to z_0}\frac{d^k}{dz^k}[(z-z_0)^{k+1} f(z)]$

$\mathrm{Res}[f(z), \infty] = -\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2}, 0]$

$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \oint_{|z|=1} F(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz})\frac{dz}{iz}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$ 型，$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$，$\deg Q - \deg P \geq 2$，Q在实轴无零点 F在实轴无极点… 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n}[F(z), z_k]$

若 $\deg Q - \deg P \geq 1$，$F(z)$在实轴上极点为一阶 则

$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[F(z)e^{iaz}, z_k] + \pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}[F(z)e^{iaz}, x_k]$

可导 $\Leftrightarrow$ 可微，全纯 $\Leftrightarrow$ u, v在(x, y)可微且 C-R成立

$\sin z$，$\cos z$ 无界　$\mathrm{Ln}\, z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\mathrm{Ln}\, z$，$\mathrm{Ln}\, z^n \neq n\,\mathrm{Ln}\, z$　$\ln z^{\frac{1}{n}}$ 相似

No.
Date.

$F(w)=\Phi[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iwt}dt$

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{itw}=\Phi^{-1}[F(w)]$

或定义为 $F(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi wt}dt$，$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(w)e^{i2\pi wt}dt$

$F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iw\tau}$，$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{iwt}dw$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{iw\tau}d\tau\right]e^{iwt}dw=\frac{1}{2}[f(t^-)+f(t^+)]$

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin w\cos wt}{w}dw=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |t|<1\\ \frac{\pi}{4}, & t=1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p(t+c)^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{p}}$

$F[f(at+b)](w)=\frac{1}{|a|}e^{\frac{ibw}{a}}F(\frac{w}{a})$

$F[e^{iw_0t}f(t)]=F(w-w_0)$

若 $f^{(n)}(t)$ 绝对可积且 $\lim\limits_{|t|\to\infty} f^{(n)}(t)=0$，则 $F[f^{(n)}(t)]=(iw)^nF[f(t)]$

$F^{(n)}(w)=(-i)^n\Phi[t^nf(t)]$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)\overline{G(w)}dw$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(w)|^2dw$

$\cancel{\Phi[\,\,]=\frac{\sin w}{w}\quad \Phi^{-1}[\frac{\sin wt}{w}]=\ldots\operatorname{sgn}(t)}$

$\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)] = -\frac{2i}{\omega}$   $\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) - \frac{i}{\omega}$   $\mathcal{F}[\cancel{\delta(t)}\ \delta(t)] = 1$

由 $\mathcal{F}[u(t)]$

$\lim_{|t|\to\infty} u(t) \neq 0$ 故 $\mathcal{F}[u(t)] \neq \frac{1}{i\omega}$ 求导性不成立   $\mathcal{F}[\delta^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n$

$f(t) = \begin{cases} e^{-\beta t}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$, $\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\beta + i\omega}$

$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$, 包抱哈！☆

$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$   $\mathcal{L}[t^{\alpha}] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$

$\alpha \in N$ 时 $\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$

$\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$   $m\Gamma(m) = \Gamma(m+1)$

$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$   $\mathcal{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)] = e^{-\tau s}F(s)$

$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

$F'(s) = \mathcal{L}[-t f(t)]$, $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)]$

$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)\, d\tau] = \frac{F(s)}{s}$   $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^{\infty} F(s)\, ds$