第七章 Laplace 变换

§7.1 定义和性质

(包含δ点!☆)

1. 定义：设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有定义，则 f 的 Laplace 变换(拉氏变换)为：$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$，$s\in\mathbb{C}$.

称 F 为 f 在 Laplace 变换下的象函数，f 是 F 的原函数，记 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

注：$s=\beta+i\omega \implies F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{F}[f(t)u(t)e^{-\beta t}](\omega)$，$u$：Heaviside 函数.

例1：求 $\mathcal{L}[e^{at}]$，$\mathcal{L}[\cos at]$，$\mathcal{L}[\sin at]$，$a>0$.

解：① $\mathcal{L}[e^{at}]=\int_0^{\infty} e^{at}\cdot e^{-st}dt=\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s-a}$，当 $\mathrm{Re}(s)>a$.　(其余 s 不收敛)

② 方法一. $\mathcal{L}[\cos at]=\int_0^{\infty}\cos at\, e^{-st}dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{a}(\sin at\, e^{-st})'+\frac{s}{a}\sin at\, e^{-st}dt$

$$=\frac{1}{a}\sin at\, e^{-st}\Big|_0^{\infty}-\frac{s}{a}\int_0^{\infty}\frac{1}{a}(\cos at\, e^{-st})'+\frac{s}{a}\cos at\, e^{-st}dt$$

要求 $\mathrm{Re}\, S>0$.

$$=-\frac{s}{a^2}\cos at\, e^{-st}\Big|_0^{\infty}-\frac{s^2}{a^2}\int_0^{\infty}\cos at\, e^{-st}dt=\frac{s}{a^2}-\frac{s^2}{a^2}\mathcal{L}[\cos at].$$

故 $\mathcal{L}[\cos at]=\frac{\frac{s}{a^2}}{1+\frac{s^2}{a^2}}=\frac{s}{a^2+s^2}$，$\mathrm{Re}\, S>0$.

方法二. 利用变换线性性：$\mathcal{L}[\cos at]=\mathcal{L}\left[\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{iat}]+\frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-iat}]$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia}+\frac{1}{s+ia}\right)=\frac{s}{a^2+s^2}.$$

③ $\mathcal{L}[\sin at]=\frac{a}{s^2+a^2}$.　(可以利用② + 微分性!)

定理：设函数 $f(t)$ 在 $t\geq 0$ 连续或分段连续. 若 $\exists\, c>0, M>0$，s.t.，$|f(t)|\leq Me^{ct}$，$t>0$，(指数增长函数)

则 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ 在半平面 $\mathrm{Re}(S)>c$ 上收敛.

证明：$|F(s)|=\left|\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt\right|\leq\int_0^{\infty}|f(t)e^{-st}|dt\leq\int_0^{\infty}Me^{-(\mathrm{Re}\, s-c)t}dt$，当 $\mathrm{Re}(S)>c$ 时可积.　#

定理：$F(S)=\mathcal{L}[f(t)]$. (1) 若 $F(S_0)$ 收敛，则 $F(S)$ 在 $\mathrm{Re}(S)>\mathrm{Re}(S_0)$ 收敛；(2) 若 $F(S_0)$ 发散，则 $F(S)$ 在 $\mathrm{Re}(S)<\mathrm{Re}(S_0)$ 上发散.

证明：(2) 可由 (1) 得. 仅证 (1). 令 $\Phi(t)=\int_0^t f(\tau)e^{-S_0\tau}d\tau$，则 $\Phi(t)$ 在 $t\geq 0$ 有界.　(课堂略过)

当 $\mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(S_0)$ 时有 $\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}f(t)e^{-S_0t}\cdot e^{-(S-S_0)t}dt$

$$=\int_0^{\infty}\Phi'(t)e^{-(S-S_0)t}dt=\Phi(t)e^{-(S-S_0)t}\Big|_0^{\infty}+(S-S_0)\int_0^{\infty}\Phi(t)e^{-(S-S_0)t}dt$$

由 Φ 有界性可知上述积分收敛.　#

例2. 求 $\mathcal{L}[t^{\alpha}]$　$(\alpha>-1)$.

解：当 $\alpha=m\in\mathbb{N}$ 时有 $\mathcal{L}[t^m]=\int_0^{\infty}t^m e^{-st}dt=\int_0^{\infty}t^m\frac{de^{-st}}{-s}=-\frac{e^{-st}}{s}\cdot t^m\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{\infty}e^{-st}mt^{m-1}dt$

$$=-\frac{m}{s^2}\int_0^{\infty}t^{m-1}de^{-st}=\cdots=-\frac{m!}{s^{m+1}}\int_0^{\infty}de^{-st}=\frac{m!}{s^{m+1}},\quad \mathrm{Re}(s)>0.$$

对于一般 $\alpha>-1$，利用复变函数积分知识：(见书本《积分变换》(张元林)，P83，§2.1节，例4.)　(课堂略过.)

$$F(s)=\int_0^{\infty}t^{\alpha}e^{-st}dt=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^{\infty}t^{\alpha}e^{-t}dt=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

此处并不简单! s为复数，积分限应为 $[0, s\cdot\infty)$，但确实等于 $[0,+\infty)$ 积分!

注：① $\mathcal{L}[1]=\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$.

② $\Gamma(m)=\int_0^\infty e^{-t}t^{m-1}dt$，$m>0$，　$m\Gamma(m)=\Gamma(m+1)$. 当 $m\in\mathbb{Z}_+$，$\Gamma(m+1)=m!$

例3. 求 $\mathcal{L}[\delta(t)]$.　　解：$\mathcal{L}[\delta(t)](s)=\int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt=e^{-st}\big|_{t=0}=1$.　　(Laplace变换积分包含0点)

2. 性质　(1) 线性性：$\mathcal{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha\mathcal{L}[f(t)]+\beta\mathcal{L}[g(t)]$.

(2) 平移性：设 $f(t)=0$，$t<0$，$a\in\mathbb{R}$，$\tau>0$，$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$. 则有　　$\mathcal{L}[u(t-\tau)]=e^{-\tau s}\mathcal{L}[1]=\frac{e^{-\tau s}}{s}$.

1.(延迟性)：$\mathcal{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)](s)=e^{-\tau s}F(s)$，或 $\mathcal{L}^{-1}[e^{-\tau s}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau)$；　(例：$\mathcal{L}[\cos(t-\tau)u(t-\tau)]=e^{-\tau s}\mathcal{L}[\cos t]$)

2.(位移性)：$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)=F(s-a)$，或 $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]=e^{at}f(t)$.　(例：$\mathcal{L}[e^{\tau t}\sin at]=\mathcal{L}[\sin at](s-\tau)$)

(3) 微分性：设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，则

1. $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$.　(例：$\mathcal{L}[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}}$，$m\in\mathbb{Z}_+$)

2. $F'(s)=\mathcal{L}[-tf(t)]$，　$F^{(n)}(s)=\mathcal{L}[(-t)^nf(t)]$.　(像微分性)　(例：$\mathcal{L}[t\sin at]=-\frac{d}{ds}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]$)

证明：① $\mathcal{L}[f'(t)]=\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty (f(t)e^{-st})'+sf(t)e^{-st}dt=f(t)e^{-st}\big|_0^\infty+s\mathcal{L}[f(t)]=sF(s)-f(0)$、

之后可用归纳法.

② $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$　默认求导和积分可交换，易证.

(4) 积分性1：设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，　则 $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}$，　$\mathcal{L}\left[\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}}f(\tau)d\tau\, dt_{n-1}\, dt_{n-2}\cdots dt_1\right]=\frac{F(s)}{s^n}$

证明：令 $g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$，则 $g'(t)=f(t)$，$g(0)=0$.　$F(s)=\mathcal{L}[g'(t)]=s\mathcal{L}[g(t)]-g(0)\Rightarrow \mathcal{L}[g(t)]=\frac{F(s)}{s}$.　#

(5) 积分性2：　$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(s)ds$，或　$f(t)=t\,\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^\infty F(s)ds\right]$

一般地：　$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right]=\int_s^\infty\int_{s_1}^\infty\cdots\int_{s_{n-1}}^\infty F(\tau)d\tau\, ds_{n-1}\, ds_{n-2}\cdots ds_1$

(6) 乘法性质

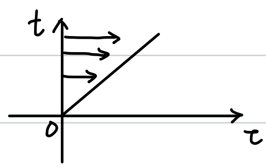
定义：设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是实轴上的两个绝对可积函数. 函数 f_1 与 f_2 的拉氏卷积为

$$(f_1*f_2)(t)=[(f_1\cdot u)*(f_2\cdot u)](t)=\begin{cases}\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

u为Heaviside函数.

例5. 设 $f_1(t)=t$，$f_2(t)=\sin t$，求 $(f_1*f_2)(t)$.

解：　$t>0$ 时　$(f_1*f_2)(t)=\int_0^t \tau\sin(t-\tau)d\tau=t-\sin t$.　(分部积分)　#



定理：设 $F_1(s)=\mathcal{L}[f_1(t)]$，$F_2(s)=\mathcal{L}[f_2(t)]$，则 $\mathcal{L}[f_1*f_2]=F_1(s)\cdot F_2(s)$.

证明：$\mathcal{L}[f_1*f_2]=\int_0^\infty\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\, e^{-st}dt=\int_0^\infty\int_\tau^\infty f_1(\tau)f_2(t-\tau)e^{-st}dt\,d\tau$

$=\int_0^\infty f_1(\tau)\int_0^\infty f(\xi)e^{-s(\xi+\tau)}d\xi\, d\tau=\int_0^\infty f_1(\tau)e^{-s\tau}d\tau\cdot\int_0^\infty f(\xi)e^{-s\xi}d\xi=F_1(s)\cdot F_2(s)$.　#

例6. 求 $\mathcal{L}\left[\int_0^t \tau e^{a\tau}\sin(a\tau)d\tau\right]$.

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t\tau e^{a\tau}\sin(a\tau)d\tau\right]\underset{(积分性)}{=}\frac{\mathcal{L}[te^{at}\sin(at)]}{s}\overset{(微分性)}{=}\frac{-\mathcal{L}[e^{at}\sin(at)]'}{s}\overset{(平移性)}{=}-\frac{1}{s}\left[\frac{a}{(s-a)^2+a^2}\right]'=\frac{2a(s-a)}{s(s^2-2as+2a^2)^2}.$$

解（见上式）　#

§7.2 拉氏逆变换及其应用.

思路：$s=\beta+i\omega$，由于 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)](\omega)=\mathcal{F}[f(t)u(t)e^{-\beta t}](\omega)$，有：

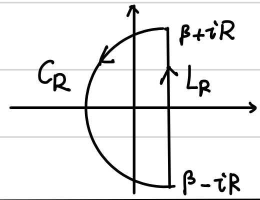
$$f(t)u(t)e^{-\beta t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(s)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+i\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+i\omega)e^{(\beta+i\omega)t}d\omega=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{st}ds,\quad t>0.$$ —— $\boxed{\text{Laplace 反演积分}}$

定理：若 $F(s)$ 奇点为 $s_1,\cdots,s_n$，且 $\lim_{s\to\infty}F(s)=0$，则 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{n}Res[F(s)e^{ts},s_k]$.

证明思路：取 β 充分大，使 $Re(s_k)<\beta$，$k=1,2,\cdots,n$. (最终与β无关！)

考虑 $F(z)e^{tz}$ 沿 $L_R\cup C_R$ 的积分.



例1：求 $F(s)=\frac{1}{s^4+5s^2+4}$ 的拉氏变换. (部分分式分解可以化简)

解：$s_1=i$，$s_2=-i$，$s_3=2i$，$s_4=-2i$ 为 $F(s)e^{ts}$ 的4个一阶极点，有

$Res[F(s)e^{ts},i]=\frac{e^{it}}{6i}$，$Res[F(s)e^{ts},-i]=-\frac{e^{-it}}{6i}$，$Res[F(s)e^{ts},2i]=-\frac{e^{2it}}{12i}$，$Res[F(s)e^{ts},-2i]=\frac{e^{-2it}}{12i}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{4}Res[F(s)e^{ts},s_k]=\frac{\sin t}{3}-\frac{\sin 2t}{6}.$$ #

例2：求 $F(s)=\frac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4}$

解：方法一. $s^3+3s^2+6s+4=s^3+3s^2+2s+4(s+1)=s(s+2)(s+1)+4(s+1)=(s+1)(s+1-\sqrt{3}i)(s+1+\sqrt{3}i)$

$s_1=-1$，$s_2=-1+\sqrt{3}i$，$s_3=-1-\sqrt{3}i$

$Res[F(s)e^{ts},-1]=\frac{2}{3}e^{-t}$，$Res[F(s)e^{ts},-1+\sqrt{3}i]=-\frac{2+\sqrt{3}i}{6}e^{(-1+\sqrt{3}i)t}$，$Res[F(s)e^{ts},-1-\sqrt{3}i]=-\frac{2-\sqrt{3}i}{6}e^{(-1-\sqrt{3}i)t}$.

$$\Rightarrow f(t)=\sum_{k=1}^{3}Res[F(s)e^{ts},s_k]=\frac{1}{3}e^{-t}(2-2\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t).$$

方法二. $\frac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4}=\frac{2}{3}\frac{1}{s+1}-\frac{2}{3}\frac{s+1}{(s+1)^2+3}+\frac{1}{(s+1)^2+3}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-t}\cos\sqrt{3}t+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t}\sin\sqrt{3}t$

例3. 求 $F(s)=\ln\frac{s^2-1}{s^2}$ 的拉氏逆变换. $\left(\frac{s^2-1}{s^2}\notin(-\infty,0]\right)$

解：设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$，则 $F'(s)=\mathcal{L}[-tf(t)]=\frac{s^2}{s^2-1}\cdot 2\cdot\frac{1}{s^3}=\frac{2}{s(s^2-1)}=G(s)$

$$f(t)=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}[G(s)]=-\frac{1}{t}\left(Res[G(s)e^{ts},0]+Res[G(s)e^{ts},-1]+Res[G(s)e^{ts},1]\right)$$

$$=-\frac{1}{t}\left[-2+e^{-t}+e^{t}\right]=\frac{1}{t}(2-e^{-t}-e^{t}).$$

(部分分式分解：$G(s)=-\frac{2}{s}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}-2+e^{-t}-e^{t}$)

例4. 求 $F(s)=\frac{1}{(s^2+2s+2)^2}$ 的拉氏逆变换.

解：方法一、由卷积性可知：$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+2}\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+2}\right]$，$-1\pm i$ 为 $\frac{1}{s^2+2s+2}$ 的一阶极点.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+2}\right]=Res\left[\frac{e^{ts}}{s^2+2s+2},-1+i\right]+Res\left[\frac{e^{ts}}{s^2+2s+2},-1-i\right]=\frac{e^{-(1-i)t}}{2i}-\frac{e^{-(1+i)t}}{2i}=e^{-t}\sin t.$$

$$f(t)=\int_0^t e^{-\tau}\sin\tau\left[e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)\right]d\tau=\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t-t\cos t).$$

方法二、直接计算留数. $-1\pm i$ 为 $F(s)$ 的二阶极点.

$\mathrm{Res}[F(s)e^{ts}, -1-i] = \lim_{s\to -1-i} \frac{d}{ds}[(s+1+i)^2 F(s) e^{ts}] = \frac{d}{ds} \frac{e^{ts}}{(s+1-i)^2}\Big|_{s=-1-i} = \frac{1}{4} e^{-t}(i-t)(\cos t - i\sin t)$

$\mathrm{Res}[F(s)e^{ts}, -1+i] = \frac{d}{ds}\frac{e^{ts}}{(s+1+i)^2}\Big|_{s=-1+i} = -\frac{1}{4}e^{-t}(t+i)(\cos t + i\sin t)$

$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{4}e^{-t}[(i-t)(\cos t - i\sin t) - (t+i)(\cos t + i\sin t)] = \frac{e^{-t}}{2}(\sin t - t\cos t)$.

例5. 求 $F(s) = \frac{1+e^{-2s}}{s^2}$ 的拉氏逆变换.　　（$\lim_{s\to\infty} F(s)$ 不存在，故不可用逆变换定理.）

解: $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}] + \mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-2s}}{s^2}]$，　$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^2}] = \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}[s^2\cdot\frac{e^{ts}}{s^2}] = t = tu(t)$

由平移性可知: $\mathcal{L}^{-1}[\frac{e^{-2s}}{s^2}] = (t-2)u(t-2)$.　　故 $f(t) = tu(t) + (t-2)u(t-2) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ t, & 0\le t<2, \\ 2(t-1), & t\ge 2. \end{cases}$

例6: 求解微分方程: $f'' + 4f' + 3f = e^{-t}$,　$f(0) = f'(0) = 1$.

解: 设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.　　利用微分性: $\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - s - 1$

$\mathcal{L}[f'(s)] = sF(s) - f(0) = sF(s) - 1$,　　$\mathcal{L}[e^{-t}] = \int_0^\infty e^{-t}\cdot e^{-st}dt = \frac{1}{1+s}$

对方程两端做 Laplace 变换有: $s^2F(s) - s - 1 + 4sF(s) - 4 + 3F(s) = \frac{1}{1+s}$

$$\Rightarrow F(s) = \left(\frac{1}{1+s} + 5 + s\right)\cdot\frac{1}{s^2+4s+3} = \frac{1}{(s+1)^2(s+3)} + \frac{s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{7}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{s+3}$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{-3}{4}\cdot\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+3}] + \frac{7}{4}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+1}] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2}]$

$= -\frac{3}{4}\cdot e^{-3t} + \frac{7}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}t\cdot e^{-t}$　　#

例7. 求解微分方程组: $\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ 3x + y' - 2y = 2e^t, \end{cases}$　　$x(0) = y(0) = 1$.

解: 令 $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$，$Y(s) = \mathcal{L}[Y(t)]$，对方程组两边做 Laplace 变换可得:

$\begin{cases} sX(s) - 1 + X(s) - Y(s) = \frac{1}{s-1} \\ 3X(s) + sY(s) - 1 - 2Y(s) = \frac{2}{s-1} \end{cases}$　$\Rightarrow X(s) = Y(s) = \frac{1}{s-1}$　$\Rightarrow x(t) = y(t) = e^t$.