《复变函数与积分变换》哈工深，2024秋

高瑜

第一章 复数与复变函数

§1.1 复数 (第一讲)

1. $x-1=0$ $\quad x=1.$ $\quad \mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$

$x+1=0$ $\quad x=-1,$ $\quad \mathbb{Z}=\{\cdots -2,-1,0,1,2,\cdots\}$

$2x-1=0$ $\quad x=\frac{1}{2}$ $\quad \mathbb{Q}=\{\frac{p}{q}: \ p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq 0\}$

$x^2-2=0$ $\quad x=\pm\sqrt{2}$ $\quad \mathbb{R}.$ ($\sqrt{2}$ 是有理数, Hippasus 古希腊哲学家, 公元前4世纪毕达哥拉斯学派, 被淹死!)

$x^2+1=0$ $\quad x=\pm\sqrt{-1}$ $\quad ?$

$i=\sqrt{-1}$: 虚单位.

复数简史: 16世纪意大利数学家卡尔达诺首次引入, 用来解一元三次、四次方程. "as subtle as useless" "mental torture" 一开始人们不接受, 但经棣莫弗、欧拉(18世纪), 高斯(19世纪)等人的推广, 慢慢被人接受.

2. 世界上最美的公式: $e^{i\pi}+1=0.$ (Euler 公式)

1.概念

$0=0+i0$
$i=i\cdot 1=1\cdot i$
$1=1+i\cdot 0$

虚单位 i: $\quad i^2=-1,\quad i=\sqrt{-1},\quad$ 纯虚数单位.

复数: $\quad z=x+iy=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}.$ (复数 z 的一般形式, 之后还有几种形式.)

$y=0 \Rightarrow z=x+i0=x\in\mathbb{R}.$ 即实数是复数的一部分.

实部: $x=\operatorname{Re} z$ (real part) (z, w 表示复数, a,b,c,d,x,y 常用来表示实数)

虚部: $y=\operatorname{Im} z$ (Imaginary part)

纯虚数: $iy,\quad y\neq 0,\quad y\in\mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{C}$: 全体复数.

2.四则运算定义: $z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2$

相等: $z_1=z_2 \iff x_1=x_2,\ y_1=y_2$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{加法:} & z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\\ \text{减法:} & z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}\operatorname{Re}(z_1\pm z_2)=\operatorname{Re}z_1\pm\operatorname{Re}z_2\\ \operatorname{Im}(z_1\pm z_2)=\operatorname{Im}z_1\pm\operatorname{Im}z_2.\end{array}$$

乘法: $z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

除法: $z_2\neq 0$ 时, $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\cdot\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

幂次: $z^0=1,\quad z^n=z\cdot z^{n-1},\quad z^{-n}=\frac{1}{z^n}.$

☆ 强烈建议看一遍: 十分钟

注: ① 仅需定义加法和乘法, 减法除法可视为逆运算. 《Complex Variables and applications》 — James Ward Brown, Ruel V. Churchill 一章 2-3 节.

② 由此定义可以推出结合律、分配律、交换律等.

③ 复数集 $\mathbb{C}$ 上定义加、减、乘、除运算, 使 $\mathbb{C}$ 上有一个代数结构, 使其成为复数域 $\mathbb{C}$, 可视为实数域的扩张.

注：不用记住乘法和除法的公式！

① 利用分配律结合律交换律计算乘法：

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2+iy_1x_2+i^2y_1y_2=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2).$$

② 实数化分母计算除法：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

例1：$z_1=\sqrt{3}-i$，$z_2=\sqrt{3}+2i$，求 $\frac{z_1}{z_2}$.

解：$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i}=\frac{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}-2i)}{(\sqrt{3}+2i)(\sqrt{3}-2i)}=\frac{3-2-i(\sqrt{3}+2\sqrt{3})}{(\sqrt{3})^2+2^2}=\frac{1}{7}-\frac{3\sqrt{3}}{7}i.$$

例2. 求解 $z^2+2z+2=0$.

$$z_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=-1\pm 2i.$$

3.共轭和模.

共轭复数（conjugate）：$z=x+iy$，$\bar{z}=x-iy$ 为 z 的共轭复数.

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\,z=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i},\quad z\bar{z}=x^2+y^2$$

性质：设 z,w 是两个复数，则有：

(1) $\bar{\bar{z}}=z$；(2) $\overline{z\pm w}=\bar{z}\pm\bar{w}$；(3) $\overline{zw}=\bar{z}\cdot\bar{w}$；(4) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.

证明:略.

复数 $z=x+iy$ 的模（或绝对值）定义为：$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}$.

性质：设 z,w 是两个复数，则有：

(1) $|zw|=|z|\cdot|w|$；(2) $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$；(3) $|\bar{z}|=|z|$. 证明:略.

例3. 设 $z=x+iy$，$x,y\in\mathbb{R}$，$|z|=1$. $k\in\mathbb{R}$ 为常数. 证明：$\left|\frac{kz-1}{z-k}\right|=1$.

证（A simple case of Möbius transformation）$|z|=1\Rightarrow z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$.

$$\left|\frac{kz-z\bar{z}}{z-k}\right|=\frac{|kz-z\bar{z}|}{|z-k|}=\frac{|z(k-\bar{z})|}{|z-k|}=\frac{|z|\cdot|k-\bar{z}|}{|z-k|}=\frac{|k-\bar{z}|}{|z-k|}=1.$$

$$|k-\bar{z}|=|(-1)(\bar{z}-k)|=|\bar{z}-k|=|\overline{z-k}|=|z-k|$$

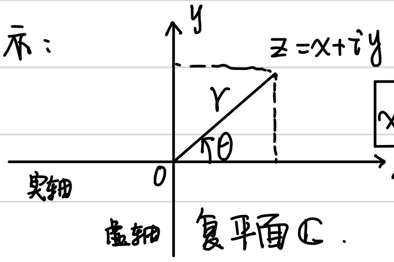
例4. 设 $|z|=1$，$z\neq\pm1$，证明 $\frac{z-1}{z+1}$ 是纯虚数. （没时间讲，跳过了）.

证：设 $z=x+iy$，$x,y\in\mathbb{R}$. 则 $x^2+y^2=1$. $\Rightarrow \frac{z-1}{z+1}=1-\frac{2}{z+1}=\frac{yi}{1+x}$，

$z\neq\pm1\Rightarrow y\neq0$. 故 $\frac{z-1}{z+1}$ 为纯虚数.

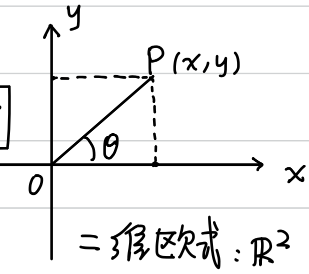
4. 复数的其它表示

几何表示：



$\boxed{x+iy\in\mathbb{C}\longleftrightarrow(x,y)\in\mathbb{R}^2}$

—— 一一对应.



复数的极坐标形式： $z=x+iy\longleftrightarrow(x,y)\longleftrightarrow(r,\theta)$ ： $\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|\\ \tan\theta=\frac{y}{x}\end{cases}$

$(r,\theta)\leftrightarrow(x,y)$: $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\longleftrightarrow z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

复数 z 的辐角： $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴夹角 θ 称为 z 的辐角，记作 $\mathrm{Arg}\,z=\theta$.

不唯一！无穷多值，$2k\pi+\theta$ 都是，$k\in\mathbb{Z}$. 若 $\theta_0=2k_0\pi+\theta\in(-\pi,\pi]$，则

称 θ_0 为 $\mathrm{Arg}\,z$ 的主值，记作 $\arg z$. $\Rightarrow \mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

复数 $z=x+iy$ 的辐角主值与实部、虚部关系： $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta.\end{cases}$ or $\tan\theta=\frac{y}{x}$

极坐标形式(或三角表示式)： $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

欧拉公式： $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ （Taylor 展开 或 指数函数角度解释，略）

指数表示式： $z=re^{i\theta}$ $\Rightarrow e^{i\pi}+1=0$ 最美公式！

注：熟练掌握复数各个形式之间的转化。当算不出 θ 具体值时，用 arctan 表示！

例5. 将 $\sqrt{3}+i$，-3 化为极坐标形式和指数表示式，并给出它们的辐角主值.

解：① $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\Rightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\frac{1}{2}$ （第一象限）$\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$

即 $\arg(\sqrt{3}+i)=\frac{\pi}{6}$，$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

② $-3=3(-1+i\cdot 0)\Rightarrow\cos\theta=-1$，$\sin\theta=0$ （负实轴）$\Rightarrow\theta=\pi$.

$\arg(-3)=\pi$， $-3=3(\cos\pi+i\sin\pi)=3e^{i\pi}$. #

例6. 求 $1-2i$ 和 $-1-2i$ 的辐角主值.

解：① $1-2i=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}i\right)\Rightarrow\tan\theta=-2$ 且 $1-2i$ 在第四象限 $\Rightarrow\arg(1-2i)=\arctan(-2)$.

② $-1-2i=\sqrt{5}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}i\right)\Rightarrow\tan\theta=2$，$-1-2i$ 在第三象限 $\Rightarrow\arg(-1-2i)=\arctan 2-\pi$.

定理：若 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_2e^{i\theta_2}\neq 0$，

则 $z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$，

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

证明：

Proof: Use sum and difference of angles identities

$$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B,$$
$$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B,$$

and Pythagorean identities: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$. We have

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2\big[\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\\&\qquad+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)\big]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}$$

The proof of $\frac{z_1}{z_2}$ and the DeMoirve formula are left as exercises.

推论（棣莫弗公式）(De Moivre formula)（复数与三角函数之间的桥梁）($n\le 0$ 要求 $z\neq 0$).

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$，则 $z^n=r^n[\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)]=r^ne^{in\theta}$，$\forall n\in\mathbb{Z}$.

例7. 算 $(1+i)^{10}$.

解：$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow (1+i)^{10}=(\sqrt{2})^{10}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}\times 10}=32i$.

（复数的 n 次方根）定义：设 $w,z\in\mathbb{C}$，$n\in\mathbb{Z}_+$，若 $w^n=z$，则称 w 为 z 的 n 次方根.

定理：设 $z=re^{i\theta}$，$r,\theta\in\mathbb{R}$，$r>0$，$n\in\mathbb{Z}_+$. 则 z 的 n 次方根为：

$$z_k=r^{\frac{1}{n}}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

证明：$z_k^n=re^{i(\theta+2k\pi)}=re^{i\theta}=z$.　　（代数学基本定理！）→ 第三章 P88

解释：为什么其它 k 不需要？

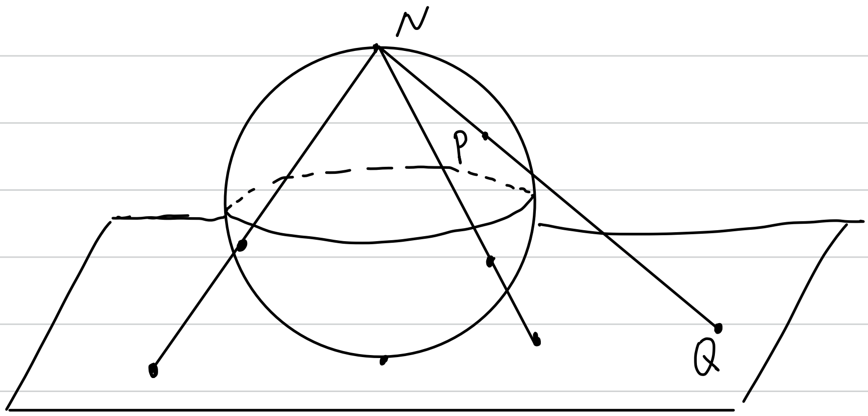
$\boxed{\text{均匀分布在单位圆周上！}}$

例8. 求 $1+\sqrt{3}i$ 的立方根.　（写清楚 z_1，z_0，z_2）

解：$1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}$. $\Rightarrow$

$z_k=\sqrt[3]{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$，$k=0,1,2$；　$z_0=\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{9}i}$，$z_1=\sqrt[3]{2}e^{\frac{7}{9}\pi i}$，$z_2=\sqrt[3]{2}e^{\frac{13}{9}\pi i}$

5.复球面与无穷远点：$\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}\longrightarrow$ 扩充复平面.



$N\longleftrightarrow\infty$

球面点与 $\overline{\mathbb{C}}$ 点一一对应！

§1.2 复平面上的点集 （第二讲）

1. 基本概念

$\left(\begin{array}{l}\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z=x+iy \leftrightarrow (x,y)\in\mathbb{R}^2\end{array}\right\} \Rightarrow$ 可以在复平面定义距离 $\Rightarrow$ 开集、闭集 （拓扑结构）

$z_0\in\mathbb{C}$ 的 δ 邻域： $B(z_0,\delta)=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|<\delta\} = N(z_0,\delta)$

去心 δ 邻域： $\mathring{B}(z_0,\delta)=\{z\in\mathbb{C} : 0<|z-z_0|<\delta\}. = \mathring{N}(z_0,\delta)$ （$\{z\in\mathbb{C} : |z|>1/\delta\}$ //）

无穷远点 ∞ 的 δ 邻域： $B(\infty,\delta)=\{z\in\overline{\mathbb{C}} : |z|>1/\delta\} = N(\infty,\delta)=\mathring{N}(\infty,\delta)\cup\{\infty\}$.

内点：点集 $D\subset\mathbb{C}$，$z_0\in D$，若 $\exists\delta>0$，s.t.，$B(z_0,\delta)\subset D$，则称 z_0 为 D 的内点.

开集： D 的所有点都是内点，则 D 为开集.

边界点和边界： 若 $\forall\delta>0$， $B(z_0,\delta)\cap D\neq\phi$ ， $B(z_0,\delta)\cap D^c\neq\phi$ ，则 z_0 为 D 的边界点.

D 的边界点所组成的集合称为 D 的边界，记为 ∂D.

有界集、无界集： 点集 $D\subset\mathbb{C}$，若 $\exists M>0$, s.t.，$\forall z\in D$ 有 $|z|\le M$，则称 D 为有界集

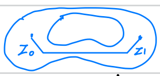
否则 D 为无界集. （$\forall M>0$，$\exists z_M\in D$，s.t.，$|z_M|>M$）$\rightarrow$（逆否命题）

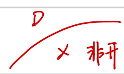
极限点、聚点、闭集：点集 $D\subset\mathbb{C}$，$z_0\in\mathbb{C}$，若 $\forall\delta>0$，$\mathring{B}(z_0,\delta)\cap D\neq\phi$（$\Leftrightarrow$有无穷多点），则 z_0 称为 D 的极限点或聚点；

若 D 的所有极限点都属于 D，则称 D 为闭集. （例 $D=B(0,1)\cup\{2\}$，则 2 为 D 孤立边界，但非聚点.）

2. 区域和曲线

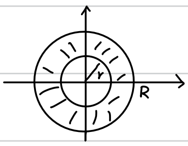
区域定义： $D\subset\mathbb{C}$ 非空，满足 (1) D 是开集；(2) D 连通， 即 $z_1, z_2\in D$ 可由 D 中折线连接，或 D 不能写成两个非空不交开集的并.





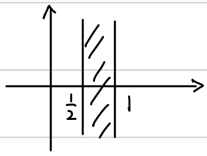
例： ① 环形区域：

$D=\{z\in\mathbb{C} : r<|z|<R\}$



② 带形区域：

$D=\{z\in\mathbb{C} : \frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,z<1\}$



③ 阿波罗尼斯圆（阿氏圆）： $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|>2 \Rightarrow (x-1)^2+y^2<2$ （=1 时？见作业题 7(5)）.

一般区域的边界：（可以很复杂，但主要研究简单的） （有界！）

「连续曲线： $\Gamma=\{z\in\mathbb{C} : z=z(t)=x(t)+iy(t), \ \alpha\le t\le\beta\}$. 若 $x(t)$，$y(t)$ 均为 t 的连续函数.

「简单曲线： $t_1\neq t_2 \Rightarrow z(t_1)\neq z(t_2)$ （无重点） （又称若尔当(Jardon)曲线）

「简单闭曲线： $z(\alpha)=z(\beta)$ （内部、外部 ： Jordon 定理 ▲）

「光滑曲线：若 $x(t)$，$y(t)$ 存在连续导数，且 $(x'(t))^2+(y'(t))^2\neq 0$. （微积分B，8.6节：多元函数微分学的几何应用.）

（=0 时？） 思考： ① $z(s)=s+is$； ② $z(t)=t^3+it^3$； ③ $z(t)=t^2+it^3$. 见 Notes.

（按段）逐段光滑曲线：由有限段光滑曲线首尾连接而成的曲线.

单连通区域：如果区域 D 内任意一条简单闭曲线的内部都含于区域 D 内. （连续形变缩成一点）

否则就称 D 为多连通区域.

（若尔当(Jordan)定理： 任何简单闭曲线一定把 $\overline{\mathbb{C}}$ 分成两个没有公共点的区域，一个有界，称为该曲线的内部；另一个无界，称为该曲线的外部. 这两个区域都以已给的简单闭曲线（若尔当曲线）为边界.）（略）

1. 定义

复变函数定义：设 $G\subset\mathbb{C}$ 为复数集合，若有一个法则，使 $\forall z=x+iy\in G$，∃一个或多个 $w=u+iv\in\mathbb{C}$ 与 z 对应，

则称复变数 w 是复变数 z 的复变函数，记作 $w=f(z)$.

若一个 z 对应一个 w，则称 f 为单值函数 $(f(z)=z^2)$

若一个 z 对应多个 w，则称 f 为多值函数 $(f(z)=z^{1/n},\ n\in\mathbb{Z}_+)$

G 为 $f(z)$ 定义集合，$G^*=\{w=f(z):\ z\in G\}=f(G)$ 为函数值集合；

G 为区域时，则称之为 f 的定义域.

反函数：$f: G\to G^*$，$z\mapsto w=f(z)$ ｜ 法则：一个 $w\in G^*$ 对应一个或多个 $z\in G$. $\Rightarrow$ 复变函数 $z=\varphi(w)$.

称为函数 $w=f(z)$ 的反函数，或映射 $w=f(z)$ 的逆映射.

f,φ 单值，则称 $w=f(z)$ 为一一映射.

（一个复变函数对应两个二元实变函数：）

$z=x+iy$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\Rightarrow u\in\mathbb{R}$，$v\in\mathbb{R}$. u,v：二元实变函数

$z=re^{i\theta}\Rightarrow f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$.

例1（单值）：$f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+i2xy\Rightarrow u(x,y)=x^2-y^2$，$v(x,y)=2xy$.

$=r^2e^{i2\theta}=r^2\cos2\theta+ir^2\sin2\theta\Rightarrow u(r,\theta)=r^2\cos2\theta$，$v(r,\theta)=r^2\sin2\theta$

$f(z)=|z|^2=x^2+y^2\Rightarrow u(x,y)=x^2+y^2$，$v(x,y)=0$.

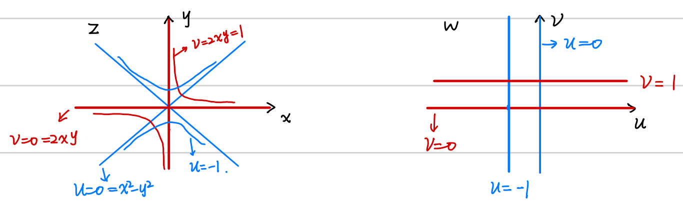
$=r^2\Rightarrow u(r,\theta)=r^2$，$v(r,\theta)=0$.

例2（多值）：① $f(z)=z^{1/2}=\pm\sqrt{r}\,e^{i\frac{\arg z}{2}}$ $-\pi<\arg z\le\pi$ 主值. ② $f(z)=\mathrm{Arg}(z)$

几何意义：此时可视为两个平面 $z\to w$ 之间的映射或变换. 有平移、旋转、反射等.

例3：$W=z\cdot e^{i\pi}=re^{i(\theta+\pi)}$，$W=\bar{z}$，$W=z+1$.

例4：$W=z^2\Rightarrow u(x,y)=x^2-y^2$，$v(x,y)=2xy$.



（例子略过，见"Handwritten Notes"）

---

2 极限与连续性

定义：$z_0, A\in\mathbb{C}$，$\rho>0$，f 在 $\mathring{N}(z_0,\rho)=\{z:0<|z-z_0|<\rho\}$ 有定义. 若

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，s.t. $0<|z-z_0|<\delta\Rightarrow|f(z)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(z)$ 在 z 趋近于 z_0 时的

极限，记作 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$，或 $f(z)\to A$，$z\to z_0$.

若 f 在 $N(z_0,\rho)$ 有定义，且 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，则称 f 在 z_0 连续. 若 f 在区域 D 内处处连续，则称 f 在 D 内连续.

注：$z\to z_0$ 任意方向，比一元实变函数要求高

定理1：设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=u_0+iv_0$，$z_0=x_0+iy_0$，则

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \iff \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0,\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0.$$

证：$\Rightarrow$) $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，s.t.，$|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|<\varepsilon$.

即 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $\sqrt{(u(x,y)-u_0)^2+(v(x,y)-v_0)^2}<\varepsilon$

$\Rightarrow |(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta$ 时，有 $|u(x,y)-u_0|<\varepsilon$，$|v(x,y)-v_0|<\varepsilon$.

即 $u(x,y)\to u_0$，$v(x,y)\to v_0$，$(x,y)\to(x_0,y_0)$.

$\Leftarrow$). $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ $|(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta$ 时 $|u(x,y)-u_0|<\frac{\varepsilon}{\sqrt2}$，$|v(x,y)-v_0|<\frac{\varepsilon}{\sqrt2}$

$\Rightarrow |f(z)-A|=\sqrt{(u(x,y)-u_0)^2+(v(x,y)-v_0)^2}<\varepsilon$. $\Rightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$. #

定理2. 若 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$，则

1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$； 2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z)=AB$； 3) $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}$，$(B\neq0)$.

4) 若 $\lim\limits_{w\to A} g(w)=B$，则 $\lim\limits_{z\to z_0} g(f(z))=B$.

证：略.

定理3. 若 f,g 在 z_0 连续，则其和、差、积、商在 z_0 连续. 若 f 在 $g(z_0)$ 连续，则 $f(g(z))$ 在 z_0 连续.

例：$f(z)=\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ 当 $z\to0$ 时极限是否存在？

法一：$f(z)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ① 沿 $z=0+iy\to0$ $(y>0)$ 时 $\lim\limits_{iy\to0} f(iy)=0$；② 沿 $z=x+iy\to0+$ 时 $\lim\limits_{x\to0+} f(x)=1$ $\Rightarrow$ 极限不存在.

法二：$f(z)=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$. ① 情形：$\theta=\frac{\pi}{2}$ ② 情形：$\theta=0$.

注：1. 有理整函数 (Integral rational functions, 即多项式 polynomial)：（z 和 $\mathbb{C}$ 中常数有限次加减乘运算

$W=P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$ 对 $\forall z\in\mathbb{C}$ 连续. 整数 ------→ 整数）

有理分式函数 (Fractional rational functions)：（z 和 $\mathbb{C}$ 中常数有限次加减乘除

$W=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 Q 非零点处也连续. 整数 ------→ 有理数）

2. 函数 $f(z)$ 在曲线 C 上 z_0 点处连续：$\lim\limits_{C\ni z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

3. 有界闭区域 D，$f:D\to\mathbb{C}$ 连续，则 $|f|$ 有界，且最值可达.

4. 在无穷远点的极限：$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty \iff \lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0$，$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=w_0 \iff \lim\limits_{z\to0} f(\frac1z)=w_0$

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty \iff \lim\limits_{z\to0}\frac{1}{f(\frac1z)}=0$.

（从连续性看，u,v 连续完全决定了 f 的连续性. 似乎没必要研究复变函数 f，因为仅研究二元实函数就够了。下一章将有更多区别，看出复变函数独特性质。）

第二章 解析函数 (第三件)

§2.1 概念

(与实函数区别：单调性？中值定理？洛必达 ✓)

1. 复变函数的导数.

定义(可导, 解析)：设 $w=f(z)$ 定义于区域 D，$z_0\in D$. 若 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在，则称 $f(z)$ 在 z_0 可导，

(可导、全纯) 极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数；又称 f 在 z_0 为可微的(differentiable)或全纯的(holomorphic)，记作：

$$f'(z)=\frac{dw}{dz}\Big|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

(也可类似于一元实函数定义可微，与可导等价！略过)

(解析) 若 f 在 z_0 及其邻域可导，则称 f 在 z_0 解析。若 f 在开区域 D 内每一点解析，则称 f 在 D 内解析或全纯.

特别地，若 f 在 $\mathbb{C}$ 上解析(或全纯)，则称 f 为整函数. (f is entire)

(可微或全纯有时被称为正则(regular). 若在开区域讲解析，则与正则、可导、可微，全纯等价.)

注：$\Delta z\to 0$ 可从各个方向.

$\boxed{\text{思考题：是否存在只在一点解析的函数？}}$ 与可导不一样，见例3.

例1: $f(z)=z$ 导数：$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{z+\Delta z-z}{\Delta z}=1.$ (全纯、解析、整函数)

例2: 问 $f(z)=\bar{z}$ 是否可导？ $\forall z_0=x_0+iy_0$，$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，有：

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{x_0+\Delta x-i(y_0+\Delta y)-(x_0+iy_0)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$\Delta y=0$，$\Delta x\to 0$ 时，即沿 $(x_0+\Delta x, iy_0)\to z_0$ 时，极限为 1

$\Delta x=0$，$\Delta y\to 0$ 时，即沿 $(x_0, i(y_0+\Delta y))\to z_0$ 时，极限为 -1

} $\forall z_0\in\mathbb{C}$，均不可导.

(例中 $u(x,y)=x$，$v(x,y)=-y$ 均为光滑函数，但 f 并不可导. 故要寻找别的条件！)

例3: 问 $f(z)=|z|^2$ 是否可导？

($f(z)=z\bar{z}$; z 可导，$\bar{z}$ 不可导)

计算：$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{(z_0+\Delta z)(\bar{z}_0+\overline{\Delta z})-z_0\bar{z}_0}{\Delta z}=\frac{z_0\overline{\Delta z}}{\Delta z}+\bar{z}_0+\overline{\Delta z}$

① 当 $z_0=0$ 时 $\Rightarrow\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=0$. (在 $z_0=0$ 可导，全纯，但处处不解析！)

② 当 $z_0\neq 0$ 时，由例2知 $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ 极限不存在，即 f 在 z_0 不可导.

性质：(1) 可导 $\Rightarrow$ 连续 $\not\Rightarrow$ 可导. (2) 常数 C，$(C)'=0$，$(z^n)'=nz^{n-1}$，$n\in\mathbb{Z}_+$

(3) $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$ (4) $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$

(5) $\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{1}{g^2(z)}[g(z)f'(z)-f(z)g'(z)]$，$g(z)\neq 0$. (6) $[f(g(z))]'=f'(g(z))\cdot g'(z)$

(7) $f'(z)=\frac{1}{\varphi'(w)}$，$z=\varphi(w)$ 与 $f(z)$ 互为反函数，都是单值，且 $\varphi'(w)\neq 0$.

定理：(1) f, g 在区域 D 内解析，则 $f\pm g$，$f\cdot g$，f/g 在 D 内解析，$(g\neq 0)$

(2) $h=g(z)$ 在 D 内解析，$g(D)\subset G$，$w=f(h)$ 在 G 内解析，则 $f(g(z))$ 在 D 内解析.

例5　$P(z)$、$Q(z)$为多项式，研究 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 解析性.

由导数性质 (2), (3), (4) $\Rightarrow$ $P(z)$, $Q(z)$ 为整函数.

由 (5) + 定理 $\Rightarrow$ $f(z)$ 在 $Q\neq 0$ 点处解析.

例6　$f(z)=\frac{1}{z}$，$\frac{2z}{1-z}$ 解析性.

$\frac{1}{z}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 解析，$\frac{2z}{1-z}$ 在 $z\neq 1$ 处解析.（称 $z=0$ 为 $\frac{1}{z}$，$z=1$ 为 $\frac{2z}{1-z}$ 奇点）

定义：若 f 在 z_0 不解析，但在 z_0 每一邻域内，总有若干点使 $f(z)$ 解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点. ☆

§2.2 函数解析的充要条件（C-R条件）

回忆可微概念：增量 $\Delta w = f(z+\Delta z)-f(z) = f'(z)\cdot\Delta z + \rho(\Delta z)|\Delta z|$，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\rho(\Delta z)=0$

$o(\Delta z)$ 或 $o(|\Delta z|)$　$\left(\begin{array}{l}\frac{o(\Delta z)}{|\Delta z|}=\frac{o(\Delta z)}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{|\Delta z|}\to 0\\ \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}=\frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|}\cdot\frac{|\Delta z|}{\Delta z}\to 0\end{array}\right)$

二元实变量 $u(x,y)$ 可微：全增量 $\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)$

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\cdot\Delta y + \underbrace{\rho(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}_{\sim o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)},\quad \rho(\Delta x,\Delta y)\to 0,\ (\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$$

（偏导存在且连续 $\Rightarrow$ 可微 $\Rightarrow$ 偏导存在.）

Motivation：1. 判断函数是否解析，用定义比较难.

2. f 解析与 u, v 的性质有什么联系？

思考：$f(z)$ 在 z 可导（$\Leftrightarrow$可微），记 $f'(z)=A+iB$，$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，$A, B, \Delta x, \Delta y\in\mathbb{R}$. 则

$$f(z+\Delta z)-f(z) = f'(z)\cdot\Delta z + \rho(\Delta z)\cdot|\Delta z|$$

设 $\rho(\Delta z)=\rho_1(\Delta x,\Delta y)+i\rho_2(\Delta x,\Delta y)$，$\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\rho_1,\rho_2\to 0$ as $(\Delta x,\Delta y)\to 0$

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y)+iv(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)$$
$$=A\Delta x - B\Delta y + i(A\Delta y+B\Delta x)+\rho_1|\Delta z|+i\rho_2|\Delta z|$$

$\Rightarrow$ $u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)=A\Delta x-B\Delta y+\rho_1|\Delta z|$　　$|\Delta z|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x,y)=B\Delta x+A\Delta y+\rho_2|\Delta z|$

$\Rightarrow$ u, v 在 (x,y) 可微，且 $A=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$，$B=-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$

定理：$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内一点 $z=x+iy$ 可导 $\Longleftrightarrow$ u, v 在 (x,y) 可微，且满足 Cauchy-Riemann 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.\qquad \text{(C-R条件)}\quad \text{(在 }(x,y)\text{ 点处)}.$$

证明：$\Rightarrow$) 必要性证明如上.

$\Leftarrow$) 若 u, v 在 (x,y) 可微，则 $\exists$ 二元函数 ρ_k，$k=1,2$，满足：$\rho_k(\Delta x,\Delta y)\to 0$，$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$.

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y + \rho_1(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$
$$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\Delta y + \rho_2(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$
$$= -\frac{\partial u}{\partial y}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + \rho_2(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y)^2}$$

$$\Rightarrow\ f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(\Delta x+i\Delta y)+(\rho_1+i\rho_2)(\Delta x,\Delta y)\cdot|\Delta z|$$

故 $f(z)$ 在 $z=x+iy$ 可导 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{(\rho_1+i\rho_2)\cdot|\Delta z|}{\Delta z}=0$　　(*)　　#

（注：有的书把充分和必要条件分开. 注意 $o(\Delta z)$，$o(|\Delta z|)$，$o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$ 等关系！）

推论：① f 在 $z=x+iy$ 可导，则 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$.

② $f=u+iv$ 在 D 内解析 $\Leftrightarrow$ u,v 在 D 内可微且满足 C-R 条件.

注：判断解析，仅需验证 u,v 有无一阶连续偏导. 可微必要！

思考题：极坐标下的 C-R 条件？

例1. 证明 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在零点处满足 C-R 条件但不可导.

证：$u(x,y)=\sqrt{|xy|}$，$v(x,y)=0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=0=\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)$$

（或 $f(x,y)=u+iv$，$u=v=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

在零点 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$.）

即满足 CR 条件. 但 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-0}{\Delta z}$ 不存在. （$\Leftarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x+ikx)}{x+ikx}=\frac{\sqrt{kx^2}}{x+ikx}=\frac{\sqrt{k}}{1+ik}$，$k>0$.）

（若可微，$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$

$\Rightarrow \sqrt{|\Delta x||\Delta y|}=o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$ × $\Rightarrow$ 矛盾.）

例2. 证明 $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析，且 $f'(z)=f(z)$.

证：$f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y=u(x,y)+iv(x,y)$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}$ $\Rightarrow$ 满足 C-R 条件.

$\Rightarrow f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=f(z)$. #

注：根据欧拉公式，可定义：$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$，见下一节.

例3. 设 $f(z)=x^2+axy+by^2+i(cx^2+dxy+y^2)$. 若 f 在 $\mathbb{C}$ 解析，求 a,b,c,d. （课堂略过.）

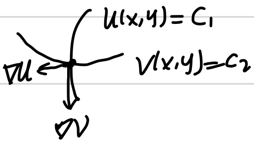
解：$u(x,y)=x^2+axy+by^2$，$v(x,y)=cx^2+dxy+y^2$. 利用 CR 条件 $\Rightarrow$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ $\Rightarrow$ $2x+ay=dx+2y$ $\Rightarrow$ $d=2$，$a=2$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ $\Rightarrow$ $ax+2by=-2cx-dy$ $\Rightarrow$ $c=-1$，$b=-1$. #

例4. 若 $f(z)=u+iv$ 解析且 $f'(z)\neq 0$，则曲线族 $u(x,y)=C_1$ 和 $v(x,y)=C_2$ 相互正交，C_1,C_2 为常数.

证：



$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$，$\nabla v=\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$\nabla u\cdot\nabla v=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0$. #

（例如书 例 1.3.4：$f(z)=z^2$，图 1.3.2，Notes-Chapter 1，例4，§1.1节.）

例5. $f'(z)=0$，$\forall z\in D$（区域）$\Rightarrow f(z)\equiv c$ 常数.

证：由 C-R 条件 $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\equiv 0$. $\Rightarrow f\equiv c$. #

例6. 证明：若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 与 $\overline{f(z)}=u-iv$ 在区域 D 内都解析，则 f 在 D 为常数.

证：f 解析 $\Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$　$\bar{f}$ 解析 $\Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial(-v)}{\partial x}\end{cases}$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$. $\Rightarrow u,v$ 常数 $\Rightarrow f$ 常数. #

例7. 证明：若 f 在区域 D 解析，且 $|f(z)|\equiv C$ 常值，$z\in D$，则 $f(z)$ 也为常数. ☆

证：$C=0$ 时，$f(z)\equiv 0$.　$C\neq 0$ 时，$f(z)\neq 0$，$\overline{f}(z)\neq 0$，且 $f(z)\cdot\overline{f(z)}=C^2$

$\Rightarrow \overline{f(z)}=C^2/f(z)$ 在 $z\in D$ 解析. 由上例知 $f\equiv$ 常值. #

注：§3.4 节最大模原理有用！

另一方法：$|f(z)|=M,\ \forall z\in\partial B(z_0,r)\Rightarrow |f(z)|\equiv|f(z_0)|=M$，$z\in\overline{B}(z_0,r)$，$f=u+iv$　（课堂略过.）

$\Rightarrow u^2+v^2=M^2 \Rightarrow \begin{cases}2uu_x+2vv_x=0\\ 2uu_y+2vv_y=0\end{cases} \overset{\text{C-R条件}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases}uu_x-vu_y=0\\ uu_y+vu_x=0\end{cases}$ 对 u,v 有非零解

$\Rightarrow \begin{vmatrix}u_x & -u_y\\ u_y & u_x\end{vmatrix}=u_x^2+u_y^2=0\Rightarrow u_x=u_y=0\Rightarrow u\equiv$ 常值. 同理 $v\equiv$ 常值 $\Rightarrow f\equiv$ 常值.

§2.3 初等函数

（与书本顺序相反，因为书中2.3节用到 e^z，$\ln z$，但2.4节才定义 e^z，$\ln z$…）

1. 指数函数.

与实函数 e^x 类似，寻找满足

(1) $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 处处可导；(2) $f'(z)=f(z)$；(3) $f(x)=e^x$，$x\in\mathbb{R}$.　　利用例7 $\Rightarrow$

定义：对 $z=x+iy$，定义指数函数：$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cdot e^{iy}$.

性质：(1) $|e^z|=e^x$，　$\operatorname{Arg} e^z=y+2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$.

(2) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$　（利用De Moivre公式）

(3) e^z 以 $2\pi i$ 为周期.　(4) $f'(z)=f(z)$，$z\in\mathbb{C}$，整函数.

2. 对数函数 ▲　（指数函数的反函数.）

定义：满足方程 $e^w=z$ 的函数 $w=f(z)$ 称为对数函数.

令 $w=u+iv \Rightarrow e^u\cdot e^{iv}=z=|z|e^{i\operatorname{Arg} z}$

$\Rightarrow u=\ln|z|$，$v=\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi i$，$k\in\mathbb{Z}$，$\arg z\in(-\pi,\pi]$.

即 $w=f(z)=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z$，多值函数.

记号：$w=\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z$.　若规定 $\operatorname{Arg} z$ 取主值 $\arg z$，则记

$w=\ln z=\ln|z|+i\arg z$，单值函数为 Ln 主值.

$\Rightarrow \operatorname{Ln} z=\ln z+2k\pi i$，$k\in\mathbb{Z}$. 固定 $k\in\mathbb{Z}$，为一个单值函数，称为 $\operatorname{Ln} z$ 的一个分支.

性质：(1) $\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln} z_1+\operatorname{Ln} z_2$，$\operatorname{Ln}\dfrac{z_1}{z_2}=\operatorname{Ln} z_1-\operatorname{Ln} z_2$.　（集合相等!!）

(2) $\dfrac{d}{dz}\ln z=\dfrac{1}{z}$，$-\pi<\arg z<\pi$.　（$z=e^w$ 反函数 $w=\ln z$ 是单值的 $\Rightarrow \dfrac{d}{dz}\ln z=\dfrac{1}{\frac{de^w}{dw}}=\dfrac{1}{z}$.）

☆：$\boxed{\text{即 Ln}z\text{ 的各个分支在除去原点和负实轴的复平面解析.}}$　（沿原点出发的随意一条射线都可以！英译 P72.）

——除去原点与负实轴. $\ln z=\ln|z|+i\arg z$，$\arg z$ 在原点与负实轴不连续.

$x_0<0$，$\lim\limits_{y\to 0+}\arg(x_0+iy)=\pi$，$\lim\limits_{y\to 0-}\arg(x_0+iy)=-\pi$　（$x=0$，$\operatorname{Arg} 0$ 不确定. 不同方向 $\to 0$ 时，角不一样）

例1. 求 $\ln i$, $\mathrm{Ln}\, i$, $\mathrm{Ln}(-1)$.

解: $i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \Rightarrow \ln i = \frac{\pi}{2} i$. $\quad \mathrm{Ln}\, i = \frac{\pi}{2} i + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

$-1 = e^{i\pi} \Rightarrow \mathrm{Ln}(-1) = \pi i + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

注: ①在实数域, $x<0$, $\mathrm{Ln}\, x$ 无意义, 但在复数域有意义, 且 $\mathrm{Ln}\, x$ $(x>0)$ 有无穷多值.

② $\mathrm{Ln}\, z^n \neq n \mathrm{Ln}\, z$, ($nA \neq A+A+\cdots+A \Rightarrow n\mathrm{Ln}\, z \neq \mathrm{Ln}\, z+\cdots+\mathrm{Ln}\, z$). 但 $\mathrm{Ln}\, z^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \mathrm{Ln}\, z$.

3. 幂函数

定义: $a, b \in \mathbb{C}$, $a^b = e^{b \mathrm{Ln}\, a} = e^{b(\ln|a| + i \mathrm{Arg}\, a)}$ ($\mathrm{Arg}\, a$ 的值 $\Rightarrow$ Ln 的值 $\Rightarrow$ a^b 的值)

注: (1) b 为整数 $\Rightarrow a^b = e^{b\ln|a| + i b \arg a} \cdot e^{ib\cdot 2k\pi} = e^{b\ln a}$, 单值.

(2) $b = \frac{p}{q}$, $q>0$, p, q 互质整数 $\Rightarrow$

$$a^b = e^{\frac{p}{q}\ln|a|} \cdot e^{i\cdot\frac{p}{q}(\arg a + 2k\pi)} = e^{\frac{p}{q}\ln|a|}\left[\cos\tfrac{p}{q}(\arg a+2k\pi) + i\sin\tfrac{p}{q}(\arg a + 2k\pi)\right]$$

$\Rightarrow a^b$ 有 q 个值, $k=0,1,2,\cdots,q-1$.

(3) $b \notin \mathbb{Q}$ 时, 有无穷多值.

(4) 给定 a, 复合函数求导 $\Rightarrow (a^z)' = (e^{z\mathrm{Ln}\, a})' \overset{?}{=} \mathrm{Ln}\, a \cdot e^{z\ln a} = \mathrm{Ln} a \cdot a^z$, $\boxed{\text{在各分支有意义且解析.}}$

给定 b, $\Rightarrow (z^b)' = (e^{b\mathrm{Ln}\, z})' \overset{?}{=} b \cdot e^{b\mathrm{Ln}\, z} \cdot \frac{1}{z} = b \cdot z^{b-1}$. $\boxed{\text{在各分支有意义且解析}}$

例2. 求 i^i. 解: $i^i = e^{i\mathrm{Ln}\, i} = e^{i(\ln|i| + i\mathrm{Arg}\, i)} = e^{-\mathrm{Arg}\, i} = e^{\underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{\text{主值}} - 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

求 $(-3)^{\sqrt{5}}$. 解: $(-3)^{\sqrt{5}} = e^{\sqrt{5}\mathrm{Ln}(-3)} = e^{\sqrt{5}[\ln 3 + i(\pi+2k\pi)]} = 3^{\sqrt{5}}[\cos\sqrt{5}(\pi+2k\pi) + i\sin\sqrt{5}(\pi+2k\pi)]$, $k \in \mathbb{Z}$.

$3^{\sqrt{5}}$ $\downarrow$ =? 利用 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密定义.

4. 三角函数和双曲函数

$e^{iy} = \cos y + i\sin y \Rightarrow \cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$, $\sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$

定义: $\forall z \in \mathbb{C}$, $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

注: (1) $z = x$ 时 $\Rightarrow$ $\cos z = \cos x$, $\sin z = \sin x$ 与实三角函数一致.

(2) $\cos z = \cos(-z)$, $\sin z = -\sin(-z)$, 2π 为周期.

(3) $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$.

(4) $\cos z$, $\sin z$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析, 整函数

(5) $e^{iz} = \cos z + i\sin z$.

(6) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$, $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$. $\quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1$

$$\left(\cos z_1\cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \frac{(e^{iz_1}+e^{-iz_1})(e^{iz_2}+e^{-iz_2})}{4} + \frac{(e^{iz_1}-e^{-iz_1})(e^{iz_2}-e^{-iz_2})}{4} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1+z_2).\right)$$

(7) $\cos iy = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \cosh y$, $\sin iy = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = i\sinh y$. ☆ $|\sin iy|, |\cos iy| \to \infty$, $y \to \infty$.

(8) $\cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy$, $\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$= \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y$ $\qquad = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$

(9) $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$，$\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}$，$\sec z=\dfrac{1}{\cos z}$，$\csc z=\dfrac{1}{\sin z}$.

双曲函数定义：$z\in\mathbb{C}$，$\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$，$\sinh z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$，$\tanh z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$.

性质 (1) $2\pi i$ 为周期；(2) $\cosh z$ 偶，$\sinh z$ 奇，复平面$\mathbb{C}$内解析；

(3) $(\cosh z)'=\sinh z$，$(\sinh z)'=\cosh z$；(4) $\cosh iy=\cos y$，$\sin ih=i\sin y$

($\cosh(x+iy)=\cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$，$\sinh(x+iy)=\sinh x\cos y+i\cosh x\sin y$.)

例3. 求 $\cos(\pi+5i)$.

$$\cos(\pi+5i)=\frac{1}{2}\left[e^{i(\pi+5i)}+e^{-i(\pi+5i)}\right]=\frac{1}{2}\left[e^{i\pi}\cdot e^{-5}+e^{-i\pi}\cdot e^{5}\right]=-\frac{1}{2}(e^{-5}+e^{5}).$$

5. 反三角函数与反双曲函数

(书上算了 $\mathrm{Arc}\cos z=-i\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$ 双值. 此处计算 $\mathrm{Arc}\tan z$.)

设 $z=\tan w=\dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{i(e^{iw}+e^{-iw})}\overset{x=e^{iw}}{\Longrightarrow} iz(x+\frac{1}{x})=x-\frac{1}{x}\Rightarrow iz(x^2+1)=x^2-1\Rightarrow x^2(1-iz)=1+iz$

$\Rightarrow x^2=e^{i2w}=\dfrac{1+iz}{1-iz}\Rightarrow w=\dfrac{1}{2i}\mathrm{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$.

同理可定义反正弦 $\mathrm{Arc}\sin z$，反正切 $\mathrm{Arc}\cos z$，反双曲正弦，反双曲余弦，反双曲正弦，反双曲正切. 略.

---

§2.4 调和函数

(这里假设高阶导数存在)

设 $f=u+iv$ 在 D 解析，$\Rightarrow$ CR 条件 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

(此处先默认可微) $\overset{求导}{\Longrightarrow}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

与全增量区别！

$\Rightarrow\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，同理 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，Laplace 方程. 记为 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

定义：u 在D内具有连续二阶偏导数且满足 Laplace 方程，则称 u 为区域D内调和函数.

定理：$f=u+iv$ 在 D 解析，则 u,v 为调和函数.

定义：在D满足C-R条件的调和函数 u,v 称为共轭调和函数.

几何特征：$u(x,y)=C_1$，$v(x,y)=C_2$ 曲线正交.（例4，未讲，§1.2）

定理：$f=u+iv$ 解析 $\Leftrightarrow u,v$ 共轭调和.

推论：给定单连通区域D上调和函数 $\varphi(x,y)$，存在唯一(除去一个常数意义下)的共轭调和函数 $\psi(x,y)$.

故存在唯一解析函数 $f(z)=\varphi+i\psi$（差纯虚数唯一）或 $f(z)=\psi+i\varphi$（差一实数唯一）.

证：(唯一性) 若 ψ_1，ψ_2 均为 φ 共轭调和函数，则 $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$，$\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}=\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$

(或 $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$，$\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}=\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y}=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$) $\Rightarrow\dfrac{\partial(\psi_1-\psi_2)}{\partial x}=\dfrac{\partial(\psi_1-\psi_2)}{\partial y}=0\Rightarrow\psi_1-\psi_2\equiv C$ 常数. #

回忆：Green 公式 $\int_{\partial D}Pdx+Qdy=\iint_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$（P,Q具有连续偏导数，D单连通区域）

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\Leftrightarrow Pdx+Qdy$ 为某函数 h 的全微分，$du=Pdx+Qdy$

$\Leftrightarrow\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关

$\Leftrightarrow\oint_L Pdx+Qdy=0$，L 闭曲线.

给定单连通区域D上调和函数 u，构造共轭 v：由 $(dv(x,y)=) -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$ 定义：(Green定理)

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy + c.$$ 与积分路径无关. ☆

(常数意义下唯一！)

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

例1. 已知 $v(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ $(x>0)$，求解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

解：$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\Rightarrow$ $v(x,y)$ 在右半平面 $(x>0$, 单连通$)$ 是调和的.

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ $\Rightarrow$ $u(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx=\int\frac{\partial v}{\partial y}dx=\int\frac{x}{x^2+y^2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\varphi(y)$

$-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}+\varphi'(y)$ $\Rightarrow$ $\varphi'(y)=0$，$\varphi\equiv C$. 故 $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C$.

$\Rightarrow f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C+i\arctan\frac{y}{x}=\ln|z|+i\arg z+C=\ln z+C.$ #

思考题. 上述求共轭调和函数是在单连通区域，若改为多连通区域？

问：若区域改为 $(x,y)\neq(0,0)$，已知 $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，求 v，结果如何？(多连通区域！)

答：在右半平面共轭调和函数为 $v(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$，但 v 在 $x=0$ 不能定义！故 u 在去心平面上无共轭调和函数. (若存在 $\tilde{v}$ 为 u 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 共轭调和 $\Rightarrow$ $\tilde{v}=v+C$ for $x>0$

$\Rightarrow$ $\tilde{v}$ 在 $x=0$ 不连续无定义)

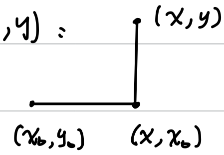
例2. 已知 $u(x,y)=e^x\cos y+x+y$，求满足 $f(0)=1$ 的解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

(课堂略过.)

解：① 验证 $\Delta u=0$. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y+1)=e^x\cos y$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(-e^x\sin y+1)=-e^x\cos y$ $\Rightarrow$ $\Delta u=0$.

② 构造 v. 方法一：$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(e^x\sin y-1)dx+(e^x\cos y+1)dy+C$

先 (x_0,y_0) 沿 x 轴到 (x,y_0)，再从 (x,y_0) 沿 y 轴到 (x,y)：



$$v(x,y)=\int_{x_0}^{x}(e^x\sin y_0-1)\,dx+\int_{y_0}^{y}(e^x\cos y+1)\,dy+C$$

$$=e^x\sin y_0-x-e^{x_0}\sin y_0+x_0+e^x\sin y+y-e^x\sin y_0-y_0+C=e^x\sin y-x+y+C$$

(与书上例2.3.1 取 $(x_0,y_0)=(0,0)$ 一致，取 $(x_0,y_0)=(0,0)$ 可简化计算)

方法二：$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y+1$ $\Rightarrow$ $v(x,y)=e^x\sin y+y+g(x)$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y+g'(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\sin y-1$ $\Rightarrow$ $g'(x)=-1$，$g(x)=-x+C$

故 $v(x,y)=e^x\sin y+y-x+C$.

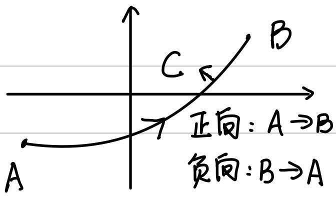
③ 构造 $f(z)$：$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=e^x\cos y+x+y+i(e^x\sin y-x+y+C)$

利用 $f(0)=1$ $\Rightarrow$ $C=0$. $\Rightarrow$ $f(z)=e^z+(1-i)z$. #

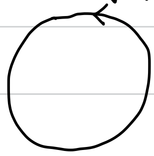
第三章 复变函数的积分 (第五讲)

§3.1 概念.

主要考虑沿曲线的积分，简单光滑（或逐段光滑）有向曲线. 故先定义曲线.



正向: $A \to B$
负向: $B \to A$



闭曲线 C
正向: 逆时针,（内部在左边）
负向: 顺时针, 记为 C^-

换方向发生了什么? $\Delta z_k \to -\Delta z_k$

定义: $w=f(z)$ 在区域 D 定义, 光滑有向曲线 $C \subset D$ 起点 A, 终点 B. $\boxed{\text{分割}}$: $A=z_0, z_1, \cdots, z_n = B\ (\in C)$

(近似) $\boxed{\text{取点}}$: $\zeta_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$ (弧, $k=1,2,\cdots,n$), $\boxed{\text{作和}}$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$

$\boxed{\text{取极限}}$: 记 $\delta = \max_{1\le k\le n} |\widehat{z_{k-1}z_k}|$, 当 $n\to\infty$, $\delta\to 0$ 时, 若 $S_n \to S$, 且 S 与分割和 ζ_k 选取无关, 则称 S 为 f 沿 C 的积分. 记作: $S = \int_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$

若 C 为闭曲线, 记为 $\oint_C f(z)\,dz$.

注:(计算方法) 设 C 参数方程:

$z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. 正向: $t \nearrow$. $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$ 定义! ☆

$f = u + iv$, $\boxed{dz = dx + i\,dy}$ (可从有限和思考此等式!) (第二型曲线积分.)

$$\int_C f\,dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$$
→ (C-R条件 ⇒ 与积分路径无关! $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ☆)

$$= \int_\alpha^\beta [u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)]\,dt + i\int_\alpha^\beta [v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

定理: $f(z)$ 在有界光滑曲线 C 连续, 则 $\int_C f(z)\,dz$ 存在, 且 $\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$

积分性质.

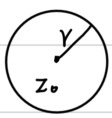
(1) $\int_C f(z)\,dz = -\int_{C^-} f(z)\,dz$; (2) $\int_C kf(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$; ($k$ 为常数)

(3) $\int_C [f(z) \pm g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz \pm \int_C g(z)\,dz$;

(4) 设 C 长度为 L, $|f(z)| \le M$, $z \in C$, 则 $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,ds \le ML$. (估值不等式.) $ds = |z'(t)|\,dt$.

(证: $\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot\Delta S_k \le M\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k$, 其中 $\Delta S_k = |\widehat{z_{k-1}z_k}|$.)

例1. 计算 $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, 其中 C 为以 z_0 为中心, r 为半径的正向圆周, n 为整数.



解: $C = \{z_0 + re^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$, $z(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, $dz(\theta) = z'(\theta)\,d\theta = ire^{i\theta}\,d\theta$

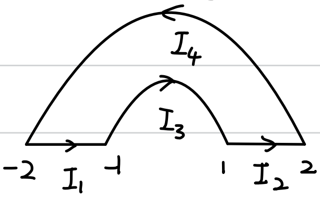
(原因见英译书第4章 41节, P90 或 Notes.)

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{z'(\theta)\,d\theta}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} = \int_0^{2\pi}\frac{i\,d\theta}{r^n e^{in\theta}} = \begin{cases} \left.\frac{-e^{-in\theta}}{nr^n}\right|_0^{2\pi} = 0, & n \neq 0 \\ 2\pi i, & n = 0. \end{cases}$$

即: $$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}$$ (积分与 z_0 和 r 无关. ☆) #

—— 非常重要的积分!

例2. 求 $\oint_C \frac{z}{\bar z}dz$，其中 C 为如下环路：　　(课堂略过.)



$$\oint_C \frac{z}{\bar z}dz = \int_{I_1}+\int_{I_2}+\int_{I_3}+\int_{I_4}\frac{z}{\bar z}dz$$

$$\int_{I_1\cup I_3}\frac{z}{\bar z}dz = \int_{-2}^{-1}1\,dx+\int_{1}^{2}1\,dz = 2.$$

$I_3=\{e^{i\theta}:\theta\in[0,\pi]\}$，$\int_{I_3}\frac{z}{\bar z}dz = \int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}\,i\cdot e^{i\theta}d\theta = i\int_{\pi}^{0}e^{i\cdot 3\theta}d\theta = \frac{e^{i3\theta}}{3}\Big|_{\pi}^{0} = \frac{2}{3}$

$I_4=\{2e^{i\theta}:\theta\in[0,\pi]\}$，$\int_{I_4}\frac{z}{\bar z}dz = \int_{0}^{\pi}\frac{2e^{i\theta}}{2e^{-i\theta}}\,2i\cdot e^{i\theta}d\theta = \frac{2e^{i3\theta}}{3}\Big|_{0}^{\pi} = -\frac{4}{3}.$

(见下面性质2). (正常应该实部虚部分开算!)

$\Rightarrow \oint_C \frac{z}{\bar z}dz = 2+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}.$　　#

例3. 求 $\int_C z\,dz$，C 为 0 到 $3+4i$ 直线.

解：$z(t)=3t+4ti$，$0\le t\le 1$. $\Rightarrow \int_C z\,dz = \int_0^1(3t+4ti)(3+4i)\,dt = (3+4i)^2\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}(3+4i)^2.$

§3.2 Cauchy-Goursat (柯西-古萨)基本定理 (柯西积分定理)

(Goursat：法国数学家 1858-1936. Cauchy 先提出，但对 $f'(z)$ 有连续要求，Goursat 改进)

定理：f 在简单光滑(或逐段光滑)闭曲线(闭路定义!) C 上及其内部 D 解析，则 $\oint_C f(z)dz=0$.

证：$\oint_C f(z)dz = \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy$　　(错! Green公式要一阶偏导连续! 加此条件，Cauchy 19世纪前期证明!)

(格林公式)　$= -\iint_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy \overset{\text{C-R条件}}{=} 0$.　　#

注：(1) 等价形式：f 在单连通区域 B 内解析，则 f 在 B 内任意一条封闭曲线 C 积分为零.

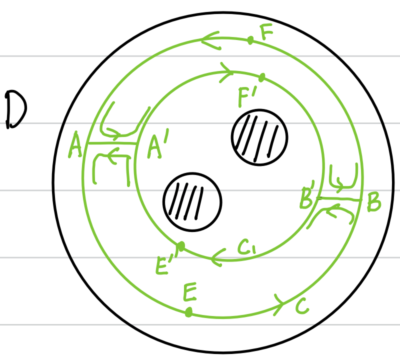
☆ (2) 若 $C=\partial B$，f 在 B 内解析，在 $\bar B$ 连续，则依然 $\oint_C f(z)dz=0$.

(3) 解析仅为充分条件，例如例2中 $n\neq 0$ 时.

☆ (4) $z_1, z_2\in B$，$C_1, C_2\subset B$ 连接 z_1, z_2 的两条逐段光滑(有限段)曲线，则 $\int_{C_1}f(z)dz = \int_{C_2}f(z)dz$.

即与积分路径无关！记为 $\int_{z_1}^{z_2}f(z)dz$. 只有与路径无关时才能这样写!

问：多连通区域发生什么？



D：多连通区域，C 和 C_1 为 D 中两条简单闭曲线

则 $f(z)$ 在 $D_1=\widehat{A'AEBB'E'A'}$ 和 $D_2=\widehat{AA'F'B'BFA}$ 两个闭曲线上及内部解析.

$$\Rightarrow \int_{D_1}f(z)dz = \int_{D_2}f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\cancel{\int_{A'A}}+\int_{\widehat{AEB}}+\cancel{\int_{BB'}}+\int_{\widehat{B'E'A'}}\right)+\left(\cancel{\int_{AA'}}+\int_{\widehat{A'F'B'}}+\cancel{\int_{B'B}}+\int_{\widehat{BFA}}\right)$$

$$= \int_{\widehat{AEBFA}}+\int_{\widehat{B'E'A'F'B'}} = \oint_C + \oint_{C_1^-}$$

$\Rightarrow \oint_C f(z)dz = \oint_{C_1}f(z)dz$　　(联想例2积分与 z_0，r 无关!)

注：$\Gamma = C\cup C_1^-$ 视为闭路，外面逆时针，里面顺时针.

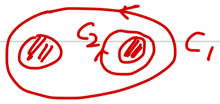
闭路变形原理：解析函数沿闭曲线的积分，不因闭曲线在区域内连续形变（不经过不解析点）而改变其值.

定理（复合闭路定理）：D：多连通区域，$C_k \subset C \subset D$ 简单闭曲线，$k=1,2,\cdots,n$，互不包含，不相交，且以 $C, C_1,\cdots,C_n$ 为边界的区域包含于D. f在D解析，则

i) $\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$，C，$C_k$ 均取正向

ii) $\int_\Gamma f(z)dz = 0$，$\Gamma = C\cup C_1^- \cup\cdots\cup C_n^-$，C正向，$C_k$负向.

$C\cup C_2$ 不行!

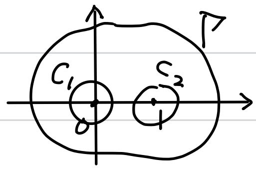


例1：z_0为逐段光滑闭曲线C内一点，求 $\oint_C \frac{1}{z-z_0}dz$.

解：利用例2，取小r使 $B(z_0,r)$ 在C内部，则 $\oint_C \frac{1}{z-z_0}dz = \oint_{\partial B(z_0,r)} \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi i$.

例2：计算 $\oint_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z}dz$，$\Gamma$为包含 $|z|=1$ 在内的任何正向简单闭曲线.

①分析解析区域，②构造合适复合闭路!



解：$f(z) = \frac{2z-1}{z^2-z}$ 除去 $z=0$ 和 $z=1$ 两个奇点外都解析.

$$\oint_\Gamma \frac{2z-1}{z(z-1)}dz = \oint_\Gamma \frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}dz = \oint_{|z|=\frac13} \frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}dz + \oint_{|z-1|=\frac13} \frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}dz = 4\pi i.$$

不定积分与原函数：（单连通区域!）　　（唯一定义，好定义，well defined）

定理：若f在**单连通区域D**内解析，$z_0\in D$，则 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ 在D解析，且 $F'(z)=f(z)$.

证明：$F(z+\Delta z)-F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)-f(z)d\zeta + f(z)\cdot\Delta z$.

取 $z\to z+\Delta z$ 直线路径，则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 当 $|\Delta z|<\delta$ 时

$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$，$\zeta$在 $z, z+\Delta z$ 直线段上.　　（略过）

$$\Rightarrow \left|\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)-f(z)d\zeta\right| \le \varepsilon\cdot|\Delta z|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)-f(z)d\zeta\right| < \varepsilon. \qquad \#$$

定义：若$\varphi'(z)=f(z)$，$z\in D$，则称φ为f在区域D内的一个原函数.　（并不要求D为单连通）

注：(1) φ_1，φ_2 均为f原函数，则 $(\varphi_1-\varphi_2)'=0 \Rightarrow \varphi_1(z)-\varphi_2(z)\equiv C$，$z\in D$，C为常数，

(2) F为f某一原函数，则原函数一般表达式为$F(z)+C$，C为任意常数.

$F(z)+C$ 称为$f(z)$的不定积分，记作 $\int f(z)dz = F(z)+C$.

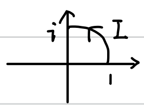
定理（牛莱公式）：若f在**单连通区域D**内解析，$G(z)$是f一原函数，则

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = G(z)-G(z_0)$$

证：由上注 $\Rightarrow \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = G(z)+C$，C为一常数.

取 $z=z_0 \Rightarrow G(z_0)=-C$　（闭路）　$\Rightarrow \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = G(z)-G(z_0)$　#

例3. 计算 $\int_I \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$ 沿弧



解：$\left[\frac12\ln^2(z+1)\right]' = \frac{\ln(z+1)}{z+1} \Rightarrow \int_I \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz = \frac12\ln^2(z+1)\Big|_1^i = \frac12\ln^2(1+i)-\frac12\ln^2 2$

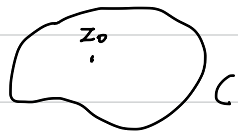
$$= \frac12\left(\ln\sqrt2 + i\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac12\ln^2 2 = -\frac{\pi^2}{32} - \frac38\ln^2 2 + \frac{\pi\ln 2}{8}i. \qquad \#$$

多连通区域能否定义原函数？

§3.3 柯西积分公式 (第六讲)

定理(柯西积分公式): 设 $f(z)$ 在区域D解析, C为D内正向闭路, 内部含于D, z_0在C内部, 则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$



证明: 注意到 (1) $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz$

(2) $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ (复合闭路定理)

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ 当 $|z-z_0|<\delta$ 时 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. 因此, 取 $r<\delta$, 有

$$\left|f(z_0)-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right|\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial B(z_0,r)}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\,ds$$

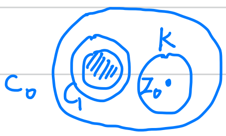
$$\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{r}\cdot 2\pi r=\varepsilon. \qquad \#$$

注: (1) 解析函数边界值已知, 则内部值都确定. ☆ (f在边界内部解析)

(2) 平均值性质: 若C为圆周 $z=z_0+Re^{i\theta}$, 则 Cauchy积分公式可写为:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})\,d\theta.$$ —— 解析函数圆心值 = 圆周平均值.

(3) 多连通区域情形: $C=C_0\cup C_1^-$, 则 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$.



因为 $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C\cup K^-}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=f(z_0)$

(多做练习, 不能仅靠课堂几题 ...)

例1. 求 $\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{z^2+z}\,dz$. 解: $\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{z^2+z}\,dz \overset{\text{复合闭路}}{=} \oint_{|z|=\frac{1}{3}}\frac{e^{2z}}{z(z+1)}\,dz+\oint_{|z+1|=\frac{1}{3}}\frac{e^{2z}}{z(z+1)}\,dz$

$$=2\pi i\left.\frac{e^{2z}}{z+1}\right|_{z=0}+2\pi i\left.\frac{e^{2z}}{z}\right|_{z=-1}=2\pi i(1-e^{-2}). \qquad \#$$

高阶导数公式 (与实函数不同, 复函数在区域D一阶导存在, 则高阶导存在, 内部也可由边界值决定.)

定理: 设 f 在闭路C上及其所围单连通区域D上解析, 则 f在D中有任意阶导数, 且 $z_0\in D$有

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad n=1,2,\cdots.$$

证明: (形式上求导与积分换序即可! 严格证明略!) → 见 Notes.

注: (1) f解析 ⇒ f无穷次可导.

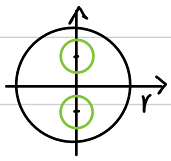
(2) 柯西不等式: $C=\{z=z_0+Re^{i\theta}: 0\leq\theta\leq 2\pi, R>0\}$. $|f(z)|\leq M$, $z\in C$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z_0)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right|\leq\frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R=\frac{n!M}{R^n}. \Rightarrow |f'(z_0)|\leq\frac{M}{R}.$$

(⇒ Liouville定理, 见下文 §3.4应用)

例2. 求 $\oint_{|z|=r}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$, $r>1$.

解:



取 $d<\min\{\frac{r-1}{2},\frac{1}{2}\}$, $C_1=\partial B(-i,d)$, $C_2=\partial B(i,d)$

对 $\{|z|=r\}\cup C_1^-\cup C_2^-$ 利用复合闭路定理得:

$$\oint_{|z|=r}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz=\oint_{C_1}\frac{e^z}{(z-i)^2(z+i)^2}dz+\oint_{C_2}\frac{e^z}{(z-i)^2(z+i)^2}dz$$

$$=2\pi i\left(\frac{e^z}{(z-i)^2}\right)'\Big|_{z=-i}+2\pi i\left(\frac{e^z}{(z+i)^2}\right)'\Big|_{z=i}=2\pi i\left[\frac{e^z}{(z-i)^2}-\frac{2e^z}{(z-i)^3}\right]\Big|_{z=-i}+2\pi i\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}-\frac{2e^z}{(z+i)^3}\right]\Big|_{z=i}$$

$$=2\pi i\left(\frac{e^{-i}}{-4}-\frac{2e^{-i}}{8i}\right)+2\pi i\left(\frac{e^{i}}{-4}-\frac{2e^{i}}{-8i}\right)=\frac{\pi}{2}e^{-i}(-i-1)+\frac{\pi}{2}e^{i}(1-i)=\frac{\pi}{2}(1-i)(e^{i}-ie^{-i})$$

$$=i\pi\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$ #

§3.4. 柯西积分公式的应用.

定理: 若 f 在 $\mathbb{C}$ 有界解析, 则 $f\equiv C$, 常数. (关于整函数的 Liouville 定理)

证: 由上述知: $|f'(z_0)|\le\frac{M}{R}$, $\forall R>0$ $\Rightarrow$ $f'(z_0)=0$, $\forall z_0\in\mathbb{C}$. 故 $f\equiv C$.

(很多PDE方程中"若解满足某些条件, 则解为常数", 这种结论都被称为Liouville type theorem, 原因来自于此。)

代数学基本定理: 任意一个复系数的多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$, $n\ge1$, $a_0\neq0$, 必有零点, 即 $f(z)=0$ 必有解. ($\Rightarrow f(z)=a_0(z-z_1)\cdots(z-z_n)$, 见 Notes)

证明: $\lim_{z\to\infty}F(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{f(z)}=0$ $\Rightarrow$ $F(z)$ 解析有界 $\Rightarrow$ $F(z)\equiv C$, 矛盾. #

定理 (Morrera定理): 设 f 在区域 D 连续, 对于内部属于 D 的任意闭路 C, 有 $\oint_C f(z)dz=0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析。

要连续性!

证明: 好定义: $F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\zeta)d\zeta$, F 解析 $\Rightarrow$ f 解析. (证明与原函数定理证明一样)

定理(最大模原理). f 在开区域 D 解析, 若 $\exists z_0\in D$, s.t. $|f(z_0)|\ge|f(z)|$, $\forall z\in D$, 则 $f\equiv C$, 常值.

推论: 1. D 为有界开区域, f 在 D 解析, $\overline{D}$ 上连续, 且 f 非常值. 则 $|f|$ 最值在 ∂D 取到.

2. f、D 同上, 且 f 无零点, 则 $|f(z)|$ 最小值在 ∂D 取到. (对 $1/f$ 用上定理).

证明定理: (仅证一小步) 设 $z_0\in D$ 满足 $|f(z_0)|=\max_{z\in D}|f(z)|$. 取 $r>0$, s.t., $\overline{B(z_0,r)}\subset D$ $\Rightarrow$

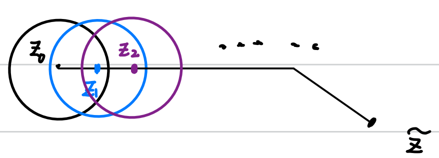
由前面所证平均值性质: $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$ $\Rightarrow$

$$M=|f(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta\le M.$$

$\Rightarrow$ $|f(z)|=M$, $\forall z\in\partial B(z_0,r)$ $\Rightarrow$ $|f(z)|\equiv|f(z_0)|=M$, $z\in\overline{B}(z_0,r)$. $f=u+iv$

§2.2. 例7 $\Rightarrow$ $f(z)\equiv f(z_0)$, $z\in\overline{B}(z_0,r)$ $\Rightarrow$ $f(z)\equiv f(z_0)$, $z\in\overline{B}(z_0,r)$.

剩余思想: $\forall\tilde{z}\in D\setminus\overline{B}(z_0,r)$.



z_0, $\tilde{z}$ 折线连接 ⋯.

第4章 级数（第七讲）

§4.1 复数项级数

1. 级数 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$，$\alpha_n=a_n+ib_n$.

无穷级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$　　部分和：$S_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$

级数收敛：$S_n\to S\in\mathbb{C}$，$n\to\infty$，$S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$　(ε,N)　　级数的和：S

级数发散：$\{S_n\}$不收敛　　绝对收敛：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛　　条件收敛：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$不收敛.

定理1：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$(绝对)收敛$\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都(绝对)收敛.　$\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k| \text{ or } \sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|+\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|\right)$

定理2：若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$也收敛，且$\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right|\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$.

证明：$\Sigma|\alpha_n|$收敛 $\Rightarrow$ $\Sigma|a_n|$，$\Sigma|b_n|$收敛 $\Rightarrow$ Σa_n，Σb_n收敛 $\Rightarrow$ $\Sigma\alpha_n$收敛.

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|\Rightarrow\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|.\qquad\#$$

2. 复变函数项级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots$，$f_n:D\to\mathbb{C}$，$n\in\mathbb{Z}_+$，为一列复变函数.

部分和：$S_n(z)=f_1(z)+\cdots+f_n(z)$

在$z_0\in D$收敛：$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z_0)=S(z_0)$

和函数：若$\Sigma f_n(z)$对$\forall z\in D$收敛，记$S(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z)$.

一致收敛：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{Z}_+$，$n>N\Rightarrow|S_n(z)-S(z)|<\varepsilon$，$\forall z\in D$. 记：$S_n(z)\rightrightarrows S(z)$.

定理3：$f_n:D\to\mathbb{C}$，$n\in\mathbb{Z}_+$. 若$|f_n(z)|\leqslant M_n$，$\forall z\in D$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$在D一致收敛. 证明：略.

一致收敛 $\Rightarrow$ 连续、积分求和换序、导数求和换序.　(Weierstrass M-检定法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$：控制级数、优级数)

定理4(连续、积分、求导)：(1) f_n在区域D连续，$n\in\mathbb{Z}_+$. 若$\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(z)=S_n(z)\rightrightarrows S(z)$，$z\in D$. 则S在D连续.

(2) 逐段光滑简单曲线C长度为L，f_n在C上连续，$n\in\mathbb{Z}_+$. $\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(z)=S_n(z)\rightrightarrows S(z)$，$z\in C$，则$S(z)$在C可积，且

$$\int_C S(z)dz=\int_C\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(z)dz.$$

(3) f_n在区域D解析，$\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(z)=S_n(z)\rightrightarrows S(z)$，$z\in D$. 则S在D解析，且$S^{(p)}(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(p)}(z)$，$p=1,2,\cdots$.

证明：(1) $|S(z)-S(w)|=|S_n(z)-S_n(w)|+|S_n(z)-S(z)|+|S_n(w)-S(w)|=:I_1+I_2+I_3$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N\Rightarrow I_2,I_3<\frac{\varepsilon}{3}$. 先取N，固定$n>N$，再取$\delta>0$，$|z-w|<\delta$时$I_1<\varepsilon/3$.

(2) 由定理4 $\Rightarrow$ S在C连续. 令$S_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}f_k(z)$，$z\in C$. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N\Rightarrow$

$$|S_n(z)-S(z)|<\varepsilon,\ \forall z\in C.$$

$$\left|\int_C S(z)dz-\sum_{k=0}^{n}\int_C f_k(z)dz\right|\leqslant\int_C|S(z)-S_n(z)||ds|\leqslant L\cdot\varepsilon\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\int_C f_n(z)dz=\int_C S(z)dz.$$

(3) $\forall$闭路$C\subset D$，若C内部含于D，则$\oint_C f_n(z)dz=0\overset{(2)}{\Longrightarrow}\oint_C S(z)dz=0\xrightarrow{\text{Morrera定理}}$ S在D解析.

(求导与实函数项级数不一致！见Notes或高等数学下册)

$S^{(P)}(z_0)=\frac{P!}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{S(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{P+1}}d\zeta$，$f_n^{(P)}(z_0)=\frac{P!}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{P+1}}d\zeta$，$P=1,2,\cdots$．$C_r=\{z:|z-z_0|=r\}$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{P+1}}\rightrightarrows\frac{S(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{P+1}}$，$\zeta\in C_r$．$\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $S^{(P)}(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(P)}(z_0)$． #

§4.2 幂级数.

1. 幂级数 $f_n(z)=C_{n-1}(z-a)^{n-1}$，$a\in\mathbb{C}$．$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n=C_0+C_1(z-a)+C_2(z-a)^2+\cdots$

（若记 $\zeta=z-a$，$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\zeta^n$，故仅需研究 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n\zeta^n$.）

定理1 (Abel定理)：(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty}C_nz_0^n$ $(z_0\neq0)$ 收敛，则 $|z|<|z_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 绝对收敛.

(2) 若 $\sum_{n=0}^{\infty}C_nz_0^n$ 发散，则 $|z|>|z_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 发散.

证明：(1) $\sum_{k=0}^{n}|C_k||z|^k=\sum_{k=0}^{n}|C_k||z_0|^k\cdot\left|\frac{z}{z_0}\right|^k\leq M\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{z}{z_0}\right|^k$，其中 M 满足 $|C_nz_0^n|\leq M$，$\forall n\in\mathbb{Z}_+$.

当 $|z|<|z_0|$，则 $q=\left|\frac{z}{z_0}\right|<1$． $\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}|C_k||z|^k\leq M\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\leq\frac{M}{1-q}$ $\Rightarrow$ 绝对收敛

(2) 利用(1)反证．略. #

2. 收敛圆与收敛半径 Abel定理 $\Rightarrow$

级数 $\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 收敛半径定义：$R=\sup\{|z|\mid\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n\text{ 收敛}\}$.

注：若 $\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 收敛半径为R，则 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ 在 $|z-a|<R$ 收敛，在 $|z-a|>R$ 发散.

且在 $|z-a|\leq r$ 一致收敛，$\forall r<R$.

收敛半径求法：

定理2 (d'Alembert 比值法). 若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lambda\in[0,+\infty]$，则收敛半径 $R=\frac{1}{\lambda}=\begin{cases}+\infty, & \lambda=0,\\ \frac{1}{\lambda}, & \lambda\in(0,+\infty),\\ 0, & \lambda=+\infty.\end{cases}$

定理3 (根值法，Cauchy-Hadamard定理，柯西法则).

$C_n\in\mathbb{C}$，若 $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}=\lambda$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 的收敛半径为 $R=\begin{cases}+\infty, & \lambda=0,\\ \frac{1}{\lambda}, & 0<\lambda<+\infty,\\ 0, & \lambda=+\infty.\end{cases}$

证：与实一样，略.

例1. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 收敛半径与和函数. ☆ 展开成幂级数！

解：可利用定理2、3 知 $R=1$． 也可用定义求解如下：

$S_n(z)=1+z+\cdots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}$． 当 $|z|<1$ $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}z^n=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\frac{1}{1-z}$．

当 $|z|=1$，$z\neq1$ 时，$\exists\theta\in(0,2\pi)$，$z=e^{i\theta}\Rightarrow z^n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 不收敛 $\Rightarrow S_n(z)$ 不收敛.

由Abel定理 $\Rightarrow|z|>1$ 发散． 故收敛半径为1，和函数为 $\frac{1}{1-z}$． #

例2. 求收敛半径：1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^3}$（并讨论在收敛圆周上的情形） 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$（$z=0,2$ 情形）

解：1) $C_n=\frac{1}{n^3}$ $\Rightarrow$ $\frac{C_{n+1}}{C_n}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^3\to1$，$n\to\infty$． $\Rightarrow R=1$ （或 $\sqrt[n]{C_n}=\sqrt[n]{n^3}\to1$）

当 $|z|=1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 为P级数，P=3,收敛.

2) $C_n=\frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $\frac{C_{n+1}}{C_n}=\frac{n}{n+1}\to1$ $\Rightarrow R=1$． 在 $|z-1|=1$ 内收敛.

$z=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 为交错级数，由Leibniz准则（交错级数审敛法：$\lim_{n\to\infty}a_n=0$；$a_n\geq a_{n+1}$）$\Rightarrow$ 收敛.

$z=2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 为调和级数，发散.

注：例1中边界 $|z|=1$ 上均不收敛，例2. 1) 中边界均收敛且绝对收敛. 2) 中 ··· $\left|\frac{z-a}{b-a}\right|<1$，b处不解析！

例3. 把 $\frac{1}{z-b}$ 表示成 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a,b\in\mathbb{C}$，$a\neq b$. （利用§4.2 例1：$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$.）

解：$\frac{1}{z-b}=\frac{1}{z-a+a-b}=-\frac{1}{b-a-(z-a)}=-\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}\right)=-\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$，$C_n=-\frac{1}{(b-a)^n}$ 收敛半径为 $|b-a|$. #

定理4. 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ 收敛半径为R，则

1) $f(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析. 2) $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nC_n(z-a)^{n-1}$

3) $\int_C f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\int_C(z-a)^n dz$，$C\subset\{|z-a|<R\}$，

$\int_a^z f(\zeta)d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$.

幂级数的运算：加减乘除，与实函数类似，这里不做详细介绍.

证明：利用一致收敛相关结果容易证明.

问：一个解析函数能否写成幂级数？

思路：$f(z)=\oint_K\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$. $z\in B(z_0,r)$，$K=\partial B(z_0,r)$

§4.3 泰勒级数

定理1 (Taylor展开定理). 设函数 f 在 $B(z_0,R)$ 内解析，则

(*) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)$，$|z-z_0|<R$，$C_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$，$n=0,1,2,\cdots$. $r<R$.

证明：设 $|z-z_0|<R$，取r满足 $|z-z_0|<r<R$，$K=\{\zeta:|\zeta-z_0|=r\}\Rightarrow f$ 在K及其内部解析.

柯西积分公式 $\Rightarrow f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$. 利用§4.2中例3有

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}},\quad \text{收敛半径为 } r.$$

$$\Rightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}，\text{当 } \zeta\in K \text{ 时，} \left|f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right|\leq M\cdot\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n$$

$\xRightarrow{\S4.1\text{定理}3}$ 级数关于 $\zeta\in K$ 一致收敛到 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$，则由§4.1定理4,(2)可得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\sum_{n=0}^{\infty}f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\cdot(z-z_0)^n.\quad \#$$

定义：(*) 称为 $f(z)$ 在 z_0 的Taylor展开式，右端为Taylor级数. $z_0=0$ 时，称为Maclaurin展开.

注：唯一性：设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$，在 $|z-z_0|<d$ 收敛，根据定理4逐项求导性质：

$\Rightarrow f(z_0)=a_0$，$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$，··· $n=1,2,$

常用Taylor展开：

① $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$，$|z|<1$，

② $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$，$z\in\mathbb{C}$，

③ $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$，$z\in\mathbb{C}$，

$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

④ $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots$，$z\in\mathbb{C}$，

$\int_0^z\frac{1}{1+\zeta}d\zeta$

⑤ $\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots$，$|z|<1$，

⑥ $(1+z)^\alpha=e^{\alpha\ln(1+z)}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots$，$|z|<1$

例1：求幂函数 $(1+z)^{\alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{C})$ 的主值支：$f(z)=e^{\alpha\ln(1+z)}$，在 $z=0$ 处的 Taylor 展开式.

解：设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$. $\Rightarrow f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}$，

由 $f'(z)=\alpha f(z)\cdot\frac{1}{1+z}$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha a_n z^n=\alpha f(z)=(1+z)f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}na_n z^n$

z^0 项 $\Rightarrow$ $a_0\alpha=a_1$ 　由 $f(0)=1\Rightarrow a_0=1$ $\Rightarrow a_1=\alpha$.

z^1 $\Rightarrow \alpha a_1=2a_2+a_1$ $\Rightarrow a_2=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$ $\cdots$ z^{n}: $a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$. #

注：f 在 z_0 解析 $\Leftrightarrow$ f 可展开成收敛幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$.
(实解析，见Notes.)

§4.4 洛朗级数. (中心展开！)

问：若 f 在 z_0 不解析，能否展开成幂级数？或展开成什么形式的级数？

定义：称形如 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ 的级数为洛朗级数，其中 $a, c_n\in\mathbb{C}$，$n\in\mathbb{Z}$. 若 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ (解析部分) 与 $\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}$ (主要部分) 同时收敛，则称洛朗级数收敛. 即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}c_k(z-a)^k+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}c_{-k}(z-a)^{-k}$.

思考：令 $\zeta=(z-a)^{-1}$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\zeta^n$，收敛半径若为 R，$|\zeta|<R$ 收敛，$|\zeta|>R$ 发散 $\Rightarrow$
$|z-a|>\frac{1}{R}=:R_1$ 收敛，$|z-a|<R_1$ 发散. 设 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 收敛半径为 R_2.
当 $R_2>R_1$ 时 $\Rightarrow$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 在 $R_1<|z-a|<R_2$ 收敛
当 $R_2<R_1$ 时 $\Rightarrow$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 发散

注：同§4.2 定理4 可证：洛朗级数在收敛圆环域解析，且可逐项求导、求积分.

问：圆环域解析的 f 能否展开成洛朗级数？

定理1 (Laurent 洛朗展开定理)：若 f 在 $R_1<|z-z_0|<R_1$ $(0\le R_1<R_2\le+\infty)$ 解析，则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\quad n\in\mathbb{Z}.$$
(c_n 与 z 无关！ c_n 不一定等于 $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$)

其中 C 为圆环域内任意一条绕 z_0 的闭路，且 f 在 z_0 的洛朗展开唯一. 证明：略.

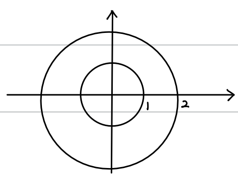
注：(唯一性) 设 z 为环形区域内一点，C 为环域内绕 z_0 闭路，则若 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$，
则两边同时乘以 $(z-z_0)^{-p-1}$ 再沿 C 积分有： (略)

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{p+1}}dz=\oint_C\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^{n-p-1}dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\oint_C a_n(z-z_0)^{n-p-1}dz=2\pi i\cdot a_p.$$

定理给出的公式有时并不好用，可用其它方法求解洛朗级数.

例1：把 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在下环中展成洛朗级数：

i) $0<|z|<1$； ii) $1<|z|<2$； iii) $2<|z|<+\infty$.



解：$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$. 两个奇点：$z=1$，$z=2$.

i) $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内均解析，故与 Taylor 展开一致！ $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$，$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$

$\Rightarrow$ $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$. (同学们可以尝试用乘法：$\left(\sum_{0}^{\infty}z^n\right)\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right)$.)

ii) 环域在 $z=1$ 外面，在 $z=2$ 里面．故：$\left|\frac{1}{z}\right|<1$，$\left|\frac{z}{2}\right|<1$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}. \qquad \frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

iii) 环域在 $z=1,2$ 的外面，$\left|\frac{1}{z}\right|, \left|\frac{2}{z}\right|<1$. $\Rightarrow$ $\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$

$$\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \Rightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1}-1)\cdot z^{-n}.$$

例2. $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<\infty$ 展成洛朗级数.

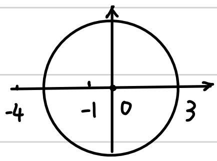
解：$f(z) = z^3\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right) = z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\cdots$. #

注：(1) 同一中心，由奇点隔开的不同环域，展开不同.（与唯一性比较理解！）

(2) 洛朗级数公式中 $C_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz$ 或 $\oint_c f(z)dz = 2\pi i C_{-1}$，即求积分可转化为求级数系数.

例3. 求积分：1) $\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)(z+4)}dz$；　2) $\oint_{|z|=2}\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$

解：1) 把 $\frac{1}{z(z+1)(z+4)}$ 在 $1<|z|<4$ 展开成 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_nz^n$，则 积分 $=2\pi i C_{-1}$.



$$\frac{1}{z(z+1)(z+4)} = \frac{1}{4z} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{z+4}$$ （也可以考虑：$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+4}\right)$）

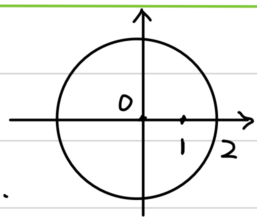
$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z}\left(\frac{-1}{z}\right)^n, \qquad \frac{1}{z+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z}{4})} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z(z+1)(z+4)} = \frac{1}{4}\cdot z^{-1} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^{-n-1} + \frac{1}{48}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)(z+4)}dz = 2\pi i C_{-1} = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)2\pi i = \frac{-1}{12}\cdot 2\pi i = \frac{-\pi i}{6}.$$

思考：为什么选 $1<|z|<4$？
展开成洛朗级数，环域内解析！又积分闭路 $|z|=3$ 要为环内绕展开点的闭路！
——由洛朗展开定理.

2). 把 $\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ 在 $1<|z|<\infty$ 展开，积分 $=2\pi i C_{-1}$.



$$ze^{\frac{1}{z}} = z\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots\right) = z+1+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!z^2}+\cdots$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right) = -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z} = \left(z+1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3!z^2}+\cdots\right)\left(-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots\right) \Rightarrow C_{-1} = -1-1 = -2$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=2}\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz = 2\pi i C_{-1} = -4\pi i.$$

#

补充例题：

例1. 求 $\ln\frac{1+z}{1-z}$ 的 Maclaurin 展开.

（先证：在 $|z|<1$ 内有 $\ln\frac{1+z}{1-z}=\ln(1+z)-\ln(1-z)$）

例2. 求 $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 的 Maclaurin 展开.

（可用乘法或部分分式分解后用减法）

例3. 求 $\tan z$ 到五次项的 Maclaurin 展开.

（利用 $\cos z\cdot\tan z=\sin z$ 计算）

例4. 求 $e^{\frac{z}{1-z}}$ 的 Maclaurin 展开.

（e^f 展开，$f=\frac{z}{1-z}$ 展开，结合起来计算 z^n 前系数）

例5. 求 $\frac{1}{z(i-z)}$ 在 $0<|z-i|<1$ 上的洛朗展开.

例6. 求 $\sin\frac{1}{1-z}$ 在 $|z-1|>0$ 上的洛朗展开.

第五章 留数 （第九、十讲）

§5.1 孤立奇点

1. 定义：f在z_0不解析，但$\exists\delta>0$, s.t.，f在$\mathring{B}(z_0,\delta)$解析，则称z_0为f孤立奇点.

设$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$, $0<|z-z_0|<\delta$，则：（必须在孤立奇点处展开！）

(1) 若$n<0$时$C_n=0$，即无负幂项时，z_0为f可去奇点（removable singularity）.

(2) 若$\exists m>0$使$n<-m$时，$C_n=0$且$C_{-m}\neq0$，则称z_0为f的m阶极点(Pole).（或m级极点，pole of order m.）

(3) 若有无穷多C_n $(n<0)$不等于零，则z_0为f本性奇点（essential singularity）

例1：① $\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots$，0为孤立奇点，是可去奇点.

② $\frac{1}{(z-i)^3}$，i为孤立奇点，是3阶极点.

③ $e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{z^{-2}}{2!}+\cdots+\frac{z^{-n}}{n!}+\cdots$，0为孤立奇点，是本性奇点.（$z_n\to0$，$e^{\frac{1}{z_n}}$可收敛到任何点！见Notes）

④ $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$，$z=0$，$z=\frac{1}{n\pi}$，$n=\pm1,\pm2,\cdots\Rightarrow\forall\mathring{B}(0,\delta)$中均有奇点，故0非孤立奇点.

定理1：z_0为f孤立奇点，洛朗展开$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$，$z\in\mathring{B}(z_0,\delta)$，$\delta>0$. 则

(1) z_0为$f(z)$可去奇点 $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to z_0}f(z)$存在（且有限）

(2) z_0为$f(z)$极点 $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$ 或 $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$.（$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0$）

(3) z_0为$f(z)$本性奇点 $\Leftrightarrow$不存在有限或无穷的极限.

$\boxed{\text{可去奇点、本性奇点似乎没什么好研究的. 极点有很多性质可研究}\cdots}$

证明：(1) $\Rightarrow$) 由定义，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ 在$\mathring{B}(0,\delta)$收敛，故右端幂级数收敛半径$R\geq\delta$. 因此 $F(z):=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$

在$B(z_0,\delta)$解析 $\Rightarrow f(z)=F(z)$，$z\in\mathring{B}(z_0,\delta)\Rightarrow\lim_{z\to z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}F(z)=F(z_0)=C_0$.（故可定义$f(z_0)=C_0$，则$f=F$在$B(z_0,\delta)$解析 故"$z_0$可去"）

$\Leftarrow$) 若$\lim_{z\to z_0}f(z)$极限存在，则$\exists M>0$, $\delta_0<\delta$, s.t.，$0<|z-z_0|\leq\delta_0$时 $|f(z)|<M$. 则由

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z_0|=\delta_0}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\Rightarrow|C_n|\leq\frac{M}{2\pi}\delta_0^{-n-1}\cdot2\pi\cdot\delta_0=M\cdot\delta_0^{-n}.$$ 当$n<0$时，由$\delta_0\in(0,\delta)$任意性 $\Rightarrow C_n=0$.

(2) $\Rightarrow$)显然. $\Leftarrow$) $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty\Rightarrow\exists0<\delta_0<\delta$, s.t.，$|f(z)|>0$，$z\in\mathring{B}(z_0,\delta_0)$. 令$F(z)=\frac{1}{f(z)}\Rightarrow\lim_{z\to z_0}F(z)=0$且$F(z)\neq0$，$z\in\mathring{B}(z_0,\delta_0)$.

由(1) $\Rightarrow z_0$为F可去奇点，取$F(z_0)=0\Rightarrow F(z)$在$B(z_0,\delta_0)$解析，$F(z)=a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$

由于$F(z)\neq0$，$z\neq z_0$，$\exists m\in\mathbb{Z}_+$，s.t.，$a_1=\cdots=a_{m-1}=0$，$a_m\neq0$（使$a_m\neq0$的第一个m）

$\Rightarrow F(z)=(z-z_0)^m[a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots]=(z-z_0)^mG(z)$（$G=\frac{F}{(z-z_0)^m}$在$B(z_0,\delta_0)$解析，且$G(z)\to a_m$ $z\to z_0$）

$\Rightarrow G(z)$在$B(z_0,\delta_0)$解析且$G(z)\neq0$，$\forall z\in B(z_0,\delta_0)$. 令$g(z)=1/G(z)$ $\Rightarrow g$在$B(z_0,\delta_0)$解析且$g(z)\neq0$

$\Rightarrow f(z)=(z-z_0)^{-m}\cdot g(z)=(z-z_0)^{-m}\left[\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n\right]$，$z\in\mathring{B}(z_0,\delta_0)$，$b_0=g(z_0)\neq0$， 由洛朗级数唯一性

$\Rightarrow z_0$为f在$\mathring{B}(z_0,\delta)$的m级极点，$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$，$0<|z-z_0|<\delta$.

(3) 由(1),(2)可得. #

推论1：(1) z_0为f可去奇点 $\Leftrightarrow$ f在$\mathring{B}(z,\delta)$解析且有界.

(2) z_0为f m阶极点 $\Leftrightarrow$ $\exists g(z)$在$B(z_0,\delta)$解析，且$g(z_0)\neq0$，s.t.，$f(z)=(z-z_0)^{-m}g(z)$.

(3) z_0为f本性奇点，则$\forall A\in\mathbb{C}$，$\exists z_n\to z_0$，s.t.，$f(z_n)\to A$.

证明：由定理1易得.（(3)的证明见Notes）

判断奇点的方法：①定义，洛朗级数 ②定理｜算极限. ③与零点的关系.

2. 极点与零点关系.

定义：若 f 在 z_0 解析，$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，φ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$，则 z_0 为 f 的 m 阶零点.（或 m 级零点 Zero）

命题1：z_0 为 f m 阶零点 $\Leftrightarrow$ f 在 z_0 解析，且 $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$，$f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

证：$\Rightarrow$）由定义 $\exists\,\varphi$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$，s.t.，$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$. 设 $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ 且 $C_0\neq 0$

$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^{n+m}\xRightarrow{\text{逐项求导}}$ 结论！

$\Leftarrow$）由于 f 在 z_0 解析，$\exists\,\delta>0$，s.t. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$，$z\in B(z_0,\delta)$. 由 $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$

$\Rightarrow a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0$. 由 $f^{(m)}(z_0)\neq 0\Rightarrow a_m\neq 0$. 故 $f(z)=(z-z_0)^m\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+m}(z-z_0)^n\right]$，$z\in B(z_0,\delta)$

令 $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+m}(z-z_0)^n=\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^m}$，$z\in \mathring{B}(z_0,\delta)$. $\xRightarrow{\text{Abel定理}}$ $\varphi(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 解析，且 $\varphi(z_0)=a_m\neq 0$. #

注：(见第四章Notes：零点孤立定理）一个不恒为零的解析函数的零点是孤立的. 解释：设 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$，其中 $\varphi(z_0)\neq 0$，f,φ 解析. $\Rightarrow \exists\,\delta>0$，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，$|\varphi(z)|>\dfrac{|\varphi(z_0)|}{2}$ $\Rightarrow f(z)\neq 0$，$0<|z-z_0|<\delta$.

定理2. z_0 为 f 的 m 级极点 $\Leftrightarrow$ z_0 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点

证明：$\Rightarrow$）z_0 为 f m 级极点，则 $\exists\, g$ 在 $B(z_0,\delta)$ 解析，$g(z_0)\neq 0$，且 $f(z)=(z-z_0)^{-m}g(z)$（推论1,(2)）

$\Rightarrow \dfrac{1}{g(z)}$ 在 z_0 解析，且 $\dfrac{1}{g(z_0)}\neq 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\dfrac{1}{g(z)}$ $\Rightarrow$ z_0 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点.

$\Leftarrow$）证明类似，略. #

例2. 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 有什么奇点？若为极点，几阶？

解：$\sin z\neq 0$ 时 $\dfrac{1}{\sin z}$ 解析，所以 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的奇点仅可能为 $\sin z$ 的零点.（奇点定义）

$\sin z=0\Rightarrow z=k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$. 即 $k\pi$ 为 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的孤立奇点. 又 $\lim\limits_{z\to k\pi}\dfrac{1}{\sin z}=\infty$，故 $k\pi$ 为极点.

又 $\sin k\pi=0$，$\sin' z\big|_{z=k\pi}=\cos k\pi=(-1)^k\neq 0$，故 $k\pi$ 为一阶极点，$\forall k\in\mathbb{Z}$.

例3. 判断 $z=0$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z^3}$ 几级极点？ 解：$e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots\Rightarrow$

$\dfrac{e^z-1}{z^3}=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{2!z}+\dfrac{1}{3!}+\cdots=\dfrac{1}{z^2}\left(1+\dfrac{z}{2!}+\dfrac{z^2}{3!}+\cdots\right)$ $\Rightarrow$ $z=0$ 是二阶极点. #

思考题：若 f 在 z_0 有 m 阶极点（零点），g 在 z_0 有 n 阶极点（零点），则 $f\pm g$，$\dfrac{f}{g}$，$\dfrac{g}{f}$ 在 z_0 分别有多少阶极点（零点）？

（思路：利用推论1,(2)与零点定义）☆

（$z=0$ 为 e^z-1 的一阶零点，为 z^3 的三阶零点. $\Rightarrow$ 为 $\dfrac{e^z-1}{z^3}$ 的二阶极点）

例4. $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$ 极点？

解：分别分析 $1+z^2$，$1+e^{\pi z}$，$\sin\frac{\pi}{z}$ 的零点.

$1+z^2\big|_{z=\pm i}=0$，$(1+z^2)'\big|_{z=\pm i}\neq 0$ $\Rightarrow$ $\pm i$ 为 $1+z^2$ 一阶零点.

$z_k=(2k+1)i$，$k\in\mathbb{Z}$，$1+e^{\pi z_k}=0$，但 $(1+e^{\pi z})'\big|_{z=z_k}=\pi e^{\pi z_k}=-\pi\neq 0$. z_k 为 $1+e^{\pi z}$ 一阶零点.

$\tilde{z}_k=\dfrac{1}{k}$，$k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ $\Rightarrow$ $\sin\dfrac{\pi}{\tilde{z}_k}=0$，$\left(\sin\dfrac{\pi}{z}\right)'\big|_{z=\tilde{z}_k}\neq 0$. $\tilde{z}_k$ 为 $\sin\frac{\pi}{z}$ 一阶零点，$k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

$\Rightarrow$ $z=\pm i$ 为 f 二阶极点；z_k，$k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}$，$\tilde{z}_k$，$k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 为 f 一阶极点.（$z=0$ 为非孤立奇点.）#

3. 无穷远点. (回忆: $\mathring{B}(\infty,\delta)=\{|z|>\frac{1}{\delta}\}$, $B(\infty,\delta)=\{|z|>\frac{1}{\delta}\}\cup\{\infty\}$)

定义: 若 f 在 ∞ 去心邻域 $\mathring{B}(\infty,\delta)=\{z:\frac{1}{\delta}<|z|<+\infty\}$ 解析, 则称 ∞ 为 f 孤立奇点.

思考: 令 $w=\frac{1}{z}$, 把 ∞ 变为 0. 则 $z_n\to\infty \Rightarrow w_n=\frac{1}{z_n}\to 0$. $z\in\mathring{B}(\infty,\delta)\to w\in\mathring{B}(0,\delta)$.

令 $\varphi(w):=f(\frac{1}{w})=f(z)$ $\Rightarrow$ $\varphi:\mathring{B}(0,\delta)\to\mathbb{C}$. $\Rightarrow$ φ 在 $\mathring{B}(0,\delta)$ 解析, 0为 φ 孤立奇点.

定义: 若 0 为 φ 可去奇点, m阶极点或本性奇点, 则称 ∞ 为 f 的可去奇点, m阶极点或本性奇点.

与洛朗级数关系: f 在 $R=\frac{1}{\delta}<|z|<+\infty$ 展开:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}z^{-n}+C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n z^n,\qquad C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta,\ n\in\mathbb{Z},$$ C 为 $\mathring{B}(\infty,\delta)$ 内绕 0 闭路.

$\varphi(w)$ 在 $0<|w|<\delta$ 有: $\varphi(w)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}w^n+C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n w^{-n}$.

(1) 若 $n>0$ 时, $C_n=0$, 则 ∞ 为 f 可去奇点, $\lim_{z\to\infty}f(z)$ 存在.

(2) 若 $\exists\, m>0$, s.t., $C_m\neq 0$, $C_n=0$, $n>m$, 则 ∞ 为 f 的 m 阶极点, $\lim_{z\to\infty}f(z)=\infty$.

(3) 若有无穷多 $C_n\neq 0$ $(n>0)$, 则 ∞ 为 f 本性奇点. $\lim_{z\to\infty}f(z)$ 不存在.

例5. ∞ 是否为 f 孤立奇点? 何种类型? ① $f(z)=\frac{1}{\sin z}$; ② $f(z)=\frac{1}{z}$; ③ $f(z)=\frac{z}{1+z}$

解: ① $\varphi(w)=f(\frac{1}{w})=\frac{1}{\sin\frac{1}{w}}$, $w=0$ 非孤立奇点 $\Rightarrow$ ∞ 不是 f 的孤立奇点.

② $\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0$, 故 ∞ 为 f 可去奇点.

③ $\lim_{z\to\infty}\frac{z}{1+z}=0$, 故 ∞ 为 f 可去奇点. (另一思路: 在 $1<|z|<\infty$ 展开: $f(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots$

正幂项全为零 $\Rightarrow$ ∞ 为 f 的可去奇点. 若 $f(\infty)=1$, 则 f 在 ∞ 解析. (φ 在 0 解析))

例6. 分析 $f(z)=\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 内的奇点.

解: 设 $F(z)=(z^2-1)(z-2)^3$, $G(z)=(\sin\pi z)^3$. 则 $z=\pm1$ 为 F 的一阶零点, $z=2$ 为 F 三阶零点.

$z_k=k\in\mathbb{Z}$ 为 $G(z)$ 的三阶零点. (因为 z_k 为 $\sin\pi z$ 的一阶零点)

故, $z=\pm1$ 为 $f=\frac{F}{G}$ 的二阶极点, $z=2$ 为 $f=\frac{F}{G}$ 的可去奇点,

z_k, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{\pm1,2\}$, 为 $f=\frac{F}{G}$ 的三阶极点.

∞: 由例5 ① 易知, $z=\infty$ 不是 f 的孤立奇点. (也可如下分析: $\varphi(w)=f(\frac{1}{w})=\frac{[(\frac{1}{w})^2-1](\frac{1}{w}-2)^3}{(\sin\frac{\pi}{w})^3}=\frac{(1-w^2)(1-2w)^3}{w^5(\sin\frac{\pi}{w})^3}$, $w=0$, $\frac{1}{n}$ 为奇点 $\Rightarrow$ 0 非孤立奇点)

---

§5.2 留数 (Residue)

1. 定义: 若 z_0 为 f 孤立奇点, f 在 $\mathring{B}(z_0,\delta)$ 解析, $C\subset\mathring{B}(z_0,\delta)$ 为绕 z_0 闭路, 则称 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$ 为 f 在 z_0 点的留数, 记作: $\text{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$.

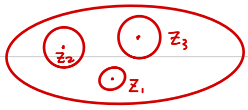
解释: $\oint_C f(z)dz=\oint_C\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n dz=2\pi i\,C_{-1}$. C_{-1} 称为 f 在 z_0 的留数 ("留下的" 积分值除以 $2\pi i$),

§3.1, 例1.

即: $\text{Res}[f(z),z_0]=C_{-1}$.

此时 C 内仅 z_0 不解析, 若有其它不解析点呢? $\Rightarrow$

定理1(柯西留数定理) 设f在区域D内除有限个孤立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$外处处解析. C是D内包围z_k ($k=1,\cdots,n$)点的一条闭路，则 $\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$



证明：利用复合闭路定理. #

由洛朗级数计算留数： $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$.

① 若z_0为f一阶极点， $f(z) = c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots$

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$ —— 规则I.

② 若z_0为f m阶极点， $f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + c_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} + \cdots$

$$(z-z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \cdots$$

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] \overset{k\geq m-1}{=\!=} \frac{1}{k!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^k}{dz^k}\left[(z-z_0)^{k+1}f(z)\right]$$ —— 规则II.

③ 若$f(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$，F、G都在z_0解析，$F(z_0)\neq 0$，$G(z_0)=0$，$G'(z_0)\neq 0$ $\Rightarrow$ z_0为f一阶极点.

$G(z) = a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots = (z-z_0)\cdot g(z)$，其中$g$在$z_0$解析，且$g(z_0) = a_1 = G'(z_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ $f(z) = \frac{1}{z-z_0}\frac{P(z)}{g(z)}$

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{F(z)}{g(z)} = \frac{F(z_0)}{G'(z_0)} \left(= \frac{F(z_0)}{g(z_0)}\right)$$ —— 规则III.

例1. 计算 $\oint_{|z|=2}\frac{ze^z}{z^2-1}dz$. 解: $z=1$, $z=-1$为$f(z)=\frac{ze^z}{z^2-1}$的一阶极点. 故

$$\oint_{|z|=2}\frac{ze^z}{z^2-1}dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),1] + \mathrm{Res}[f(z),-1]\right) = 2\pi i\left[\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) + \lim_{z\to -1}(z+1)f(z)\right] = \pi i(e+e^{-1}) = 2\pi i\cdot\cosh 1.$$

方法二：规则III，略. #

例2. 计算 $\oint_{|z|=2}\frac{z}{z^4-1}dz$. (对比例5!)

解：$f(z) = \frac{z}{z^4-1}$ 有4个一阶极点：$z_k = i^k$，$k=1,2,3,4$. $z^4 = (z+i)(z-i)(z+1)(z-1)$

$\mathrm{Res}[f(z), i] = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{i}{2i(i+1)(i-1)} = -\frac{1}{4}$，$\mathrm{Res}[f(z),-i] = \lim_{z\to(-i)}(z+i)f(z) = \frac{-i}{-2i(-i+1)(-i-1)} = -\frac{1}{4}$，

$\mathrm{Res}[f(z),1] = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \frac{1}{(1+i)(1-i)\cdot 2} = \frac{1}{4}$， $\mathrm{Res}[f(z),-1] = \frac{1}{4}$ $\Longrightarrow$ $\oint_{|z|=2}f(z)\,dz = 0$.

规则三容易：$f(z) = \frac{F(z)}{G(z)} = \frac{z}{z^4-1}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}[f(z), z_k] = \frac{F(z_k)}{G'(z_k)} = \frac{z_k}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k^2}$. #

例3. 计算 $\oint_{|z|=2}f(z)\,dz$，$f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2}$.

解：$z_1=0$为$f(z)$一阶极点，$z_2=1$为f二阶极点. 故

$$\oint_{|z|=2}f(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),0] + \mathrm{Res}[f(z),1]\right)$$
$$= 2\pi i\lim_{z\to 0}[zf(z)] + 2\pi i\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 f(z)\right] = 2\pi i\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2} + 2\pi i\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{e^z}{z} = 2\pi i.$$

例4. 计算 $\mathrm{Res}[f(z),0]$，$f(z) = \frac{z-\sin z}{z^6}$.

解：令$P(z) = z-\sin z$，则$P(0)=P'(0)=P''(0)=0$，$P'''(0)\neq 0$. 即$z=0$为$P(z)$三阶零点，故为f三阶极点.

$$\mathrm{Res}[f(z),0] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right]$$ ··· 不简单，有没有简单方法？

方法一. 在$0<|z|<\infty$展开：$f(z)=\frac{1}{z^6}\left[z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\right]=\frac{z^{-3}}{3!}-\frac{z^{-1}}{5!}+\frac{z}{7!}-\cdots$

故 $\mathrm{Res}[f(z),0]=C_{-1}=-\frac{1}{5!}$.

方法二. 利用规则Ⅱ中另一公式：$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}\frac{d^5}{dz^5}\left[z^6\cdot\frac{z-\sin z}{z^6}\right]=-\frac{1}{5!}$.

思考题：$\oint_{|z|=5}\frac{z\,dz}{\sin z(1-\cos z)}$　　答案：0

在∞(无穷远点)的留数.

定义：∞为f孤立奇点，f在$\mathring{B}(\infty,\delta)$解析，$f$在$\infty$点留数为：$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\,dz$，

其中$C\subset\mathring{B}(\infty,\delta)$为绕0闭路 (洛朗展开要求！不然为0.) ($\infty$在沿$C^-$方向的左手边！$C^-$围起来$\infty$.)

思考：由于 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$，沿$C^-$积分留下来的数为：$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}$.

在0点：$f(\frac{1}{z})=\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^{-n}\Rightarrow C_{-1}=\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$.

即：$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]$.　　$\boxed{\text{—— 规则 IV.}}$

定理2. 若f在$\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$有有限个孤立奇点(无其它奇点)，则$f$在各奇点(包括$\infty$)留数和为零.

证明：略.

例5. (例2.) 计算 $\oint_{|z|=2}\frac{z}{z^4-1}dz$.

解：$|z|=2$外仅有∞为孤立奇点. $\Rightarrow$

z=0原本在分母上，无定义！故此时看成孤立奇点，为可去奇点！

$\oint_{|z|=2}\frac{z}{z^4-1}dz=-2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),\infty]\overset{(IV)}{=}2\pi i\,\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{z}{1-z^4},0]=0$.

例6. 计算 $\oint_{|z|=2}f(z)\,dz$，$f(z)=\frac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$.

解：$z=-i$为f十阶极点，1，3为一阶极点.

$$\Rightarrow\oint_{|z|=2}f(z)\,dz=2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),-i]+\mathrm{Res}[f(z),1]\right)\overset{\text{定理2}}{=}-2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\right)$$

$\mathrm{Res}[f(z),3]=\lim_{z\to 3}(z-3)f(z)=\frac{1}{2(3+i)^{10}}$，　$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=0$.

$$\Rightarrow\oint_{|z|=2}f(z)\,dz=-\frac{\pi i}{(3+i)^{10}}.$$

#.

$\left(f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2}=\frac{z^{10}}{(1+iz)^{10}(1-z)(1-3z)}\right.$，$z=0$为$f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2}$可去奇点.$\left.\right)$

§5.3 留数在定积分计算上的应用. (十一、二讲)

注：介绍三种，想进一步了解，见《复变函数及其应用》第七章，或史济怀等著《复变函数》

1. $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ 型积分， $F(\cos\theta, \sin\theta)$ 为 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 的有理函数 ($\cos\theta, \sin\theta$ 的加减乘除).

思路： $z = e^{i\theta}$， $d\theta = \frac{dz}{iz}$， $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{z^2-1}{2iz}$， $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{z^2+1}{2z}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \oint_{|z|=1} F\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz} = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k], \qquad \boxed{\text{(公式1)}}$$

其中 z_k $(k=1,\cdots,n)$ 为包含在 $|z|=1$ 内的 f 的孤立奇点.

例1：计算 $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta + p^2}\,d\theta$ $(0<p<1)$.

解： $0<p<1 \Rightarrow 1-2p\cos\theta+p^2 = (1-p)^2 + 2p(1-\cos\theta) > 0$， $0\le\theta\le 2\pi$， $z = e^{i\theta}$， $\frac{dz}{iz} = d\theta$

$\cos 2\theta = \frac{e^{2\theta i} + e^{-2\theta i}}{2} = \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2})$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^2+z^{-2}}{2\left(1-2p\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}+p^2\right)}\frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1}\frac{z^4+1}{2iz^2(z-pz^2-p+p^2z)}\,dz$$

$$= \oint_{|z|=1}\frac{z^4+1}{2iz^2(1-pz)(z-p)}\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}[f(z), p] + \mathrm{Res}[f(z), 0]\right)$$

其中 p 和 0 分别为 $f(z) = \frac{z^4+1}{2iz^2(1-pz)(z-p)}$ 的一阶和二阶极点. 故 $\mathrm{Res}[f(z), p] = \lim_{z\to p}(z-p)f(z) = \frac{p^4+1}{2ip^2(1-p^2)}$，

$$\mathrm{Res}[f(z), 0] = \frac{d}{dz}\{z^2 f(z)\}\Big|_{z=0} = \left(\frac{z^4+1}{2i(1-pz)(z-p)}\right)'\Big|_{z=0} = \frac{p^2+1}{2p^2}\,i$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i\left[\frac{p^4+1}{2ip^2(1-p^2)} + \frac{p^2+1}{2p^2}\,i\right] = \frac{2\pi p^2}{1-p^2} \qquad \#$$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$ 型积分， $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$， P, Q 为实系数多项式， $\deg Q - \deg P \ge 2$， Q 在实轴无零点 (或 F 在实轴无极点)

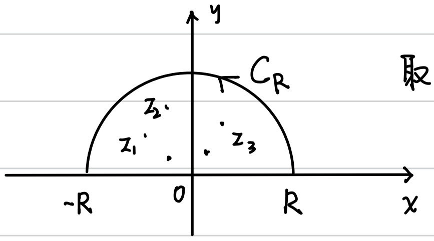
广义积分定义：① $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R f(x)\,dx$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^0 f(x)\,dx + \lim_{R_2\to\infty}\int_0^{R_2} f(x)\,dx$

③ 柯西主值 P.V. ： $\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$.

(微积分A，反常积分)

若 f 在 x_0 奇异， $x_0\in(a,b)$， $\mathrm{P.V.}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,dx + \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx\right)$ (瑕积分)

思路： WLOG (不失一般性)，设 $F(z) = \frac{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}$， $m-n\ge 2$. (设F为已约分式)



(扩张：$R\to\infty$)

取R足够大，使上半平面上所有孤立奇点包含在 $B(0,R)$ 内. 或 f 在 $B(\infty, \frac{1}{R})$ 解析.

故 $\int_{-R}^{R} F(z)\,dz + \int_{C_R} F(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z), z_k]$ (*)

其中 C_R 为 $\{Re^{i\theta}, 0\le\theta\le\pi\}$ 上半圆.

(思考：利用下半圆得到什么？与 $\overline{\mathbb{C}}$ 上留数定理关系？见 Notes).

在C_R上估计$F(z)$：$|F(z)|=|z|^{n-m}\cdot\frac{|1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}|}{|1+b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}|}$，故 $\lim\limits_{z\to\infty}|z^{m-n}F(z)|=1$

存在R充分大，使 $|F(z)|<\frac{2}{|z|^{m-n}}\le\frac{2}{|z|^2}=\frac{2}{R^2}$，$\forall z\in C_R$.　$(m-n\ge 2)$

故　$\left|\int_{C_R}F(z)\,dz\right|\le\int_0^{\pi}\frac{2R}{R^2}\,d\theta=\frac{2\pi}{R}\to 0$，$R\to\infty$.

在(*)中令$R\to\infty$，有：$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\,dx=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}Res[F(z),z_k]$　$\boxed{(公式2)}$

> 命题1：设$F=\frac{P}{Q}$，P、Q是两个实系数多项式，且满足：(1) $\deg Q-\deg P\ge 2$；(2) Q在实轴无零点。则(公式2)成立，即：
> $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\,dx=2\pi i\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}Res[F(z),z_k]$，　其中$z_k$为F在上半平面孤立奇点.

(或Q在上半平面零点)

例2. 计算　$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$　$(a>0,\ b>0)$ 的值.

解：令$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$，上半平面内$z=ai$，$bi$为孤立奇点.

① $a=b$情形：ai为f二阶极点。故

$$I=2\pi i\,Res[f(z),ai]=2\pi i\frac{d}{dz}\left[(z-ai)^2f(z)\right]\Big|_{z=ai}=2\pi i\,\frac{2ai(2ai)^2-2(ai)^2\cdot 2ai}{(2ai)^4}=\frac{\pi}{2a}$$

② $a\ne b$时，ai，bi均为f一阶极点.

$$\left.\begin{aligned}Res[f(z),ai]&=\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z)=\frac{(ai)^2}{2ai\,((ai)^2+b^2)}=\frac{ai}{2(b^2-a^2)}\\ Res[f(z),bi]&=\lim_{z\to bi}(z-bi)f(z)=\frac{(bi)^2}{2bi\,(a^2+(bi)^2)}=-\frac{bi}{2(b^2-a^2)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow I=\frac{\pi}{a+b}.$$

#

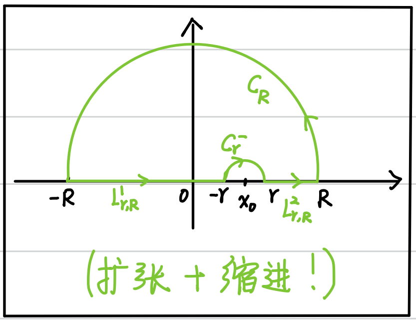
3. $\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{iax}\,dx$，$a>0$. ☆　(若$a<0$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{iax}dx=\int_{+\infty}^{-\infty}F(-y)e^{i(-a)y}(-dy)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(-y)e^{i(-a)y}dy$) ☆

> 命题2：设$F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$，P,Q为实系数多项式，且满足：(1) $\deg Q-\deg P\ge 1$；(2) $F(z)$在实轴极点为一阶。则
> $\int_{-\infty}^{+\infty}F(z)e^{iax}dx=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}Res[F(z)e^{iaz},z_k]+\pi i\sum\limits_{\ell=1}^{m}Res[F(z)e^{iaz},x_\ell]$　$\boxed{(公式3)}$
> 其中z_k为$F(z)$上半平面极点，x_ℓ为$F(z)$在实轴上的一阶极点，$a>0$.　(☆)

思路：不妨设上半平面奇点为$z_1,\dots,z_n$，实轴仅x_0一个一阶极点.(多个类似处理)

则　$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{iax}dx=\lim\limits_{r\to0,R\to\infty}\left(\int_{-R}^{x_0-r}+\int_{x_0+r}^{R}\right)F(x)e^{iax}dx$.

取r充分小，R充分大，使$z_1,\dots,z_n$都在$L^1_{r,R}\cup C_r^-\cup L^2_{r,R}\cup C_R$所围区域内部. 则



$$\int_{-R}^{x_0-r}F(x)e^{iax}+\int_{x_0+r}^{R}F(x)e^{iax}dx+\int_{C_R}F(z)e^{iaz}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res[F(z)e^{iaz},z_k]+\int_{C_r}F(z)e^{iaz}dz$$

令$r\to0$，$R\to\infty$，证明以下两式即可：(见Notes)

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(z)e^{iaz}dz=0,\qquad \lim_{r\to0}\int_{C_r}F(z)e^{iaz}dz=\pi i\,Res[F(z)e^{iaz},x_0].$$

例3. 计算 $I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx \quad (a>0)$.

解: $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}dx\right)$. 令 $f(z)=\frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}$, 则 $z=ai$ 为 f 在上半平面一阶极点, 故

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}dx = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),ai] = 2\pi i\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z) = 2\pi i\frac{ai\cdot e^{-a}}{2ai} = i\pi e^{-a} \Rightarrow I=\frac{1}{2}\pi e^{-a}. \qquad \#$$

例4. 计算: $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx$, $a>0$, $b>0$.

解: 令 $f(z)=F(z)e^{iaz}=\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$, $I=\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\,dz\right)$. $F(z)$ 分母次数 − 分子次数 $=3>1$.

$f(z)$ 在上半平面有一阶极点 $z=bi$, 实轴上有一阶极点 $z=0$. 故, 由(公式3)得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),bi] + \pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0] = \frac{\pi}{b^2}(1-e^{-ab})i$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{b^2}(1-e^{-ab}). \qquad \#$$

例5. 计算 $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+8\cos^2\theta}$

解: $I=\int_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{1+8\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z\,dz}{z^2+2(z^2+1)^2} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z\,dz}{2z^4+5z^2+2}$.

$|z|=1$ 所围区域内有 $f(z)=\frac{z}{2z^4+5z^2+2}$ 的两个一阶极点: $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$. 故

$$I=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}f(z)dz = \frac{1}{i}2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{\sqrt{2}}{2}i\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right]\right) = \frac{2}{3}\pi. \qquad \#$$

例6. 计算 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

解: 令 $f(z)=\frac{z^2+1}{z^4+1}$, 则 f 在上半平面有 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ 两个一阶极点, 故由(公式2)

$$I=2\pi i\left(\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right]\right)$$

$$=2\pi i\left(\left.\frac{z^2+1}{4z^3}\right|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}+\left.\frac{z^2+1}{4z^3}\right|_{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}\right)=\sqrt{2}\pi. \qquad \#$$

两个有名例子:

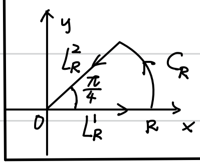
例7. 计算 $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$. (Dirichlet 积分. 阻尼振动)

解: $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right)$. 令 $f(z)=F(z)\cdot e^{iz}=\frac{1}{z}e^{iz}$. 则 $F(z)$ 分母次数比分子次数大1, 且仅有 $z=0$ 为 F 一阶极点. 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx = \pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z},0\right]=\pi i \Rightarrow I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\right)=\frac{\pi}{2}. \qquad \#$$

例8. 证明: $\int_0^\infty \sin x^2 \, dx = \int_0^\infty \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. (已知 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.) (Fresnel 菲涅耳积分. 光学)

证明: $\int_0^\infty \sin x^2 \, dx = \mathrm{Im}\left(\int_0^\infty e^{ix^2} dx\right)$, $\int_0^\infty \cos x^2 \, dx = \mathrm{Re}\left(\int_0^\infty e^{ix^2} dx\right)$



$C_R = \{Re^{i\theta}: 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$

$L_R^2 = \{te^{i\frac{\pi}{4}}: 0 \le t \le R\}$

令 $f(z) = e^{iz^2}$, f 在 $\mathbb{C}$ 解析. 考虑 $f(z)$ 在 $L_R^1 \cup C_R \cup L_R^2$ 积分,

$\int_{L_R^1 \cup C_R \cup L_R^2} f(z) \, dz = 0 \quad \Rightarrow$

$$\int_0^R e^{ix^2} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i(Re^{i\theta})^2} \cdot Ri e^{i\theta} d\theta + \int_0^R e^{it^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4}} dt =: I_R^1 + I_R^2. \qquad (*)$$

$|I_R^1| = \left|-\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i(Re^{i\theta})^2} \cdot Rie^{i\theta} d\theta\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} R \cdot e^{-R^2 \sin 2\theta} d\theta$, 利用 $h(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 凹性, 可得:

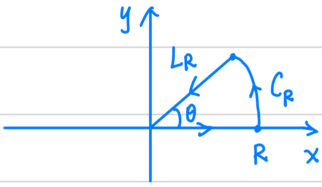
$h(x) \geq \lambda h(0) + (1-\lambda) h(\frac{\pi}{2}) = 0$, 故 $\sin 2\theta \geq \frac{4\theta}{\pi}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 因此

$|I_R^1| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2 \cdot \frac{4}{\pi}\theta} d\theta = \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2}) \to 0$, $R \to \infty$.

$|I_R^2| = \int_0^R e^{-t^2} \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \, dt \to \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$, $R \to \infty$.

令 $(*)$ 中 $R \to \infty$, 有: $\int_0^\infty e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$. #.

注：其它围道尝试？ 固定某个 θ. $L_R := \{z = t \cdot e^{i\theta}, \ 0 < t < R\}$



$\int_{L_R} f(z) \, dz = \int_0^R e^{i(t^2 e^{i2\theta})} e^{i\theta} dt = e^{i\theta} \int_0^R e^{it^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} dt$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ 时 $\Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow e^{-t^2}$ 可计算!

第六章 Fourier变换 (第十三、四讲)

§6.1 Fourier变换

定义1：设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 为定义在实轴上的复值函数，$f(t)$ 在时域 $t\in(-\infty,+\infty)$ 绝对可积，即 $P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}|f(t)|dt<\infty$，定义 f 在频域 $w\in(-\infty,+\infty)$ 上的Fourier变换为 $F(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iwt}dt$，记作 $F(w)=\mathcal{F}[f(t)]$.

定义2：设 $F(w)$ 在频域 $w\in(-\infty,+\infty)$ 绝对可积，定义 F 在时域 $t\in(-\infty,+\infty)$ 上的Fourier逆变换为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{itw}dw,\quad 记作\quad f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(w)].$$

注1（其它记号）：

① $\hat{f}(w)=\mathcal{F}[f(t)]$，$\check{F}(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(w)]$.

② $F_1(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i2\pi wt}dt$，$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(w)e^{i2\pi wt}dw$

③ $F_2(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iwt}dt$，$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(w)e^{iwt}dw$

$\Rightarrow F(w)=F_1(\frac{w}{2\pi})=\sqrt{2\pi}F_2(w)$ —— 习惯决定.

注2（与Fourier级数的联系）：见Notes.

定理（Fourier积分定理）：若 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足下列条件：(1) $f(t)$ 在任一有限区间上满足Dirichlet条件，即在该有限区域内仅有有限个第一类间断点，且仅有有限个极值点；(2) f 在 $(-\infty,+\infty)$ 绝对可积. 则 Fourier积分公式成立：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-iw\tau}d\tau\right]e^{iwt}dw=\frac{1}{2}[f(t-)+f(t+)].$$ （连续时即为 $f(t)$）

即：$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](t)=\frac{1}{2}[f(t-)+f(t+)]$

例1：求函数 $f(t)=\chi_{[-1,1]}(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的Fourier积分公式.

解：$F(w)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iwt}dt=\int_{-1}^{1}e^{-iwt}dt=\frac{e^{-iwt}}{-iw}\Big|_{-1}^{1}=-\frac{1}{iw}(e^{-iw}-e^{iw})=\frac{2\sin w}{w}$.（$\frac{2\sin w}{w}$ 送为 $\chi_{[-1,1]}(t)$）

$t\ne\pm1$ 时，$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{iwt}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin w}{w}(\cos wt+i\sin wt)dw=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin w\cos wt}{w}dw$.

$t=\pm1$ 时，$\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin w\cos wt}{w}dw$ #

一些推论：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin w\cos wt}{w}dw=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & |t|<1,\\ \frac{\pi}{4}, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$ $t=0\Rightarrow\int_0^{\infty}\frac{\sin w}{w}dw=\frac{\pi}{2}$，Dirichlet积分.

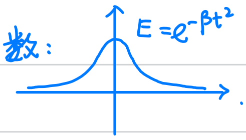
思考：为什么 $\int_{-1}^{1}e^{-iw\tau}d\tau=\frac{e^{-iw\tau}}{-iw}\Big|_{-1}^{1}$？（见Notes_Chapter 3，实变量复值函数的微积分！）

例2：求指数衰减函数的Fourier变换：$f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-\beta t}, & t>0.\end{cases}$ $(\beta>0)$

解：$F(w)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{\mathbb{R}}f(t)e^{-iwt}dt=\int_0^{\infty}e^{-\beta t-iwt}dt=-\frac{1}{\beta+iw}e^{-(\beta+iw)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\beta+iw}=\frac{\beta-iw}{\beta^2+w^2}$. #

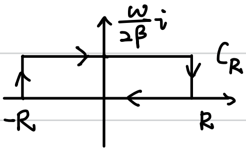
例3：求 $f(t)=Ee^{-\beta t^2}$ $(E>0,\beta>0)$ 的 Fourier 变换及其积分表达式.

钟形脉冲函数：



解：$F(w)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{\mathbb{R}}Ee^{-\beta t^2}\cdot e^{-iwt}dt=\int_{\mathbb{R}}Ee^{-\beta t^2-iwt-\frac{(iw)^2}{4\beta}}\cdot e^{-\frac{w^2}{4\beta}}dt$

$$=E\cdot e^{-\frac{w^2}{4\beta}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\beta(t+\frac{iw}{2\beta})^2}dt$$



由于 $\int_{C_R}e^{-\beta z^2}dz=0=\int_R^{-R}e^{-\beta x^2}dx+\int_0^{\frac{w}{2\beta}}e^{-\beta(-R+iy)^2}idy+\int_{\frac{w}{2\beta}}^0 e^{-\beta(R+iy)^2}idy$

$$+\int_{-R}^{R}e^{-\beta(t+\frac{w}{2\beta}i)^2}dt=:I_R^1+I_R^2+I_R^3+I_R^4.$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{R\to\infty}I_R^1=\lim_{R\to\infty}\int_R^{-R}e^{-(\sqrt{\beta}x)^2}dx=-\lim_{R\to\infty}\int_{-R\sqrt{\beta}}^{R\sqrt{\beta}}e^{-y^2}dy\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta}}=-\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$$

$$I_R^2+I_R^3=\int_0^{\frac{w}{2\beta}}\left[e^{-\beta(-R+iy)^2}-e^{-\beta(R+iy)^2}\right]idy=2e^{-\beta R^2}\int_0^{\frac{w}{2\beta}}e^{\beta y^2}\left[-\sin(2\beta Ry)\right]dy$$

故 $|I_R^2+I_R^3|\leqslant 2e^{-\beta R^2}\int_0^{\frac{w}{2\beta}}e^{\beta y^2}dy\to 0,\quad R\to\infty$

因此，$F(w)=Ee^{-\frac{w^2}{4\beta}}\lim\limits_{R\to\infty}I_R^4=-E\cdot e^{-\frac{w^2}{4\beta}}\lim\limits_{R\to\infty}(I_R^1+I_R^2+I_R^3)=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}Ee^{-\frac{w^2}{4\beta}}.$

Fourier 积分表达式为：

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}[F(w)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{iwt}dw=\frac{E}{2\sqrt{\pi\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{w^2}{4\beta}}(\cos wt+i\sin wt)dw$$

$$=\frac{E}{\sqrt{\pi\beta}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{w^2}{4\beta}}\cos wt\,dw.$$

\#

注：$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-P(t+c)^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{P}}$，$P,c\in\mathbb{C}$，$\mathrm{Re}(P)>0$.

§6.2. Fourier 变换的性质.

① 线性性：$\mathcal{F}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha\mathcal{F}[f(t)]+\beta\mathcal{F}[g(t)]$.

$$\mathcal{F}^{-1}[\alpha F(w)+\beta G(w)]=\alpha\mathcal{F}^{-1}[F(w)]+\beta\mathcal{F}^{-1}[G(w)]$$

② 对称性：若 $F(w)=\mathcal{F}[f(t)]$，则 $\mathcal{F}[F(t)]=2\pi f(-w)$.

证明：由于 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{iwt}dw\Rightarrow 2\pi f(-w)=\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{it(-w)}dt=\mathcal{F}[F(t)]$ \#

③ 缩放平移性：$\mathcal{F}[f(at+b)](w)=\frac{1}{|a|}e^{\frac{ibw}{a}}F(\frac{w}{a})$，$\mathcal{F}[e^{iw_0t}f(t)]=F(w-w_0)$，其中 $F(w)=\mathcal{F}[f(t)]$.

④ 微分性：设 $f^{(n)}(t)$ 绝对可积且 $\lim\limits_{|t|\to\infty}f^{(n)}(t)=0$, $n\in\mathbb{N}$，则 (1) $\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(iw)^n\mathcal{F}[f(t)]$；(2) $F^{(n)}(w)=(-i)^n\mathcal{F}[t^nf(t)]$

⑤ 乘积性质：设 $F(w)=\mathcal{F}[f(t)]$，$G(w)=\mathcal{F}[g(t)]$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{g(t)}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)\overline{G(w)}dw$.

证明：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{g(t)}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}^{-1}[F(w)]\overline{g(t)}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)e^{iwt}dw\cdot\overline{g(t)}dt$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)\int_{-\infty}^{\infty}e^{iwt}\overline{g(t)}dt\,dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)\overline{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iwt}g(t)dt}\,dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)\overline{G(w)}dw.$$ \#

⑥ Parseval 定理：$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(w)|^2dw$. （证由⑤） ☆

例1. 设 $F(w)=\mathcal{F}[f(t)]$. 求 $\mathcal{F}[f(t)\cos w_0t]$ 和 $\mathcal{F}[f(t)\sin w_0t]$.

解：利用缩放平移性：$\mathcal{F}[f(t)\cos w_0t]=\mathcal{F}[f(t)\frac{e^{iw_0t}+e^{-iw_0t}}{2}]=\frac{1}{2}[F(w-w_0)+F(w+w_0)]$

$$\mathcal{F}[f(t)\sin w_0t]=\mathcal{F}[f(t)\frac{e^{iw_0t}-e^{-iw_0t}}{2i}]=\frac{1}{2i}(F(w-w_0)-F(w+w_0)).$$ \#

例2. 求 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 w}{w^2}dw$

解：方法一：$I=2\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 w}{w^2}dw=2\int_0^{+\infty}\sin^2 w\, d\left(-\frac{1}{w}\right)=\frac{2\sin^2 w}{-w}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\frac{2\sin w\cos w}{w}dw$

$$=2\int_0^{\infty}\frac{\sin 2w}{w}dw=2\int_0^{\infty}\frac{\sin w}{w}dw=\pi.\quad (\text{Dirichlet 积分})$$

方法二：由§6.1中例1知：$\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}(t)]=\frac{2\sin w}{w}$，故利用Parseval定理可得

$$I=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}(t)]\right|^2dw=\frac{1}{4}\cdot 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[-1,1]}^2(t)\,dt=\frac{\pi}{2}\cdot\int_{-1}^{1}dt=\pi.$$ #

例3. 求 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 w}{w^2}dw$

解：令 $f(t)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin^2 w}{w}\right]$，则 $I=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt$.

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 w}{w}\cdot e^{iwt}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 w}{w}(\cos wt+i\sin wt)\,dw=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 w\sin wt}{w}dw$$

$$=\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1-\cos 2w)\sin wt}{w}dw=\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin wt}{w}dw-\frac{i}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(t+2)w+\sin(t-2)w}{w}dw$$

除去0, ±2外：$=\frac{i}{4\pi}\times\pi(\operatorname{sgn} t)-\frac{i}{8\pi}\times\pi\operatorname{sgn}(t+2)-\frac{i}{8\pi}\times\pi\operatorname{sgn}(t-2)=\begin{cases}0, & t>2,\\ \frac{i}{4}, & 0<t<2,\\ -\frac{i}{4}, & -2<t<0,\\ 0, & t<-2\end{cases}=\frac{i}{4}\chi_{[-2,2]}(t)\cdot\operatorname{sgn}(t)$

$$\Rightarrow I=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{16}\chi_{[-2,2]}^2(t)\,dt=\frac{\pi}{2}.$$ #

卷积(convolution)：

定义：设 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为实轴上两个绝对可积函数，定义 f_1 和 f_2 卷积如下：

$$(f_1*f_2)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau.$$

注：f_1*f_2 也是绝对可积的. $\int_{-\infty}^{+\infty}|f_1*f_2|(t)\,dt\le\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f_1(\tau)||f_2(t-\tau)|\,d\tau\,dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f_1(\tau)||f_2(t-\tau)|dt\,d\tau\le\int_{-\infty}^{+\infty}|f_2(s)|\,ds\int_{-\infty}^{+\infty}|f_1(\tau)|\,d\tau<+\infty.$$

例4：$f_1(t)=e^{-at^2}$，$f_2(t)=e^{-bt^2}$，$a>0,b>0$，求 $(f_1*f_2)(t)$.

解：$(f_1*f_2)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a\tau^2}\cdot e^{-b(t-\tau)^2}d\tau=\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\,e^{-\frac{abt^2}{a+b}}$. #

定理：卷积满足交换律、结合律、分配律：

(1) $f*g=g*f$；(2) $(f*g)*h=f*(g*h)$；(3) $(\alpha f+\beta g)*h=\alpha f*h+\beta g*h$，$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

(4) $(f*g)'=f'*g=f*g'$. 证：由定义直接证明，略. (磨光子(mollifiers)见Notes)

⑦ 卷积性：(1) $\mathcal{F}[f_1*f_2]=\mathcal{F}[f_1]\cdot\mathcal{F}[f_2]$；(2) $\mathcal{F}[f_1\cdot f_2]=\frac{1}{2\pi}F_1*F_2$.

仅证明(1)，(2)类似可得.

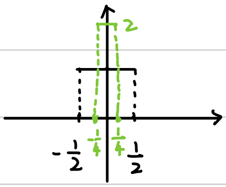
证明：$\mathcal{F}[f_1*f_2]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau\cdot e^{-iwt}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\cdot e^{-iw\tau}\cdot f_2(t-\tau)\cdot e^{-iw(t-\tau)}d\tau\,dt$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\cdot e^{-iw\tau}\cdot f_2(s)\cdot e^{-iws}d\tau\,ds=\mathcal{F}(f_1)\cdot\mathcal{F}(f_2).$$ #

§6.3 广义 Fourier 变换.

1. 单位脉冲函数（δ-函数、Dirac δ-函数、δ 分布）

（可取光滑 $k_n(t)=\frac{1}{n\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{n^2}}$，甚至有紧支撑的光滑 k_n，见 Notes 里磨光子 P_n）



设 $k_n(t)=\begin{cases} n, & t\in[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}], \\ 0, & 其它 \end{cases}$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}k_n(t)\,dt=\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}}n\,dt=1.$

令 $n\to\infty$，形式上有 $k_n(t)\to\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1.$

定义1：单位脉冲函数 $\delta(t)$ 是满足下面两个条件的函数：(1) $\delta(t)=0,\ t\neq0$；(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1.$

注：δ 函数并非通常意义下的函数，是一个广义函数，是一个测度（见 Notes：Dirac 测度）

定义2：广义函数为定义在 Schwartz 空间 $S(\mathbb{R})$（速降函数空间）上的线性映射，其中

$$S(\mathbb{R})=\left\{f\in C^\infty(\mathbb{R}):\ \sup_{x\in\mathbb{R}}|x|^m f^{(n)}(x)<\infty,\ \forall m,n\in\mathbb{N}\right\}.$$

（sup 表示上确界，supremum. inf 表示下确界，infimum. $\mathrm{supp}\,f=\overline{\{x: f\neq0\}}$，support.）

定义3：单位脉冲函数 $\delta(t)$ 是满足下面条件的广义函数：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,dt=f(0)$，$\forall f\in S(\mathbb{R})$

（$\delta: S(\mathbb{R})\to\mathbb{C},\ f\mapsto f(0)$）

注：(1) $\lim\limits_{|x|\to\infty}|x|^m f^{(n)}(x)=0$，$\forall m,n\in\mathbb{N}$；(2) $\mathcal{F}$ 把 $S(\mathbb{R})$ 中函数映到 $S(\mathbb{R})$ 中，$C^\infty(\mathbb{R})$ 与 $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 均无此性质！

2. δ 函数性质

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$；(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,dt=f(0)$；(3) $\delta(t)=\delta(-t)$；

(4) $\delta(t)=\frac{d}{dt}u(t)$，$u(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$ u：单位阶跃函数（Heaviside）. (5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(n)}(t)f(t)\,dt=(-1)^n f^{(n)}(0)$.

(6) $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$；(7) $\delta(t-t_0)$：t_0 点处的单位脉冲函数. (8) $(\delta*f)(t)=f(t)$.

证明 (4)：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}u(t)\cdot f(t)\,dt=u(t)f(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)f'(t)\,dt=0-\int_0^{+\infty}f'(t)\,dt=f(0)$

根据定义3 知 $\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$. #

3. 广义函数的 Fourier 变换

定义：设 $T: S(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ 为一个广义函数，定义 $\mathcal{F}[T]$ 为满足如下条件的广义函数：

$$\langle\mathcal{F}[T],f\rangle=\langle T,\mathcal{F}[f]\rangle,\quad \forall f\in S(\mathbb{R}).$$

注：线性性、缩放平移性成立. T 为某具体函数时 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示乘积的积分，如：$\langle g,f\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)f(t)\,dt$.

例1. 求 $\mathcal{F}[\delta(t-t_0)]$ 和 $\mathcal{F}[1]$

解：$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(s)e^{-i\omega s}\cdot e^{-i\omega t_0}\,ds=e^{-i\omega t_0}$

$\left(t_0=0:\ \mathcal{F}[\delta(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}\,dt=1\ \Rightarrow\ \delta(t)=\mathcal{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{it\omega}\,d\omega\Rightarrow 2\pi\delta(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it\omega}\,d\omega\right)$

$\mathcal{F}[1](\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}\,dt=2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega)$. $\left(\mathcal{F}[1\cdot f](\omega)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[1]*\mathcal{F}[f]=\mathcal{F}[f]\right)$ #

注：1 可视为广义函数，把 $f\in S(\mathbb{R})$ 映成 f 的积分. 根据定义证明：

$\langle\mathcal{F}[1],\phi\rangle=\langle1,\mathcal{F}[\phi]\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}[\phi](\omega)\,d\omega=2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}[\phi](\omega)e^{i0\cdot\omega}\,d\omega$

$=2\pi\cdot\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\phi]](0)=2\pi\phi(0)\ \Longrightarrow\ \mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$

例2. 求 $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}]$，$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t]$，$\mathcal{F}[\sin\omega_0 t]$

解：$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega_0 t}\cdot e^{-i\omega t}\,dt=\mathcal{F}[1](\omega-\omega_0)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$.

$\mathcal{F}[\cos\omega_0 t] = \mathcal{F}\left[\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}\right] = \pi\delta(\omega+\omega_0)+\pi\delta(\omega-\omega_0)$, $\mathcal{F}[\sin\omega_0 t] = \pi i\delta(\omega+\omega_0)-\pi i\delta(\omega-\omega_0)$.

例 3. 求 $\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)]$，$\mathcal{F}[u(t)]$，$\mathcal{F}[u(t)\cos\omega_0 t]$，$u$：Heaviside 函数.

解：① 由于 $\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{\omega}](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{\omega}d\omega = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega = \frac{i}{2}\mathrm{sgn}(t)$.

故 $\mathcal{F}[\frac{i}{2}\mathrm{sgn}(t)] = \frac{1}{\omega}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)] = -\frac{2i}{\omega}$.

② $\mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)] = \pi\delta(\omega)-\frac{i}{\omega}$

③ $\mathcal{F}[u(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[u(t)(e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t})] = \frac{\pi}{2}\delta(\omega+\omega_0)+\frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_0) - \frac{\omega i}{\omega^2-\omega_0^2}$.

思考：$\mathcal{F}[u'(t)] = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \Rightarrow 1 = \mathcal{F}[u'(t)] = i\omega\mathcal{F}[u(t)] \Rightarrow \mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{i\omega}$ ？ $\lim\limits_{|t|\to\infty}u(t)\neq 0$，故不能用求导性质！

例 4. 求微分方程：$a x'(t)+bx(t)+c\int_{-\infty}^{t}x(t)dt = h(t)$，$-\infty<t<+\infty$，$a,b,c$ 常数，h 已知.

解：设 $X(\omega)=\mathcal{F}[x(t)]$，$H(\omega)=\mathcal{F}[h(t)]$. 方程两边做 Fourier 变换可得：

$$a\,\mathcal{F}[x'(t)]+b\,\mathcal{F}[x(t)]+c\,\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t}x(t)dt] = \mathcal{F}[h(t)]$$

$$\Rightarrow i\omega a X(\omega)+bX(\omega)+\frac{c}{i\omega}X(\omega) = H(\omega) \Rightarrow X(\omega) = \frac{H(\omega)}{b+i(a\omega-\frac{c}{\omega})} \Rightarrow$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H(\omega)\cdot e^{i\omega t}}{b+i(a\omega-\frac{c}{\omega})}d\omega.$$

#

例 5. 求 $F(\omega) = \frac{1}{(3+i\omega)(4+3i\omega)}$ 的 Fourier 逆变换.

解：由 §6.1, 例 2 知 $\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\beta+i\omega}$，$f(t) = \begin{cases} e^{-\beta t}, & t>0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

$$F(\omega) = \frac{1}{5}\frac{1}{\frac{4}{3}+i\omega}-\frac{1}{5}\frac{1}{3+i\omega} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{5}\frac{1}{\frac{4}{3}+i\omega}\right] = \begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{4}{3}t}, & t\geq 0, \\ 0, & t<0\end{cases} \quad \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{5}\frac{1}{3+i\omega}\right] = \begin{cases}\frac{1}{5}e^{-3t}, & t\geq 0, \\ 0, & t<0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(3+i\omega)(4+3i\omega)}\right] = \begin{cases}\frac{1}{5}(e^{-\frac{4}{3}t}-e^{-3t}), & t\geq 0, \\ 0, & t<0.\end{cases}$$

#

广义 Fourier 变换的一些性质证明：

☆ 把定义中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 当成乘积积分运算，然后注意变量替换.

设 g 为广义函数，$\forall f\in S(\mathbb{R})$：$\langle\mathcal{F}[g], f\rangle = \langle g, \mathcal{F}[f]\rangle$

$$\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}[g](\omega)f(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}g(\omega)\,\mathcal{F}[f](\omega)d\omega.$$

(1) 线性性：设 g_1, g_2 为两个广义函数，则有 $\mathcal{F}[g_1+\alpha g_2] = \mathcal{F}[g_1]+\alpha\mathcal{F}[g_2]$.

证明：对 $\forall f\in S(\mathbb{R})$，由定义可得：

"内积"运算的线性性（可视为相乘求积分.）

$\langle\mathcal{F}[g_1+\alpha g_2], f\rangle = \langle g_1+\alpha g_2, \mathcal{F}[f]\rangle = \langle g_1, \mathcal{F}[f]\rangle + \alpha\langle g_2, \mathcal{F}[f]\rangle$ 再由"内积"线性性.

再由定义 $\Leftarrow = \langle\mathcal{F}[g_1], f\rangle + \langle\alpha\mathcal{F}[g_2], f\rangle = \langle\mathcal{F}[g_1]+\alpha\mathcal{F}[g_2], f\rangle$

故 $\mathcal{F}[g_1+\alpha g_2] = \mathcal{F}[g_1] + \alpha\mathcal{F}[g_2]$. （故我们算 $\mathcal{F}[u(t)]$ 时利用 $u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$ 和线性性可行.） #

(2) 缩放平移性：设 $g(t)$ 为一个广义函数，则

(1) $\mathcal{F}[g(at+b)](w) = \frac{1}{|a|}e^{i\frac{bw}{a}}\mathcal{F}[g(t)](\frac{w}{a})$； (2) $\mathcal{F}[e^{iw_0t}g(t)](w) = \mathcal{F}[g(t)](w-w_0)$

证明： (1) $\forall f\in S(\mathbb{R})$，有:

"内积"运算可视为积分.

$$\langle\mathcal{F}[g(a\cdot+b)], f\rangle = \langle g(a\cdot+b), \mathcal{F}[f]\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(aw+b)\mathcal{F}[f](w)\,dw$$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} g(w)\mathcal{F}[f](\tfrac{w-b}{a})\,dw = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} g(w)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\frac{w-b}{a}\cdot t}dt\right)dw$$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} g(w)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{b}{a}t}f(t)e^{-i\frac{wt}{a}}dt\right)dw$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(w)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ibt}f(at)e^{-iwt}dt\right)dw = \int_{-\infty}^{+\infty} g(w)\mathcal{F}[e^{ibt}f(at)](w)\,dw = \langle g, \mathcal{F}[e^{ibt}f(at)]\rangle$$

$$= \langle\mathcal{F}[g], e^{ib\cdot}f(a\cdot)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}[g](w)e^{ibw}f(aw)\,dw$$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}[g](\tfrac{w}{a})e^{i\frac{b}{a}w}f(w)\,dw = \frac{1}{|a|}\langle\mathcal{F}[g](\tfrac{\cdot}{a}), e^{i\frac{b}{a}\cdot}f\rangle$$

$$= \langle\frac{1}{|a|}e^{i\frac{b}{a}\cdot}\mathcal{F}[g](\tfrac{\cdot}{a}), f\rangle$$

(2) $\forall f\in S(\mathbb{R})$，有

(此处运算均视为乘积的积分，变量替换！)

$$\langle\mathcal{F}[e^{iw_0t}g(t)], f\rangle = \langle e^{iw_0\cdot}g, \mathcal{F}[f]\rangle = \langle g, e^{iw_0\cdot}\mathcal{F}[f]\rangle = \langle g, \mathcal{F}[f(t+w_0)]\rangle$$

$$= \langle\mathcal{F}[g], f(\cdot+w_0)\rangle$$

$$= \langle\mathcal{F}[g](\cdot-w_0), f\rangle$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[e^{iw_0t}g(t)](w) = \mathcal{F}[g(t)](w-w_0)$$ #

从严格定义来看 $\delta(t)$ 的 Fourier 变换：

$$\langle\mathcal{F}[\delta(t)], f\rangle = \langle\delta(t), \mathcal{F}[f]\rangle = \mathcal{F}[f](0) = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot f(t)\,dt = \langle 1, f\rangle, \quad \forall f\in S(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[\delta(t)] = 1.$$

课堂上利用 $\mathcal{F}[u'(t)] = iw\mathcal{F}[u(t)]$ 得到错误结果，但 $\mathcal{F}[\delta'(t)] = iw\mathcal{F}[\delta(t)] = iw$. 证明：

$$\langle\mathcal{F}[\delta'], f\rangle = \langle\delta', \mathcal{F}[f]\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(w)\mathcal{F}[f](w)\,dw \overset{\delta\text{函数性质(5)}}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(w)\frac{d}{dw}\mathcal{F}[f](w)\,dw$$

$$\overset{\text{Fourier变换性质④.(2)}}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(w)\cdot\mathcal{F}[-itf(t)](w)\,dw = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(w)\mathcal{F}[itf(t)](w)\,dw$$

$$\overset{\text{广义Fourier变换的定义}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}[\delta](w)\cdot iwf(w)\,dw \underset{\mathcal{F}[\delta]=1}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}iw\cdot f(w)\,dw = \langle iw, f\rangle.$$

利用此结论可以解决作业题 17.(2).

$\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)]$ 也可以严格推导，但过程过于复杂，感兴趣同学请参考：

https://math.stackexchange.com/questions/3726611/fourier-transform-of-signum-function#:~:text=If%20T%20is%20the%20signum,%CF%86(x)dx.

不喜欢严格定义的同学们可以忽略Schwartz空间和广义Fourier变换的定义. 记住下面要点:

$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, $\mathcal{F}[\delta^{(n)}(t)](\omega) = (i\omega)^n$ (可以用Fourier变换求导公式, §6.2 性质④)

并非所有广义函数均可用, 此处因为δ函数性质⑤.

$\mathcal{F}[1](\omega) = 2\pi\delta(\omega)$, $\mathcal{F}[\mathrm{sgn}(t)](\omega) = \frac{2}{i\omega}$ (证明见例3, 利用的逆变换)

$\mathcal{F}[u(t)](\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$ (利用 $u(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) + \frac{1}{2}$, 缩放平移性)

不能用 $1 = \mathcal{F}[\delta(t)] = \mathcal{F}[u'(t)] \overset{\times}{=} i\omega\mathcal{F}[u(t)]$. (因为 $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 1 \neq 0$, 见 §6.2 性质④)

广义Fourier变换:
1. 会直接积分的可以随意用; 2. 线性性、缩放平移性可以用; (3) 慎用Fourier变换求导公式!

例: $e^{i\omega_0 t}$, $\sin\omega_0 t$, $\cos\omega_0 t$, 并不会直接积分, 但可以通过 $\mathcal{F}[1]$ 平移得到.

第七章 Laplace 变换

§7.1 定义和性质

(包含Δ点!☆)

1. 定义：设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 有定义，则 f 的 Laplace 变换(拉氏变换)为： $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt,\quad s\in\mathbb{C}.$

称 F 为 f 在 Laplace 变换下的象函数，f 是 F 的原函数，记 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

注：$s=\beta+i\omega \Longrightarrow F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{F}[f(t)u(t)e^{-\beta t}](\omega)$，$u$：Heaviside 函数.

例1：求 $\mathcal{L}[e^{at}]$，$\mathcal{L}[\cos at]$，$\mathcal{L}[\sin at]$，$a>0$.

解：① $\mathcal{L}[e^{at}]=\int_0^{\infty} e^{at}\cdot e^{-st}\,dt=\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s-a}$，当 $Re(s)>a$.　(其余 s 不收敛)

② 方法一.
$$\mathcal{L}[\cos at]=\int_0^{\infty}\cos at\, e^{-st}dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{a}(\sin at\, e^{-st})'+\frac{s}{a}\sin at\, e^{-st}\,dt$$
$$=\frac{1}{a}\sin at\, e^{-st}\Big|_0^{\infty}-\frac{s}{a}\int_0^{\infty}\frac{1}{a}(\cos at\, e^{-st})'+\frac{s}{a}\cos at\, e^{-st}dt$$
要求 $Re\, s>0$.
$$=-\frac{s}{a^2}\cos at\, e^{-st}\Big|_0^{\infty}-\frac{s^2}{a^2}\int_0^{\infty}\cos at\, e^{-st}\,dt=\frac{s}{a^2}-\frac{s^2}{a^2}\mathcal{L}[\cos at].$$

故 $\mathcal{L}[\cos at]=\dfrac{\frac{s}{a^2}}{1+\frac{s^2}{a^2}}=\dfrac{s}{a^2+s^2}$，$Re\, s>0$.

方法二. 利用变换线性性：$\mathcal{L}[\cos at]=\mathcal{L}\left[\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{iat}]+\frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-iat}]$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia}+\frac{1}{s+ia}\right)=\frac{s}{a^2+s^2}.$$

③ $\mathcal{L}[\sin at]=\frac{a}{s^2+a^2}$.　(可以利用② + 微分性!)

定理：设函数 $f(t)$ 在 $t\geq 0$ 连续或分段连续. 若 $\exists\, c>0, M>0$, s.t., $|f(t)|\leq Me^{ct}$，$t>0$,

则 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ 在半平面 $Re(s)>c$ 上收敛.　(指数增长函数)

证明：$|F(s)|=\left|\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\,dt\right|\leq\int_0^{\infty}|f(t)e^{-st}|\,dt\leq\int_0^{\infty}Me^{-(Re\, s-c)t}dt$，当 $Re(s)>c$ 时可积.　#

定理：$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$. (1) 若 $F(s_0)$ 收敛，则 $F(s)$ 在 $Re(s)>Re(s_0)$ 收敛；(2) 若 $F(s_0)$ 发散，则 $F(s)$ 在 $Re(s)<Re(s_0)$ 上发散.

证明：(2) 可由(1)得. 仅证(1). 令 $\Phi(t)=\int_0^t f(\tau)e^{-s_0\tau}d\tau$，则 $\Phi(t)$ 在 $t\geq 0$ 有界.　(课堂略过)

当 $Re(s)>Re(s_0)$ 时有 $\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{\infty}f(t)e^{-s_0t}\cdot e^{-(s-s_0)t}dt$
$$=\int_0^{\infty}\Phi'(t)\,e^{-(s-s_0)t}dt=\Phi(t)\,e^{-(s-s_0)t}\Big|_0^{\infty}+(s-s_0)\int_0^{\infty}\Phi(t)e^{-(s-s_0)t}\,dt$$

由 Φ 有界性可知上述积分收敛.　#

例2. 求 $\mathcal{L}[t^{\alpha}]$　$(\alpha>-1)$.

解：当 $\alpha=m\in\mathbb{N}$ 时有 $\mathcal{L}[t^m]=\int_0^{\infty}t^m e^{-st}dt=\int_0^{\infty}t^m\frac{de^{-st}}{-s}=-\frac{e^{-st}}{s}\cdot t^m\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{\infty}e^{-st}\,mt^{m-1}dt$
$$=-\frac{m}{s^2}\int_0^{\infty}t^{m-1}de^{-st}=\cdots=-\frac{m!}{s^{m+1}}\int_0^{\infty}de^{-st}=\frac{m!}{s^{m+1}},\quad Re(s)>0.$$

对于一般 $\alpha>-1$，利用复变函数积分知识：(见书本《积分变换》(张元林)，P83，§2.1节，例4.)　(课堂略过.)

$$F(s)=\int_0^{\infty}t^{\alpha}e^{-st}\,dt=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^{\infty}t^{\alpha}e^{-t}\,dt=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

此处并不简单! s 为复数，积分限应为 $[0, s\cdot\infty)$，但确实等于 $[0,+\infty)$ 积分!

注：① $\mathcal{L}[1]=\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$.

② $\Gamma(m)=\int_0^\infty e^{-t}t^{m-1}dt$, $m>0$, $m\Gamma(m)=\Gamma(m+1)$. 当 $m\in\mathbb{Z}_+$, $\Gamma(m+1)=m!$

例3. 求 $\mathcal{L}[\delta(t)]$. 解：$\mathcal{L}[\delta(t)](s)=\int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt=e^{-st}\big|_{t=0}=1$. (Laplace 变换积分包含0点)

2. 性质 (1) 线性性：$\mathcal{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha\mathcal{L}[f(t)]+\beta\mathcal{L}[g(t)]$.

(2) 平移性：设 $f(t)=0$, $t<0$, $a\in\mathbb{R}$, $\tau>0$, $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$. 则有 $\mathcal{L}[u(t-\tau)]=e^{-\tau s}\mathcal{L}[1]=\frac{e^{-\tau s}}{s}$.

1.(延迟性)：$\mathcal{L}[f(t-\tau)u(t-\tau)](s)=e^{-\tau s}F(s)$, 或 $\mathcal{L}^{-1}[e^{-\tau s}F(s)]=f(t-\tau)u(t-\tau)$; (例：$\mathcal{L}[\cos(t-\tau)u(t-\tau)]=e^{-\tau s}\mathcal{L}[\cos t]$)

2.(位移性)：$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)=F(s-a)$, 或 $\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]=e^{at}f(t)$. (例：$\mathcal{L}[e^{\tau t}\sin at]=\mathcal{L}[\sin at](s-\tau)$)

(3) 微分性：设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, 则

1. $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$. (例：$\mathcal{L}[t^m]=\frac{m!}{s^{m+1}}$, $m\in\mathbb{Z}_+$)

2. $F'(s)=\mathcal{L}[-tf(t)]$, $F^{(n)}(s)=\mathcal{L}[(-1)^nt^nf(t)]$. (像微分性) (例：$\mathcal{L}[t\sin at]=-\frac{d}{ds}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]$, $a>0$)

证明：① $\mathcal{L}[f'(t)]=\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty (f(t)e^{-st})'+sf(t)e^{-st}dt=f(t)e^{-st}\big|_0^\infty+s\mathcal{L}[f(t)]=sF(s)-f(0)$.

之后可用归纳法.

② $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ 默认求导和积分可交换, 易证.

(4) 积分性：设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$, 则 $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}$.

证明：令 $g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$, 则 $g'(t)=f(t)$, $g(0)=0$. $F(s)=\mathcal{L}[g'(t)]=s\mathcal{L}[g(t)]-g(0)\Rightarrow\mathcal{L}[g(t)]=\frac{F(s)}{s}$. #

(5) 乘法性质

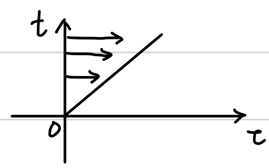
定义：设 $f_1(t)$和$f_2(t)$是实轴上的两个绝对可积函数. 函数f_1与f_2的拉氏卷积为

$$(f_1*f_2)(t)=[(f_1\cdot u)*(f_2\cdot u)](t)=\begin{cases}\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

u为Heaviside函数.

例5. 设 $f_1(t)=t$, $f_2(t)=\sin t$, 求 $(f_1*f_2)(t)$.

解：$t>0$ 时 $(f_1*f_2)(t)=\int_0^t\tau\sin(t-\tau)d\tau=t-\sin t$. (分部积分) #



定理：设 $F_1(s)=\mathcal{L}[f_1(t)]$, $F_2(s)=\mathcal{L}[f_2(t)]$, 则 $\mathcal{L}[f_1*f_2]=F_1(s)\cdot F_2(s)$.

证明：$\mathcal{L}[f_1*f_2]=\int_0^\infty\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\, e^{-st}dt=\int_0^\infty\int_\tau^\infty f_1(\tau)f_2(t-\tau)e^{-st}dt\,d\tau$

$=\int_0^\infty f_1(\tau)\int_0^\infty f(\xi)e^{-s(\xi+\tau)}d\xi\,d\tau=\int_0^\infty f_1(\tau)e^{-s\tau}d\tau\cdot\int_0^\infty f(\xi)e^{-s\xi}d\xi=F_1(s)\cdot F_2(s)$. #

例6. 求 $\mathcal{L}\left[\int_0^t\tau e^{a\tau}\sin(a\tau)d\tau\right]$.

解：

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t\tau e^{a\tau}\sin(a\tau)d\tau\right]\overset{(积分性)}{=}\frac{\mathcal{L}[te^{at}\sin(at)]}{s}\overset{(微分性)}{=}\frac{-\mathcal{L}[e^{at}\sin(at)]'}{s}\overset{(平移性)}{=}-\frac{1}{s}\cdot\left[\frac{a}{(s-a)^2+a^2}\right]'=\frac{2a(s-a)}{s(s^2-2as+2a^2)^2}$$ #

§7.2 拉氏逆变换及其应用.

思路：$s=\beta+i\omega$， 由于 $\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{F}[f(t)u(t)e^{-\beta t}]$，有：

$$f(t)u(t)e^{-\beta t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)u(\tau)e^{-\beta\tau}e^{-i\omega\tau}d\tau\right]e^{i\omega t}d\omega$$

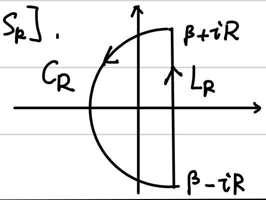
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\left(\int_{0}^{\infty}f(\tau)e^{-(\beta+i\omega)\tau}d\tau\right)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overset{\mathcal{L}[f(t)]}{F(\beta+i\omega)}e^{i\omega t}d\omega,\quad t>0.$$

$$\Rightarrow\quad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+i\omega)e^{i(\beta+i\omega)t}d\omega=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{ts}ds,\quad t>0.$$ —— $\boxed{\text{Laplace 反演积分.}}$

定理：若 $F(s)$ 奇点为 $s_1,\cdots,s_n$，且 $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=0$. 则 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sum\limits_{k=1}^{n}\text{Res}[F(s)e^{ts},s_k]$.

证明思路：取 β 充分大，使 $\text{Re}(s_k)<\beta$，$k=1,2,\cdots,n$. (最终与β无关！)

考虑 $F(z)e^{tz}$ 沿 $L_R\cup C_R$ 的积分. (∞非孤立奇点)



例1： 求 $F(s)=\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$ 的拉氏变换. (部分分式分解可以化简)

解： $s_1=i$，$s_2=-i$，$s_3=2i$，$s_4=-2i$ 为 $F(s)e^{ts}$ 的4个一阶极点，有

$\text{Res}[F(s)e^{ts},i]=\dfrac{e^{it}}{6i}$， $\text{Res}[F(s)e^{ts},-i]=-\dfrac{e^{-it}}{6i}$， $\text{Res}[F(s)e^{ts},2i]=-\dfrac{e^{2it}}{12i}$， $\text{Res}[F(s)e^{ts},-2i]=\dfrac{e^{-2it}}{12i}$

$$\Rightarrow\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\sum_{k=1}^{4}\text{Res}[F(s)e^{ts},s_k]=\frac{\sin t}{3}-\frac{\sin 2t}{6}.$$ #

例2： 求 $F(s)=\dfrac{s+3}{s^3+3s^2+6s+4}$

解： $s^3+3s^2+6s+4=s^3+3s^2+2s+4(s+1)=s(s+2)(s+1)+4(s+1)=(s+1)(s+1-\sqrt{3}i)(s+1+\sqrt{3}i)$

$s_1=-1$， $s_2=-1+\sqrt{3}i$， $s_3=-1-\sqrt{3}i$

$\text{Res}[F(s)e^{ts},-1]=\frac{2}{3}e^{-t}$， $\text{Res}[F(s)e^{ts},-1+\sqrt{3}i]=-\dfrac{2+\sqrt{3}i}{6}e^{(-1+\sqrt{3}i)t}$， $\text{Res}[F(s)e^{ts},-1-\sqrt{3}i]=-\dfrac{2-\sqrt{3}i}{6}e^{(-1-\sqrt{3}i)t}$.

$$\Rightarrow\ f(t)=\sum_{k=1}^{3}\text{Res}[F(s)e^{ts},s_k]=\frac{1}{3}e^{-t}\left(2-2\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\right).$$

例3. 求 $F(s)=\ln\dfrac{s^2-1}{s^2}$ 的拉氏逆变换. $\left(\dfrac{s^2-1}{s^2}\notin(-\infty,0]\right)$

解： 设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$， 则 $F'(s)=\mathcal{L}[-tf(t)]=\dfrac{s^2}{s^2-1}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{s^3}=\dfrac{2}{s(s^2-1)}=G(s)$

$$f(t)=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}[G(s)]=-\frac{1}{t}\left(\text{Res}[G(s)e^{ts},0]+\text{Res}[G(s)e^{ts},-1]+\text{Res}[G(s)e^{ts},1]\right)$$

$$=-\frac{1}{t}\left[-2+e^{-t}+e^{t}\right]=\frac{1}{t}\left(2-e^{-t}-e^{t}\right).$$

例4. 求 $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+2s+2)^2}$ 的拉氏逆变换.

解：方法一、由卷积性可知： $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+2s+2}\right]*\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+2s+2}\right]$， $-1\pm i$ 为 $\dfrac{1}{s^2+2s+2}$ 的一阶极点.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+2}\right]=\text{Res}\left[\frac{e^{ts}}{s^2+2s+2},-1+i\right]+\text{Res}\left[\frac{e^{ts}}{s^2+2s+2},-1-i\right]=\frac{e^{-(1-i)t}}{2i}-\frac{e^{-(1+i)t}}{2i}=e^{-t}\sin t.$$

$$f(t)=\int_0^t e^{-\tau}\sin\tau\left[e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)\right]d\tau=\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t-t\cos t).$$

方法二、直接计算留数. $-1\pm i$ 为 $F(s)$ 的二阶极点.

$$\mathrm{Res}[F(s)e^{ts},-1-i]=\lim_{s\to-1-i}\frac{d}{ds}\left[(s+1+i)^2F(s)e^{ts}\right]=\frac{d}{ds}\frac{e^{ts}}{(s+1-i)^2}\Big|_{s=-1-i}=\frac{1}{4}e^{-t}(i-t)(\cos t-i\sin t)$$

$$\mathrm{Res}[F(s)e^{ts},-1+i]=\frac{d}{ds}\frac{e^{ts}}{(s+1+i)^2}\Big|_{s=-1+i}=-\frac{1}{4}e^{-t}(t+i)(\cos t+i\sin t)$$

$$\Rightarrow f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{4}e^{-t}\left[(i-t)(\cos t-i\sin t)-(t+i)(\cos t+i\sin t)\right]=\frac{e^{-t}}{2}(\sin t-t\cos t).$$

例5. 求 $F(s)=\frac{1+e^{-2s}}{s^2}$ 的拉氏逆变换. （$\lim\limits_{s\to\infty}F(s)$不存在，故不可用逆变换定理.）

解: $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right]$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=\lim\limits_{s\to0}\frac{d}{ds}\left[s^2\cdot\frac{e^{ts}}{s^2}\right]=t=tu(t)$

由平移性可知: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{s^2}\right]=(t-2)u(t-2)$. 故 $f(t)=tu(t)+(t-2)u(t-2)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t, & 0\le t<2,\\ 2(t-1), & t\ge2.\end{cases}$

例6: 求解微分方程: $f''+4f'+3f=e^{-t}$, $f(0)=f'(0)=1$.

解: 设 $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]$. 利用微分性: $\mathcal{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)=s^2F(s)-s-1$

$\mathcal{L}[f'(s)]=sF(s)-f(0)=sF(s)-1$, $\mathcal{L}[e^{-t}]=\int_0^\infty e^{-t}\cdot e^{-st}dt=\frac{1}{1+s}$

对方程两端做Laplace变换有: $s^2F(s)-s-1+4sF(s)-4+3F(s)=\frac{1}{1+s}$

$$\Rightarrow F(s)=\left(\frac{1}{1+s}+5+s\right)\cdot\frac{1}{s^2+4s+3}=\frac{1}{(s+1)^2(s+3)}+\frac{s+5}{(s+1)(s+3)}=\frac{7}{4}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{3}{4}\frac{1}{s+3}$$

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{-3}{4}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]+\frac{7}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]$$
$$=-\frac{3}{4}\cdot e^{-3t}+\frac{7}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}t\cdot e^{-t}$$

#

例7. 求解微分方程组: $\begin{cases}x'+x-y=e^t,\\ 3x+y'-2y=2e^t,\end{cases}$ $x(0)=y(0)=1$.

解: 令 $X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$, $Y(s)=\mathcal{L}[Y(t)]$, 对方程组两边做Laplace变换可得:

$$\begin{cases}sX(s)-1+X(s)-Y(s)=\frac{1}{s-1}\\ 3X(s)+sY(s)-1-2Y(s)=\frac{2}{s-1}\end{cases}\Rightarrow X(s)=Y(s)=\frac{1}{s-1}\Rightarrow x(t)=y(t)=e^t.$$