第五章　定　积　分

习　题　五

5.1

1. 写出下列定积分的定义式.

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$；

$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\xi_i^2}\Delta x_i$

其中 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$

(2) $\int_0^{\pi}\sin x dx$.

$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sin\xi_i\,\Delta x_i$

其中 $\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$

2. 设 $\int_{-1}^{1}3f(x)dx=18$，$\int_{-1}^{3}f(x)dx=4$，$\int_{-1}^{3}g(x)dx=3$，求：

(1) $\int_1^3 f(x)dx$；

$=\int_{-1}^{3}f(x)dx-\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=4-6=-2$

(2) $\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]dx$.

解 $=\frac{4}{5}\int_{-1}^{3}f(x)dx+\frac{3}{5}\int_{-1}^{3}g(x)dx$

$=\frac{4}{5}\times 4+\frac{3}{5}\times 3=5$

3. 说明下列各对积分中哪一个的值较大.

(1) $\int_0^1 x^2 dx$ 还是 $\int_0^1 x^3 dx$？

在 $[0,1]$ 上 $x^2\ge x^3$，且 $x^2\ne x^3$，所以

$\int x^2dx>\int x^3dx$

(2) $\int_0^1 x dx$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x)dx$？

在 $[0,1]$ 上 $\ln(1+x)\le x$，且 $\ln(1+x)\ne x$，所以

$\int_0^1\ln(1+x)dx<\int_0^1 x dx$

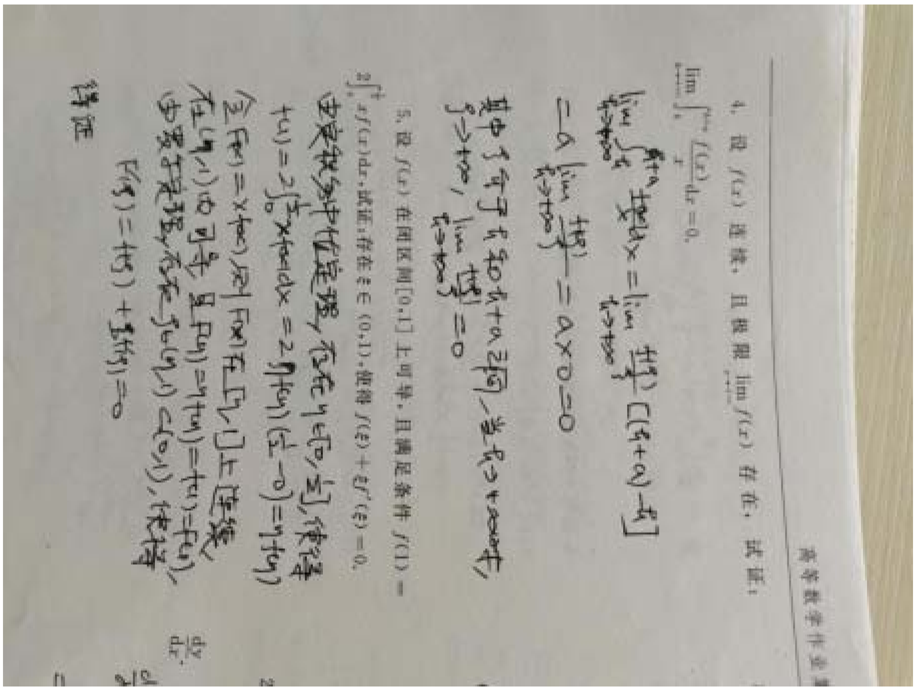
(3) $\int_0^{\pi}\sin x dx$ 还是 $\int_0^{2\pi}\sin x dx$？

在 $[\pi,2\pi]$ 上 $\sin x\le 0$ 且 $\sin x\ne 0$，所以

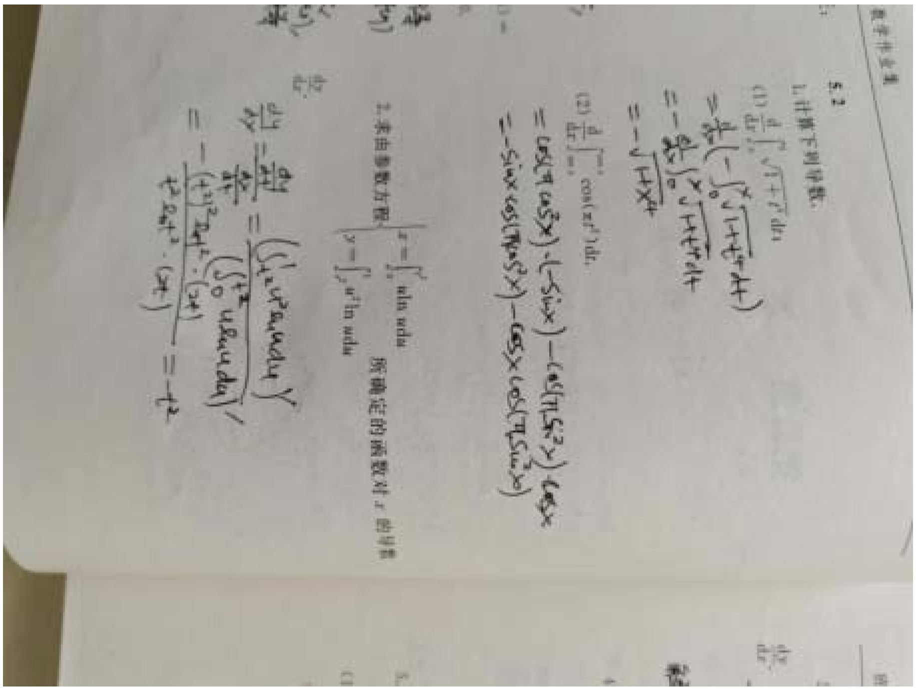
$\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx<0$，于是

$\int_0^{2\pi}\sin x dx=\int_0^{\pi}\sin x dx+\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx$

$<\int_0^{\pi}\sin x dx+0=\int_0^{\pi}\sin x dx$



高等数学作业集
4. 设 $f(x)$ 连续，且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，试证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+a}\frac{f(x)}{x}dx=0$.
$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_t^{t+a}\frac{f(x)}{x}dx=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(\xi)}{\xi}[(t+a)-t]$
$=a\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(\xi)}{\xi}=a\times0=0$
其中 ξ 介于 t 和 $t+a$ 之间，当 $t\to+\infty$ 时，$\xi\to+\infty$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(\xi)}{\xi}=0$
5. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可导，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$，试证：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.
由定积分中值定理，存在 $\eta\in[0,\frac{1}{2}]$，使得
$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=2\eta f(\eta)(\frac{1}{2}-0)=\eta f(\eta)$
令 $F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，
在 $(\eta,1)$ 内可导，且 $F(\eta)=\eta f(\eta)=f(1)=F(1)$，
由罗尔定理，存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得
$F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$
得证



高等数学作业集
5.2
1. 计算下列导数.
(1) $\frac{d}{dx}\int_x^0\sqrt{1+t^4}\,dt$
$=\frac{d}{dx}(-\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,dt)$
$=-\frac{d}{dx}\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,dt$
$=-\sqrt{1+x^4}$
(2) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$.
$=\cos(\pi\cos^2x)\cdot(-\sin x)-\cos(\pi\sin^2x)\cdot\cos x$
$=-\sin x\cos(\pi\cos^2x)-\cos x\cos(\pi\sin^2x)$
2. 求由参数方程 $\begin{cases}x=\int_1^t u\ln u\,du\\ y=\int_1^{t^2}u^2\ln u\,du\end{cases}$ 所确定的函数对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.
$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{(\int_{t^2}^1u^2\ln u\,du)'}{(\int_0^{t^2}u\ln u\,du)'}$
$=-\frac{(t^2)^2\ln t^2\cdot(2t)}{t^2\ln t^2\cdot(2t)}=-t^2$

班号　　　　姓名　　　　学号

3. 求由 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所确定的隐函数对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

方程关于 x 求导得

$e^y \frac{dy}{dx} + \cos x = 0$

解得 $\frac{dy}{dx} = -e^{-y}\cos x$

4. 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$，求 $f(x)$.

方程求导得

$f(x) = 2x + 3x^2$

5. 求下列极限.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$;

$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1} = 1$

(2) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,dt}$;

$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan\sin x}\cdot\cos x}{\sqrt{\sin\tan x}\cdot\sec^2 x}$

$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan\sin x}}{\sqrt{\sin\tan x}}\cdot\lim_{x\to 0^+}\cos^3 x$

$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot 1 = 1$

(3) $\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x x^2 f(t)dt}{x-a}$，其中 $f(x)$ 连续.

$= \lim_{x\to a}\frac{x^2\int_a^x f(t)dt}{x-a}$

$= \lim_{x\to a}x^2 \lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a}$

$= a^2 \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1} = a^2 f(a)$

6. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^3 2x\,dx$;

$= x^2\Big|_0^3 = 9 - 0 = 9$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$；

$= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$；

$= \arcsin \frac{x}{2} \Big|_0^1$

$= \arcsin \frac{1}{2} - 0 = \frac{\pi}{6}$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\,d\theta$；

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta$

$= (\tan\theta - \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= 1 - \frac{\pi}{4}$

(5) $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$；

$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$

$= \int_1^2 \frac{1}{x}dx - \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}dx$

$= \ln|x| \Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \Big|_1^2$

$= \ln 2 - 0 - \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2)$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$

(6) $\int_0^1 x|x-a|\,dx\ (a>0)$；

当$a \geq 1$时，$\int_0^1 x|x-a|dx = \int_0^1 x(a-x)dx$

$= \int_0^1 (ax - x^2)dx = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}$

当$0<a<1$时，$\int_0^1 x|x-a|dx$

$= \int_0^a x(a-x)dx + \int_a^1 x(x-a)dx$

$= \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_a^1 = \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}$

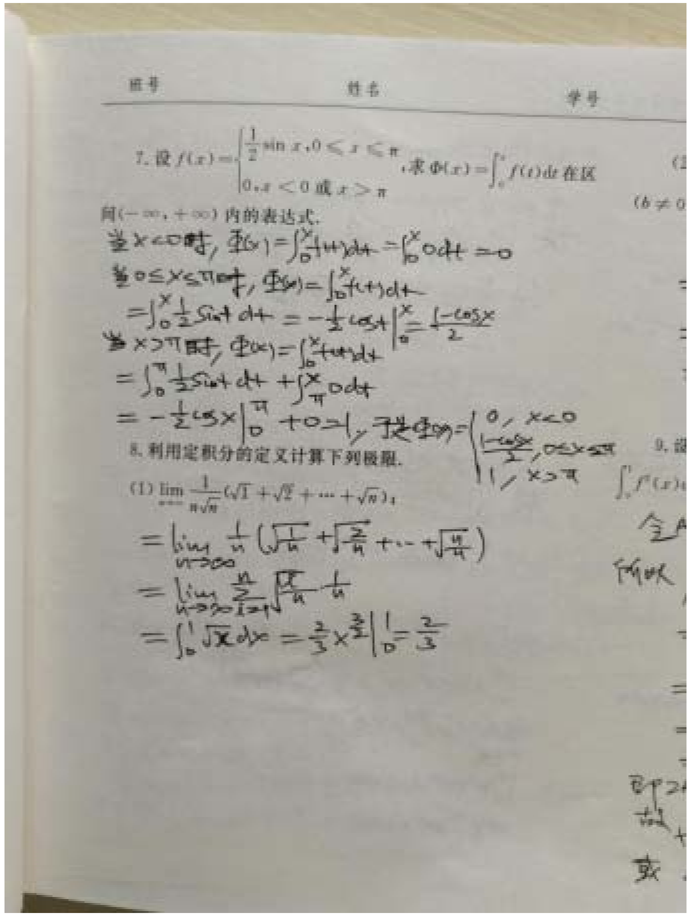
(7) $\int_0^2 f(x)dx$，其中 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2, & x > 1 \end{cases}$.

$= \int_0^1 (x+1)dx + \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 dx$

$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{6}x^3 \Big|_1^2$

$= \left(\frac{3}{2} - 0\right) + \frac{1}{6}(8-1)$

$= \frac{8}{3}$



班号　　姓名　　学号

7. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x, 0\le x\le\pi\\ 0, x<0 \text{ 或 } x>\pi\end{cases}$，求 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

当 $x<0$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x 0dt=0$

当 $0\le x\le\pi$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$

$=\int_0^x \frac{1}{2}\sin t\,dt=-\frac{1}{2}\cos t\Big|_0^x=\frac{1-\cos x}{2}$

当 $x>\pi$ 时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$

$=\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin t\,dt+\int_\pi^x 0dt$

$=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_0^\pi+0=1$，于是 $\Phi(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1-\cos x}{2}, & 0\le x\le\pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$

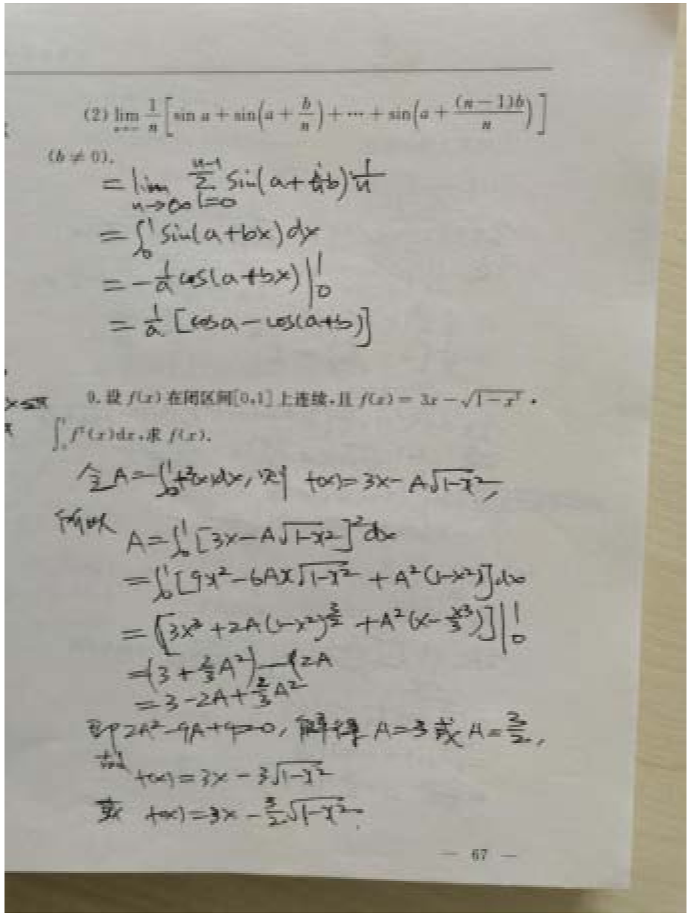
8. 利用定积分的定义计算下列极限.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})$；

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}$

$=\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$



(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin a+\sin\left(a+\frac{b}{n}\right)+\cdots+\sin\left(a+\frac{(n-1)b}{n}\right)\right]$ $(b\neq 0)$.

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\left(a+\frac{i}{n}b\right)\frac{1}{n}$

$=\int_0^1\sin(a+bx)dx$

$=-\frac{1}{b}\cos(a+bx)\Big|_0^1$

$=\frac{1}{b}[\cos a-\cos(a+b)]$

9. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\cdot\int_0^1 f^2(x)dx$，求 $f(x)$.

令 $A=\int_0^1 f^2(x)dx$，则 $f(x)=3x-A\sqrt{1-x^2}$，

所以 $A=\int_0^1[3x-A\sqrt{1-x^2}]^2dx$

$=\int_0^1[9x^2-6Ax\sqrt{1-x^2}+A^2(1-x^2)]dx$

$=\left[3x^3+2A(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+A^2(x-\frac{x^3}{3})\right]\Big|_0^1$

$=(3+\frac{2}{3}A^2)-2A$

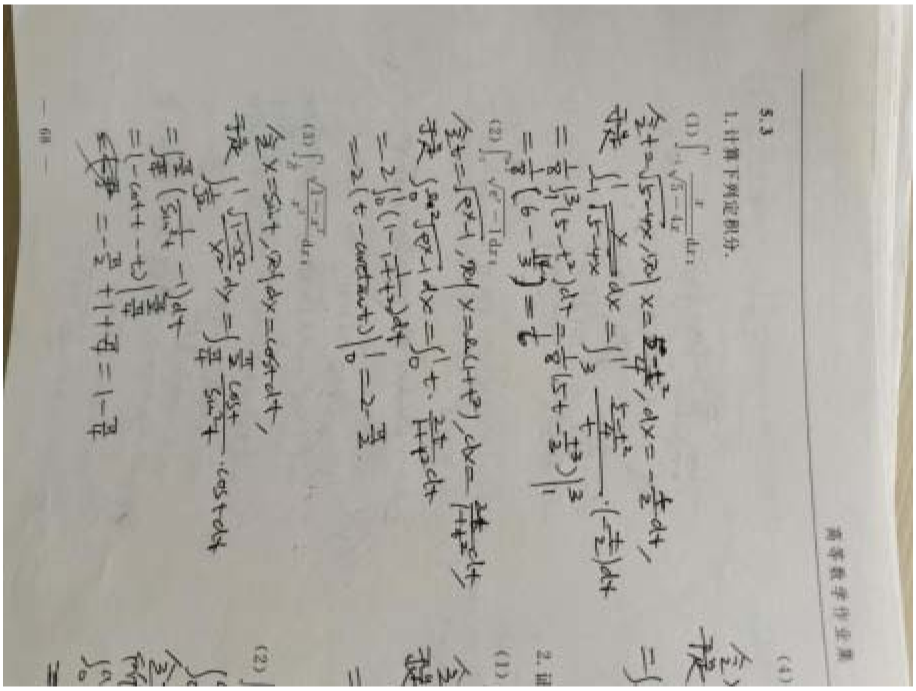
$=3-2A+\frac{2}{3}A^2$

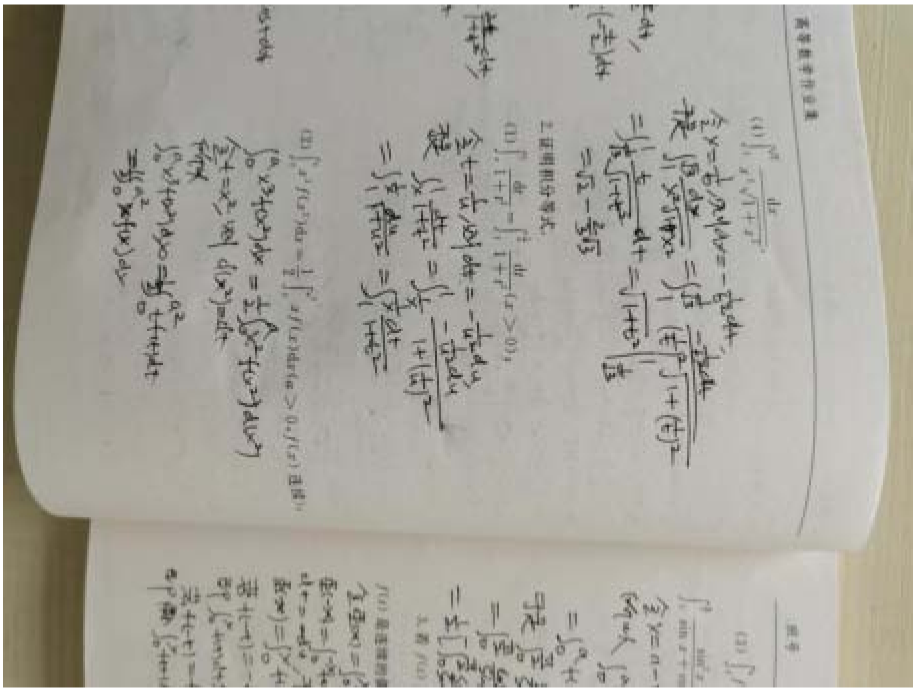
即 $2A^2-9A+9=0$，解得 $A=3$ 或 $A=\frac{3}{2}$，

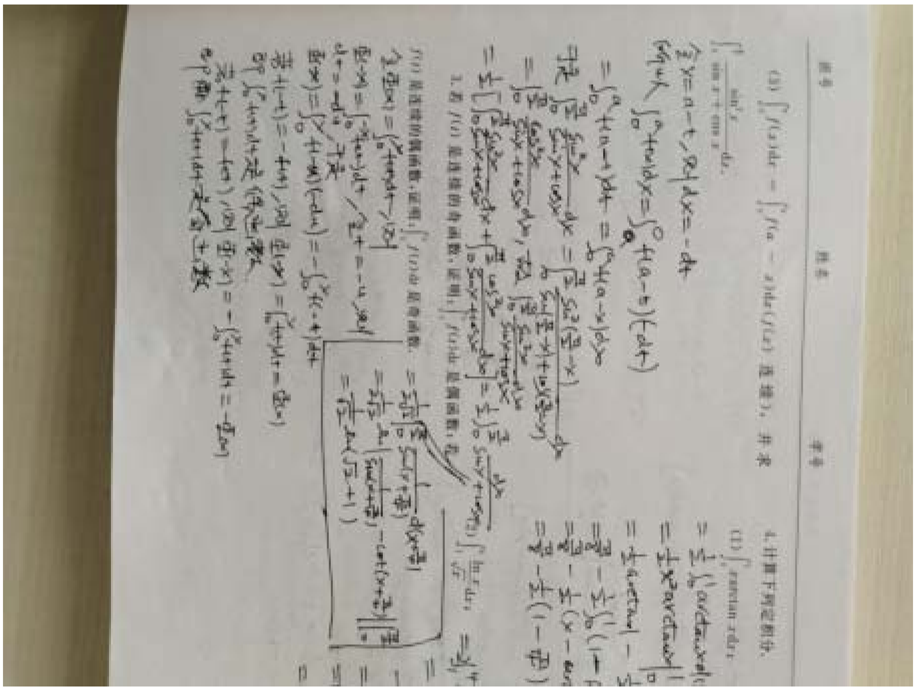
故 $f(x)=3x-3\sqrt{1-x^2}$

或 $f(x)=3x-\frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$.

— 67 —


高等数学作业集
5.3
1. 计算下列定积分.
— 68 —


高等数学作业集
2. 证明积分等式.



班号　　　　姓名　　　　学号

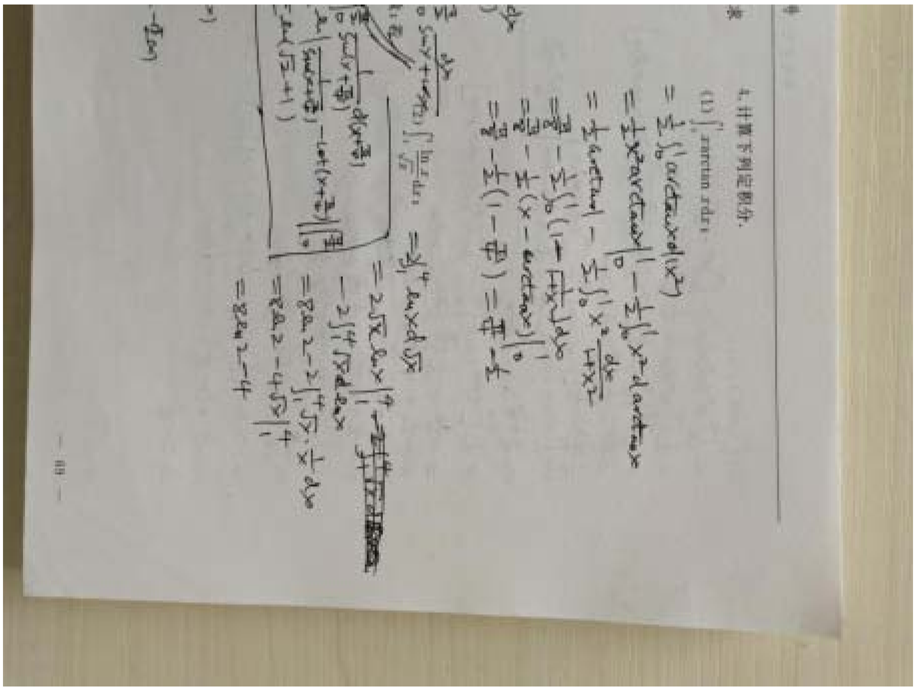
(3) $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ ($f(x)$ 连续)，并求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx$.

3. 若 $f(t)$ 是连续的奇函数，证明：$\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数；若 $f(t)$ 是连续的偶函数，证明：$\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

4. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^1 x\arctan x dx$；

(2) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$；

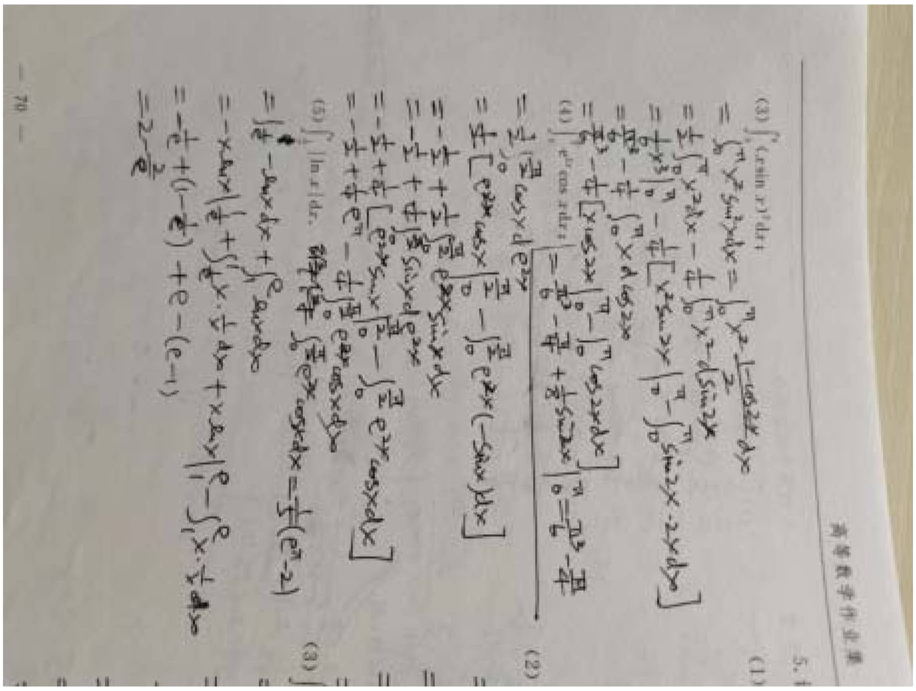


4. 计算下列定积分.

(1) $\int_0^1 x\arctan x dx$；

(2) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$；

— 69 —



高等数学作业集

(3) $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\,dx$;

$=\int_0^{\pi}x^2\sin^2x\,dx=\int_0^{\pi}x^2\cdot\frac{1-\cos2x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2dx-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}x^2\,d\sin2x$

$=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{4}\left[x^2\sin2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin2x\cdot2x\,dx\right]$

$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}x\,d\cos2x$

$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\left[x\cos2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos2x\,dx\right]=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}\sin2x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx$;

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,de^{2x}$

$=\frac{1}{2}\left[e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}(-\sin x)dx\right]$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin x\,dx$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,de^{2x}$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left[e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx\right]$

$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{\pi}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx$

解得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx=\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$

(5) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$.

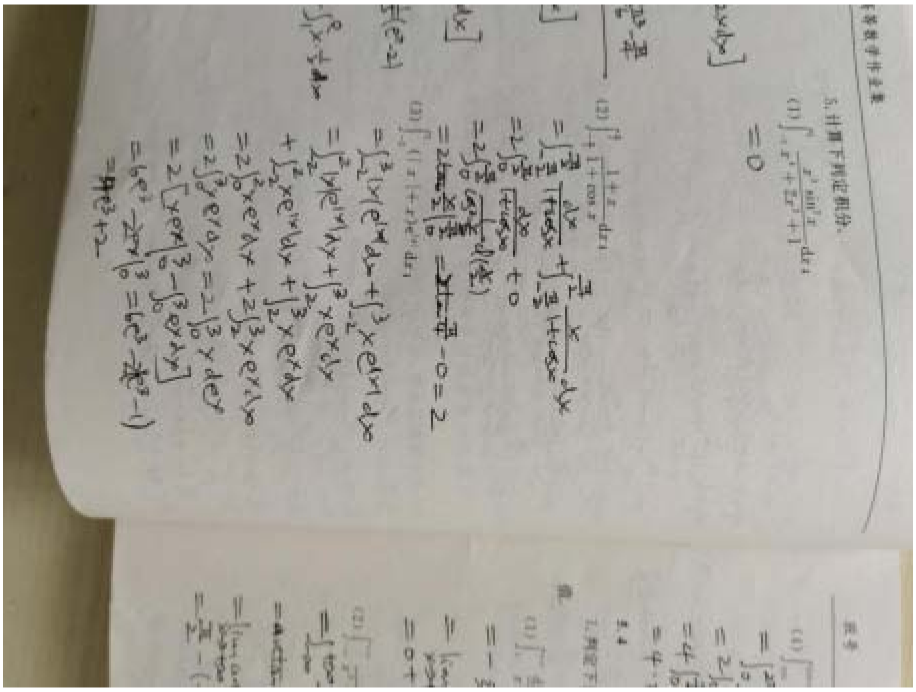
$=\int_{\frac{1}{e}}^{1}-\ln x\,dx+\int_1^{e}\ln x\,dx$

$=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}x\cdot\frac{1}{x}dx+x\ln x\Big|_1^{e}-\int_1^{e}x\cdot\frac{1}{x}dx$

$=-\frac{1}{e}+(1-\frac{1}{e})+e-(e-1)$

$=2-\frac{2}{e}$

— 70 —



高等数学作业集

5. 计算下列定积分.

(1) $\int_{-1}^{1}\frac{x^3\sin^2x}{x^4+2x^2+1}dx$;

$=0$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{1+\cos x}dx$;

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}+0$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}d(\frac{x}{2})$

$=2\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\tan\frac{\pi}{4}-0=2$

(3) $\int_{-2}^{3}(|x|+x)e^{|x|}dx$;

$=\int_{-2}^{3}|x|e^{|x|}dx+\int_{-2}^{3}xe^{|x|}dx$

$=\int_{-2}^{2}|x|e^{|x|}dx+\int_2^3xe^xdx$

$+\int_{-2}^{2}xe^{|x|}dx+\int_2^3xe^xdx$

$=2\int_0^2xe^xdx+2\int_2^3xe^xdx$

$=2\int_0^3xe^xdx=2\int_0^3x\,de^x$

$=2\left[xe^x\Big|_0^3-\int_0^3e^xdx\right]$

$=6e^3-2e^x\Big|_0^3=6e^3-2(e^3-1)$

$=[illegible]e^3+2$

(4) $\int_{n\pi}^{n\pi+2\pi}\sin^4 x\,dx$.

$=\int_0^{2\pi}\sin^4 x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\,dx$

$=2\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$

$=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi$

5.4

1. 判定下列反常积分的收敛性，如果收敛，计算反常积分的值.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$;

$=-\frac{1}{3x^3}\Big|_1^{+\infty}$

$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)+\frac{1}{3}$

$=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2+1}d(x+1)$

$=\arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$=\lim_{x\to+\infty}\arctan(x+1)-\lim_{x\to-\infty}\arctan(x+1)$

$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$

(3) $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

$=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$

$=-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=1$

(4) $\int_0^1\frac{dx}{(1-x)^2}$;

$=-\int_0^1\frac{1}{(1-x)^2}d(1-x)$

$=\frac{1}{1-x}\Big|_0^{1^-}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x}-1=+\infty$

反常积分发散

2. 计算反常积分 $\int_0^1\ln x\,dx$.

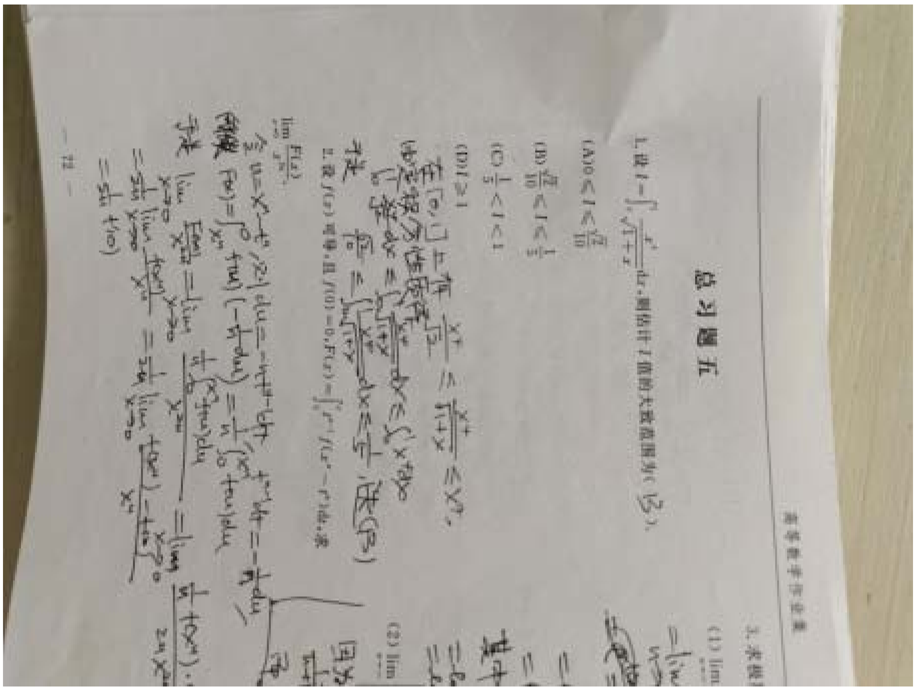
$\int_0^1\ln x\,dx=x\ln x\Big|_{0^+}^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}dx$

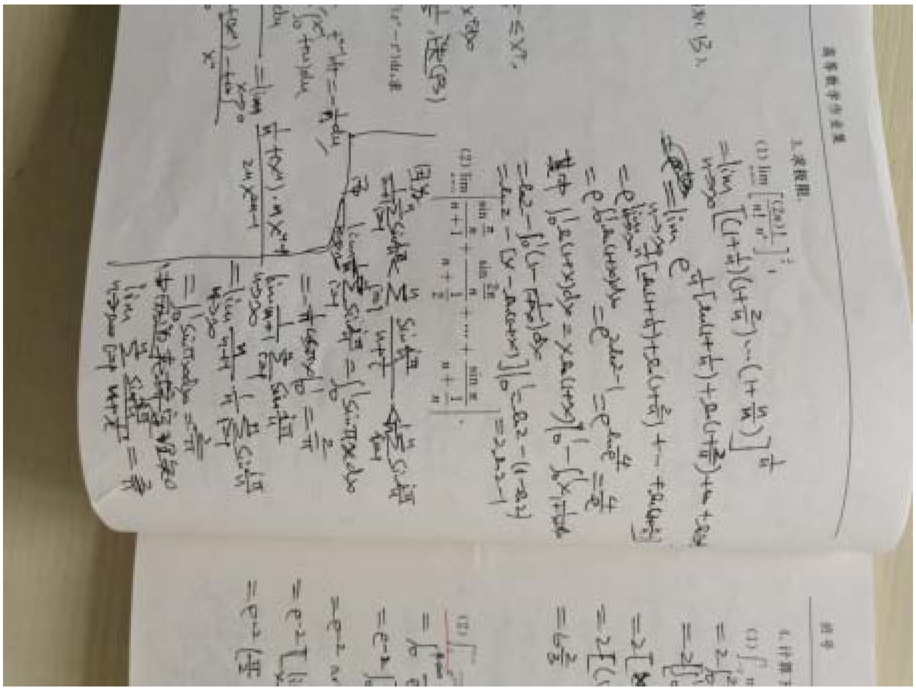
$=0-\lim_{x\to0^+}x\ln x-x\Big|_0^1$

$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}-1$

$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}-1$

$=0-1=-1$


高等数学作业集
总习题五
1. 设 $I=\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}}dx$，则估计 I 值的大致范围为（ ）.
(A) $0\le I\le \frac{\sqrt{2}}{10}$
(B) $\frac{\sqrt{2}}{10}\le I\le \frac{1}{5}$
(C) $\frac{1}{5}<I<1$
(D) $I\ge 1$
2. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$，$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt$，求 $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}$.
— 72 —


高等数学作业集
3. 求极限.
(1) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right]^{\frac{1}{n}}$
(2) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$

班号　　　姓名　　　学号

4. 计算下列积分.

(1) $\int_{-2}^{2} \max\{1, x^2\} dx$;

$= 2\int_0^2 \max\{1, x^2\} dx$

$= 2\left[\int_0^1 1 dx + \int_1^2 x^2 dx\right]$

$= 2\left[x\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_1^2\right]$

$= 2\left[(1-0) + \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right)\right]$

$= 6\frac{2}{3}$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}}$

$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{x-3}}{e^{2x-2}+1} dx$

$= e^{-2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(e^{x-1})^2} de^{x-1}$

$= e^{-2} \arctan e^{x-1}\Big|_0^{+\infty}$

$= e^{-2}\left[\lim_{x\to+\infty} \arctan e^{x-1} - \arctan e^{-1}\right]$

$= e^{-2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan e^{-1}\right)$

(3) $\int_0^{\pi} x^2 |\cos x| dx$;

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d\sin x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 d\sin x$

$= x^2 \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot 2x dx - \left[x^2 \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cdot 2x dx\right]$

$= \frac{\pi^2}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x d\cos x + \frac{\pi^2}{4} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2x d\cos x$

$= \frac{\pi^2}{2} + \left[2x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx\right] - \left[2x\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx\right]$

$= \frac{\pi^2}{2} - 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi + 2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4$

(4) $\int_0^{a} \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} (a > 0)$;

令 $x = a\sin t$, 则 $dx = a\cos t dt$, 于是

$\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos t dt}{a\sin t + a\cos t}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}$　　$\left[\text{因为} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt\right]$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4}$

(5) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - x|}}$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$　　($x=1$为瑕点)

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (x-\frac{1}{2})^2}} d(x-\frac{1}{2}) + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}} d(x-\frac{1}{2})$

$= \arcsin \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1^-} + \ln\left|x - \frac{1}{2} + \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}\right|\Big|_{1^+}^{\frac{3}{2}}$

$= \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \left[\ln\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln\frac{1}{2}\right]$

$= \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{2})$

5.（积分第一中值定理）设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，$g(x)$ 在区间$[a,b]$上连续且不变号，证明：至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

不妨设 $g(x)\geq 0$. 若 $g(x)\equiv 0$, $x\in[a,b]$，则对任意 $\xi\in[a,b]$ 都有 $\int_a^b f(x)g(x)dx=0=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.
若 $g(x)\not\equiv 0$, $x\in[a,b]$，则 $\int_a^b g(x)dx>0$. 又因为 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，所以 $f(x)$ 在$[a,b]$上有最大值 M 和最小值 m，所以
$m\leq f(x)\leq M$, $x\in[a,b]$
由定积分性质得 $m\int_a^b g(x)dx\leq\int_a^b f(x)g(x)dx\leq M\int_a^b g(x)dx$
$\Rightarrow m\leq\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\leq M$，由介值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$，即 $\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

6. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间$[a,b]$上有连续的导数，且 $g(x)\neq 0$.
证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $G(x)=\int_a^x g(t)dt$，则 $F(x)$, $G(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $G'(x)=g(x)\neq 0$
由柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得
$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$
所以 $\frac{\int_a^b f(t)dt-0}{\int_a^b g(t)dt-0}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$
即 $\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$

7. 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上有连续的导数，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)^2}{4}\max_{a\leq x\leq b}|f'(x)|$.

由题设 $|f'(x)|$ 在$[a,b]$上连续，所以 $|f'(x)|$ 在$[a,b]$上有最大值 M，即 $M=\max_{a\leq x\leq b}|f'(x)|$
于是 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right|$
$=\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}(f(x)-f(a))dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(f(x)-f(b))dx\right|$
$=\left|\int_a^{\frac{a+b}{2}}f'(\xi_1)(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f'(\xi_2)(x-b)dx\right|$
$\leq\int_a^{\frac{a+b}{2}}|f'(\xi_1)|(x-a)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b|f'(\xi_2)|(b-x)dx$
$\leq M\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)dx+M\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)dx$
$=M\frac{(b-a)^2}{8}+M\frac{(b-a)^2}{8}=\frac{1}{4}(b-a)^2\max|f'(x)|$

8. 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上可积，证明：函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在$[a,b]$上连续.

因为 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，所以 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界，故存在 $M>0$ 使得
$|f(x)|\leq M$, $x\in[a,b]$
对任意 $x, x+\Delta x\in[a,b]$，都有
$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$
$=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$
于是 $0\leq|\Delta\Phi|=\left|\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt\right|$
$\leq\left|\int_x^{x+\Delta x}|f(t)|dt\right|\leq\left|\int_x^{x+\Delta x}Mdt\right|=M|\Delta x|$
而 $\lim_{\Delta x\to 0}M|\Delta x|=0$，由夹逼准则定理，
$\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta\Phi|=0$，所以 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi=0$，
即 $\Phi(x)$ 在$[a,b]$上连续

第

6.1

1. 求由下列

(1) $y=\frac{1}{x}$

$S=\int_1^2(x$

$=(\frac{x^2}{2}-$

$=\frac{3}{2}-$

(2) $x=y^2-2$

$S=\int_{-1}^1[e^y$

$=\int_{-1}^1(e^y-$

$=(e^y-\frac{y^3}{3}$

$=2e+\frac{?}{?}$