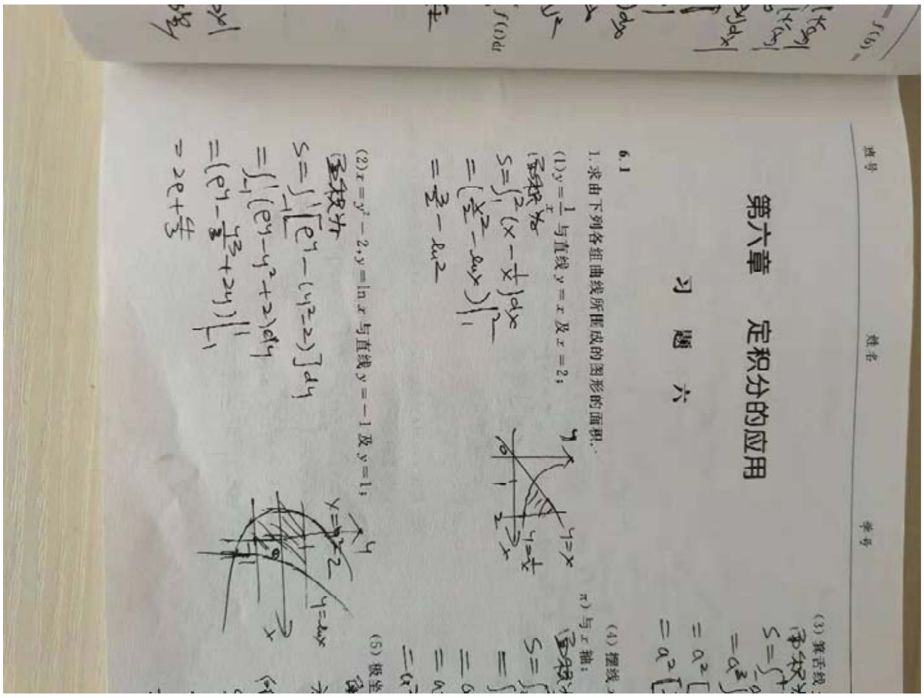


班号 姓名 学号

第六章 定积分的应用

习题六

6.1

1. 求由下列各组曲线所围成的图形的面积.

(1) $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$;

面积为

$S=\int_1^2 (x-\frac{1}{x})dx$

$=(\frac{x^2}{2}-\ln x)\Big|_1^2$

$=\frac{3}{2}-\ln 2$

(2) $x=y^2-2$, $y=\ln x$ 与直线 $y=-1$ 及 $y=1$;

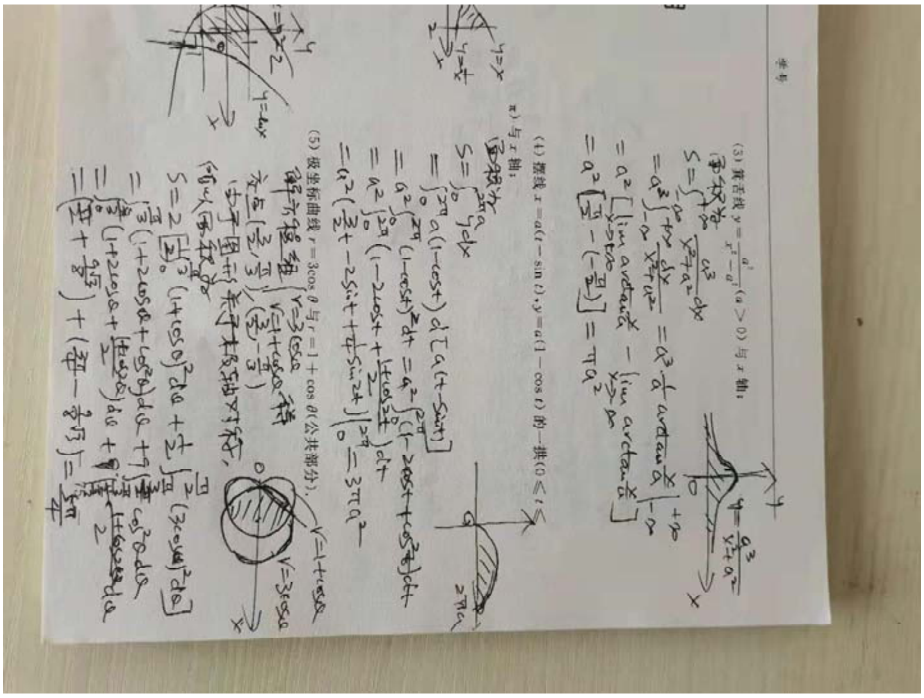
面积为

$S=\int_{-1}^{1}[e^y-(y^2-2)]dy$

$=\int_{-1}^{1}(e^y-y^2+2)dy$

$=(e^y-\frac{y^3}{3}+2y)\Big|_{-1}^{1}$

$=2e+\frac{4}{3}$



学号

(3) 箕舌线 $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}(a>0)$ 与 x 轴;

面积为

$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^3}{x^2+a^2}dx$

$=a^3\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=a^3\cdot\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$=a^2\left[\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{x}{a}-\lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{x}{a}\right]$

$=a^2\left[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\right]=\pi a^2$

(4) 摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 的一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴;

面积为

$S=\int_0^{2\pi a}y\,dx$

$=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\,d[a(t-\sin t)]$

$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt$

$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2})dt$

$=a^2(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t)\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^2$

(5) 极坐标曲线 $r=3\cos\theta$ 与 $r=1+\cos\theta$(公共部分).

解方程组 $\begin{cases}r=3\cos\theta\\ r=1+\cos\theta\end{cases}$ 得

交点 $(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3})$, $(\frac{3}{2},-\frac{\pi}{3})$

由于图形关于极轴对称,

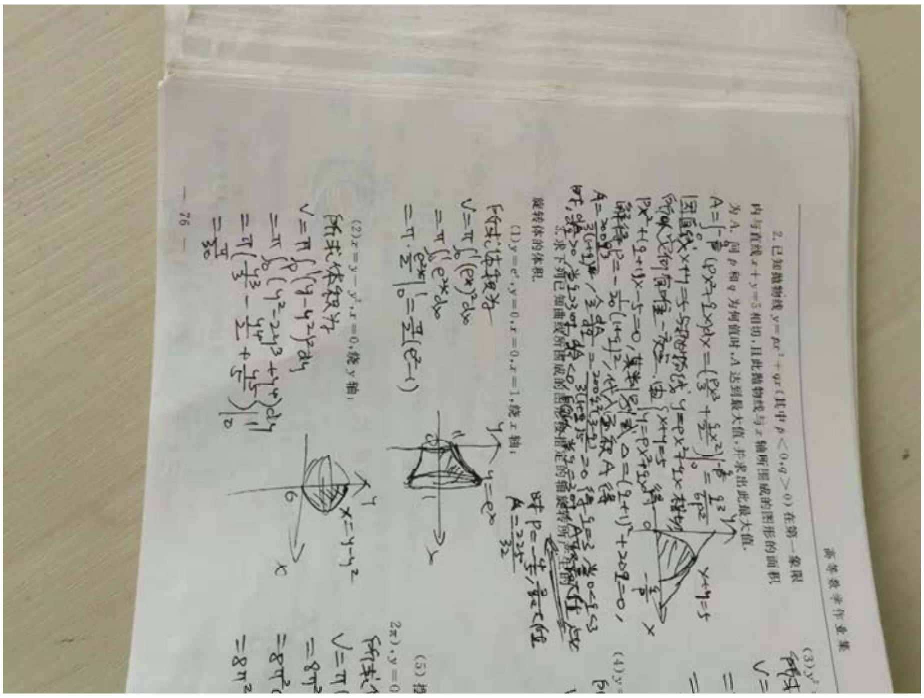
所以面积为

$S=2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2d\theta+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta)^2d\theta\right]$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta+9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2})d\theta+9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$

$=(\frac{\pi}{2}+\frac{9\sqrt{3}}{8})+(\frac{3\pi}{4}-\frac{9}{8}\sqrt{3})=\frac{5\pi}{4}$



2. 已知抛物线 $y=px^2+qx$（其中 $p<0,q>0$）在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切，且此抛物线与 x 轴所围成的图形的面积为 A. 问 p 和 q 为何值时，A 达到最大值，并求出此最大值.

$A=\int_0^{-\frac{q}{p}}(px^2+qx)dx=\left(\frac{px^3}{3}+\frac{qx^2}{2}\right)\Big|_0^{-\frac{q}{p}}=\frac{q^3}{6p^2}$

因直线 $x+y=5$ 与抛物线 $y=px^2+qx$ 相切，所以它们有唯一交点。由 $\begin{cases}x+y=5\\y=px^2+qx\end{cases}$ 得

$px^2+(q+1)x-5=0$，其判别式 $\Delta=(q+1)^2+20p=0$，

解得 $p=-\frac{1}{20}(1+q)^2$，代入面积 A 得

$A=\frac{200q^3}{3(1+q)^4}$，令 $\frac{dA}{dq}=\frac{200q^2(3-q)}{3(1+q)^5}=0$ 得 $q=3$，当 $0<q<3$ 时，$\frac{dA}{dq}>0$，当 $q>3$ 时，$\frac{dA}{dq}<0$，所以 $q=3$ 时 A 取得极大值也是最大值

时 $p=-\frac{4}{5}$，最大值 $A=\frac{225}{32}$

3. 求下列已知曲线所围成的图形按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积.

(1) $y=e^x, y=0, x=0, x=1$，绕 x 轴；

所求体积为

$V=\pi\int_0^1(e^x)^2dx$

$=\pi\int_0^1 e^{2x}dx$

$=\pi\cdot\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$

(2) $x=y-y^2, x=0$，绕 y 轴；

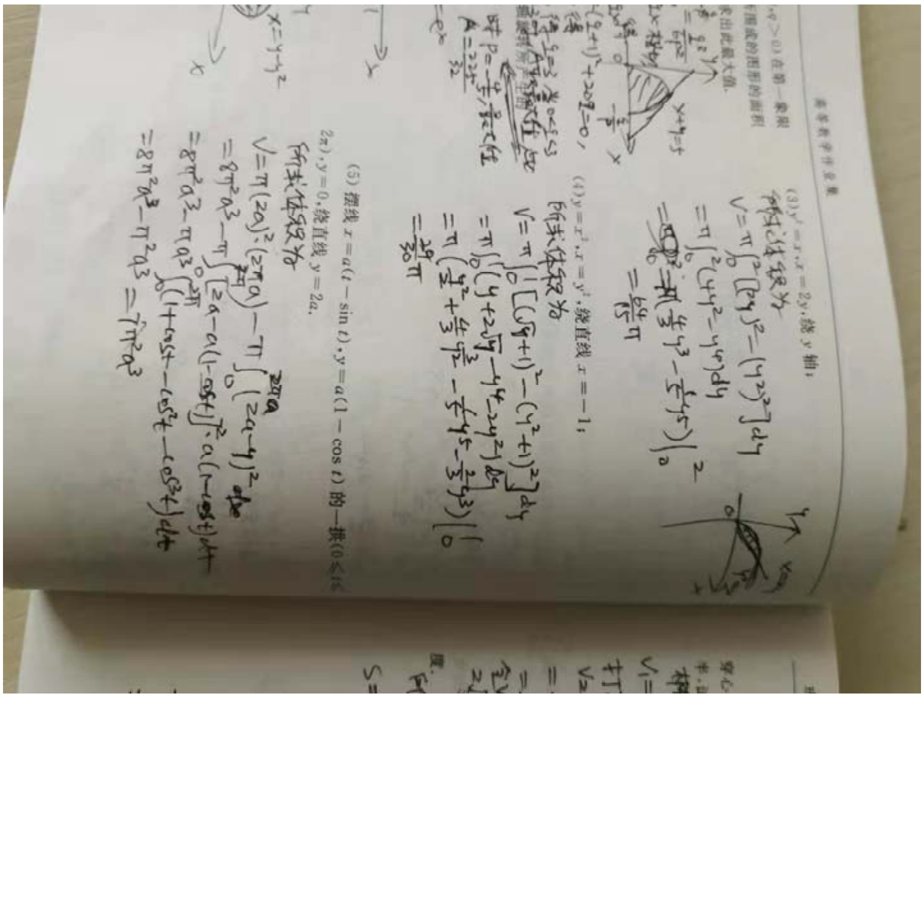
所求体积为

$V=\pi\int_0^1(y-y^2)^2dy$

$=\pi\int_0^1(y^2-2y^3+y^4)dy$

$=\pi\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{2}+\frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^1$

$=\frac{\pi}{30}$



(3) $y^2=x, x=2y$，绕 y 轴；

所求体积为

$V=\pi\int_0^2[(2y)^2-(y^2)^2]dy$

$=\pi\int_0^2(4y^2-y^4)dy$

$=\pi\left(\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{5}y^5\right)\Big|_0^2$

$=\frac{64}{15}\pi$

(4) $y=x^2, x=y^2$，绕直线 $x=-1$；

所求体积为

$V=\pi\int_0^1[(\sqrt{y}+1)^2-(y^2+1)^2]dy$

$=\pi\int_0^1(y+2\sqrt{y}-y^4-2y^2)dy$

$=\pi\left(\frac{y^2}{2}+\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}y^5-\frac{2}{3}y^3\right)\Big|_0^1$

$=\frac{29}{30}\pi$

(5) 摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 的一拱 $(0\leq t\leq 2\pi)$，$y=0$，绕直线 $y=2a$.

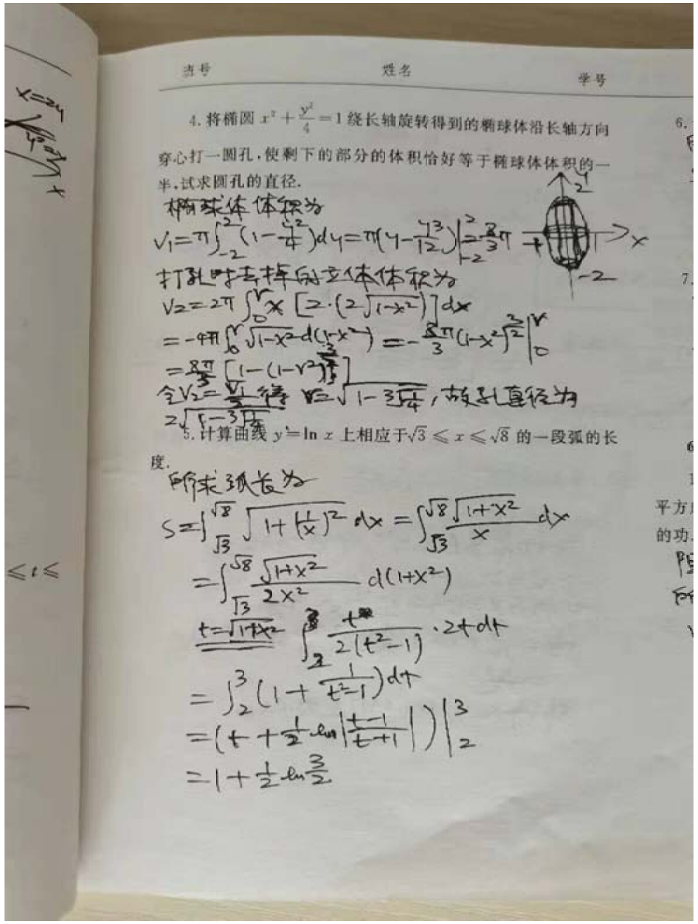
所求体积为

$V=\pi(2a)^2\cdot(2\pi a)-\pi\int_0^{2\pi a}(2a-y)^2dx$

$=8\pi^2a^3-\pi\int_0^{2\pi}[2a-a(1-\cos t)]^2\cdot a(1-\cos t)dt$

$=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t-\cos^2t-\cos^3t)dt$

$=8\pi^2a^3-\pi^2a^3=7\pi^2a^3$



4. 将椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 绕长轴旋转得到的椭球体沿长轴方向穿心打一圆孔，使剩下的部分的体积恰好等于椭球体体积的一半，试求圆孔的直径.

椭球体体积为

$V_1=\pi\int_{-2}^{2}(1-\frac{y^2}{4})dy=\pi(y-\frac{y^3}{12})\Big|_{-2}^{2}=\frac{8}{3}\pi$

打孔时去掉的立体体积为

$V_2=2\pi\int_0^r x\,[2\cdot(2\sqrt{1-x^2})]dx$

$=-4\pi\int_0^r\sqrt{1-x^2}\,d(1-x^2)=-\frac{8\pi}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^r$

$=\frac{8\pi}{3}[1-(1-r^2)^{\frac{3}{2}}]$

令 $V_2=\frac{V_1}{2}$ 得 $r=\sqrt{1-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}}$，故孔直径为 $2\sqrt{1-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}}$

5. 计算曲线 $y=\ln x$ 上相应于 $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

所求弧长为

$S=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$

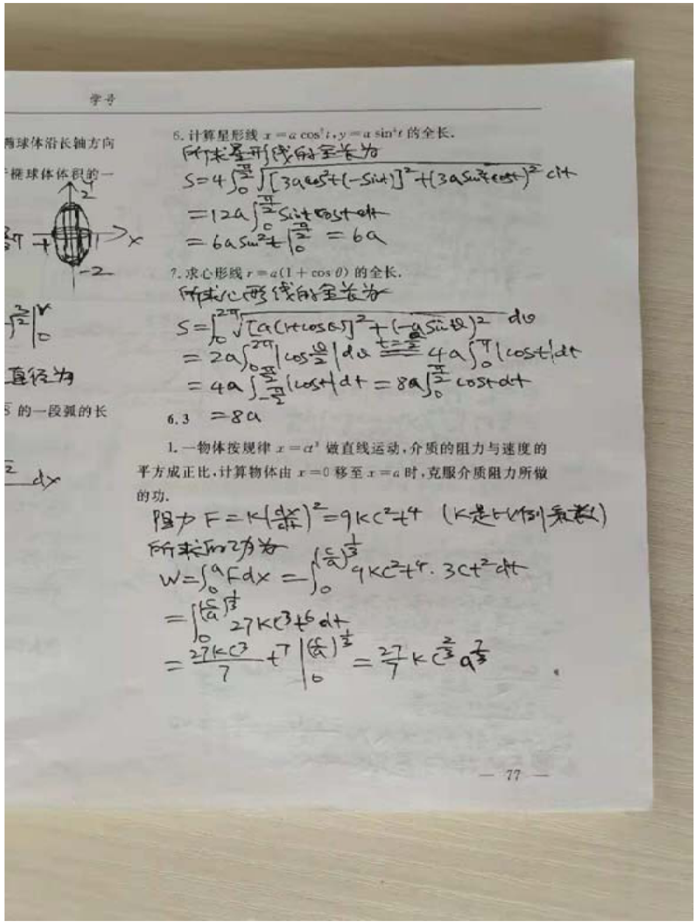
$=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2}\,d(1+x^2)$

$\xlongequal{t=\sqrt{1+x^2}}\int_2^3\frac{t}{2(t^2-1)}\cdot 2t\,dt$

$=\int_2^3(1+\frac{1}{t^2-1})dt$

$=(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|)\Big|_2^3$

$=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$



6. 计算星形线 $x=a\cos^3t,\ y=a\sin^3t$ 的全长.

所求星形线的全长为

$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[3a\cos^2t(-\sin t)]^2+(3a\sin^2t\cos t)^2}\,dt$

$=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt$

$=6a\sin^2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$

7. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长.

所求心形线的全长为

$S=\int_0^{2\pi}\sqrt{[a(1+\cos\theta)]^2+(-a\sin\theta)^2}\,d\theta$

$=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta\xlongequal{t=\frac{\theta}{2}}4a\int_0^{\pi}|\cos t|dt$

$=4a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|dt=8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$

$=8a$

6.3

1. 一物体按规律 $x=ct^3$ 做直线运动，介质的阻力与速度的平方成正比，计算物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时，克服介质阻力所做的功.

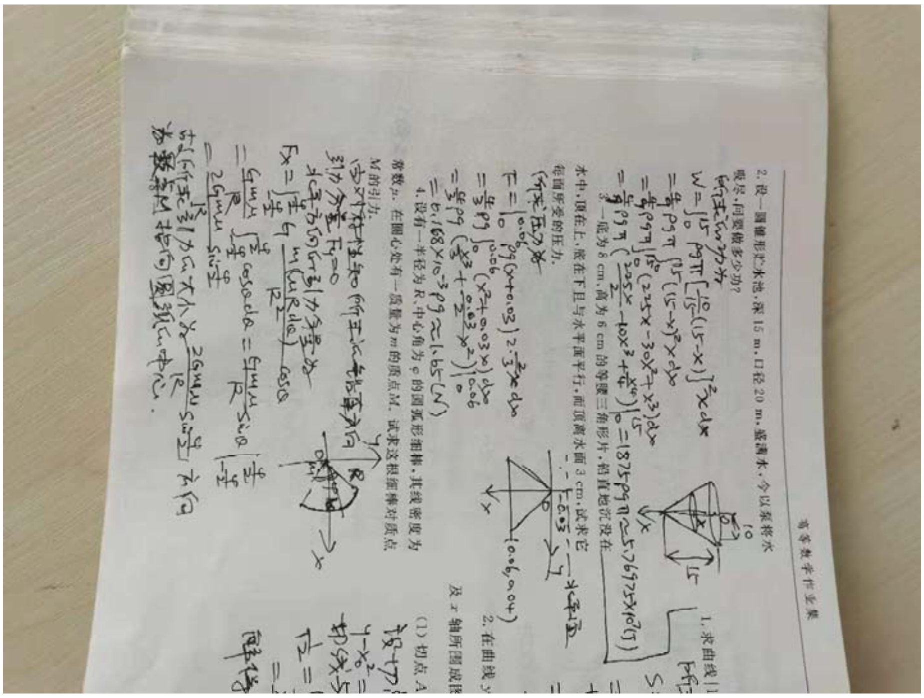
阻力 $F=k(\frac{dx}{dt})^2=9kc^2t^4$ （k是比例系数）

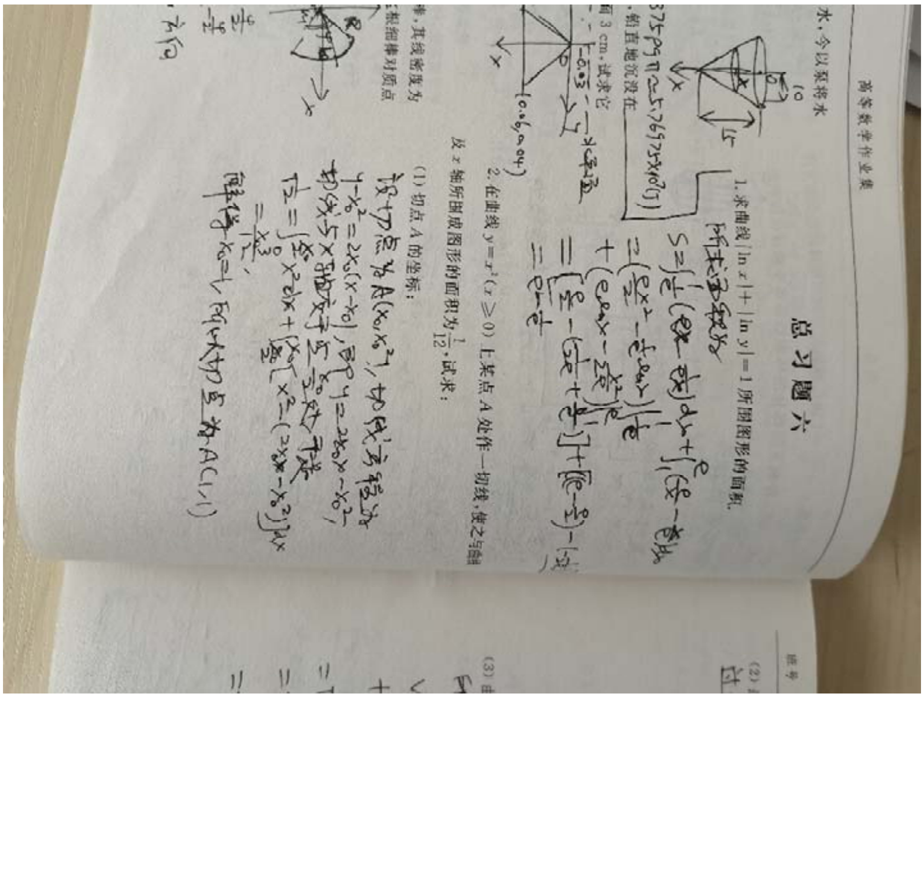
所求的功为

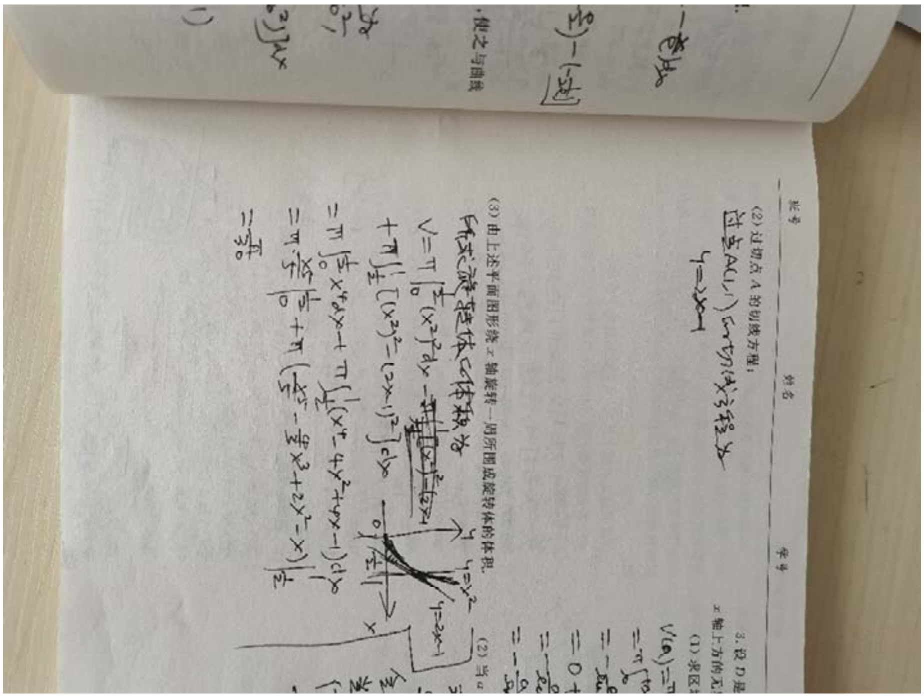
$W=\int_0^a F\,dx=\int_0^{(\frac{a}{c})^{\frac{1}{3}}}9kc^2t^4\cdot 3ct^2\,dt$

$=\int_0^{(\frac{a}{c})^{\frac{1}{3}}}27kc^3t^6\,dt$

$=\frac{27kc^3}{7}t^7\Big|_0^{(\frac{a}{c})^{\frac{1}{3}}}=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}$


高等数学作业集
2. 设一圆锥形贮水池，深 15 m，口径 20 m，盛满水，今以泵将水吸尽，问要做多少功？
所求做功为
$W=\int_0^{15}\rho g\pi\left[\frac{10}{15}(15-x)\right]^2 x\,dx$
$=\frac{4}{9}\rho g\pi\int_0^{15}(15-x)^2 x\,dx$
$=\frac{4}{9}\rho g\pi\int_0^{15}(225x-30x^2+x^3)\,dx$
$=\frac{4}{9}\rho g\pi\left(\frac{225x^2}{2}-10x^3+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^{15}=1875\rho g\pi\approx5.76975\times10^7(J)$
3. 一底为 8 cm，高为 6 cm 的等腰三角形片，铅直地沉没在水中，顶在上，底在下且与水平面平行，而顶离水面 3 cm，试求它每面所受的压力。
所求压力为
$F=\int_0^{0.06}\rho g(x+0.03)\,2\cdot\frac{2}{3}x\,dx$
$=\frac{4}{3}\rho g\int_0^{0.06}(x^2+0.03x)\,dx$
$=\frac{4}{3}\rho g\left(\frac{x^3}{3}+\frac{0.03}{2}x^2\right)\Big|_0^{0.06}$
$=0.168\times10^{-3}\rho g\approx1.65(N)$
4. 设有一半径为 R，中心角为 φ 的圆弧形细棒，其线密度为常数 μ，在圆心处有一质量为 m 的质点 M，试求这根细棒对质点 M 的引力。
由对称性知 所求水平方向引力分量 $F_y=0$
水平方向的引力分量为
$F_x=\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}G\frac{m(\mu R\,d\theta)}{R^2}\cos\theta$
$=\frac{Gm\mu}{R}\int_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\frac{Gm\mu}{R}\sin\theta\Big|_{-\frac{\varphi}{2}}^{\frac{\varphi}{2}}$
$=\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$
故所求引力大小为 $\frac{2Gm\mu}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$ 方向为质点M指向圆弧的中心。
10
15
x
水平面
0.03
y
(0.06, 0.04)
x
R
y
x


高等数学作业集
总习题六
1. 求曲线 $|\ln x|+|\ln y|=1$ 所围图形的面积。
所求面积为
$S=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(ex-\frac{1}{ex}\right)dx+\int_1^e\left(\frac{e}{x}-\frac{x}{e}\right)dx$
$=\left(\frac{e}{2}x^2-\frac{1}{e}\ln x\right)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\left(e\ln x-\frac{x^2}{2e}\right)\Big|_1^e$
$=\left[\frac{e}{2}-\left(\frac{1}{2e}+\frac{1}{e}\right)\right]+\left[\left(e-\frac{e}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2e}\right)\right]$
$=e-\frac{1}{e}$
2. 在曲线 $y=x^2(x\geqslant0)$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线及 x 轴所围成图形的面积为 $\frac{1}{12}$，试求：
(1) 切点 A 的坐标；
设切点为 $A(x_0,x_0^2)$，切线方程为
$y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$，即 $y=2x_0x-x_0^2$，
切线与x轴交于点 $\frac{x_0}{2}$ 处，于是
$\frac{1}{12}=\int_0^{\frac{x_0}{2}}x^2dx+\int_{\frac{x_0}{2}}^{x_0}\left[x^2-(2x_0x-x_0^2)\right]dx$
$=\frac{x_0^3}{12}$，
解得 $x_0=1$，所以切点为 $A(1,1)$
班号



班号　　姓名　　学号

(2) 过切点 A 的切线方程：

过点A(1,1)的切线方程为

$y=2x-1$

(3) 由上述平面图形绕 x 轴旋转一周所围成旋转体的体积.

所求旋转体的体积为

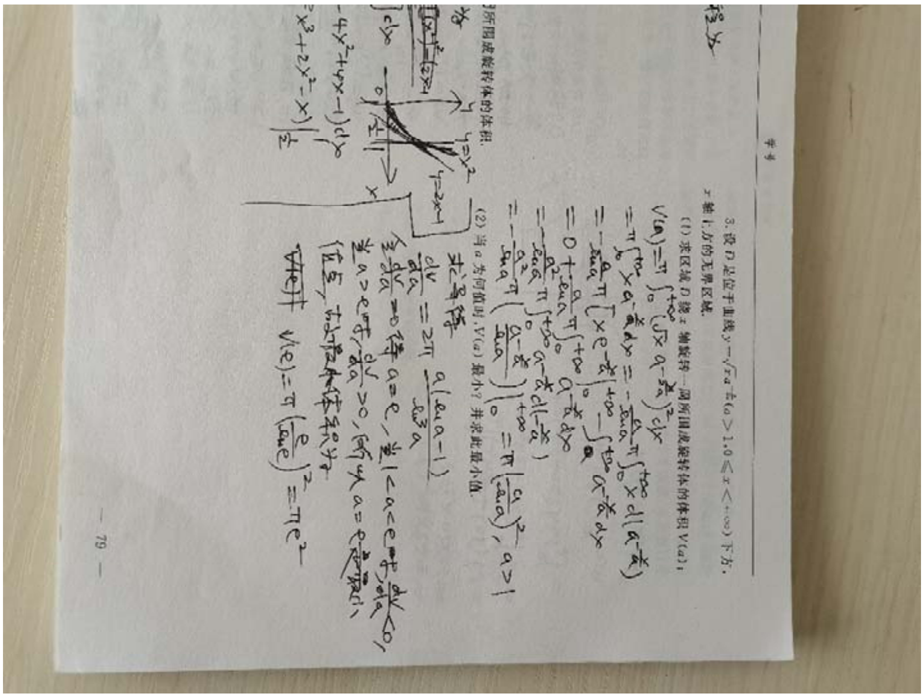
$V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(x^2)^2dx$

$+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}[(x^2)^2-(2x-1)^2]dx$

$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}x^4dx+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x^4-4x^2+4x-1)dx$

$=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\pi\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3+2x^2-x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$

$=\frac{\pi}{30}$



学号

3. 设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1, 0\leq x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域.

(1) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所围成旋转体的体积 $V(a)$；

$V(a)=\pi\int_0^{+\infty}(\sqrt{x}\,a^{-\frac{x}{2a}})^2dx$

$=\pi\int_0^{+\infty}xa^{-\frac{x}{a}}dx=-\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{+\infty}x\,d(a^{-\frac{x}{a}})$

$=-\frac{a}{\ln a}\pi\left[xe^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}a^{-\frac{x}{a}}dx\right]$

$=0+\frac{a}{\ln a}\pi\int_0^{+\infty}a^{-\frac{x}{a}}dx$

$=-\frac{a^2}{\ln a}\pi\int_0^{+\infty}a^{-\frac{x}{a}}d(-\frac{x}{a})$

$=-\frac{a^2}{\ln a}\pi\left(\frac{a^{-\frac{x}{a}}}{\ln a}\right)\Big|_0^{+\infty}=\pi\left(\frac{a}{\ln a}\right)^2,\ a>1$

(2) 当 a 为何值时，$V(a)$ 最小？并求此最小值.

求导得

$\frac{dV}{da}=2\pi\frac{a(\ln a-1)}{\ln^3 a}$

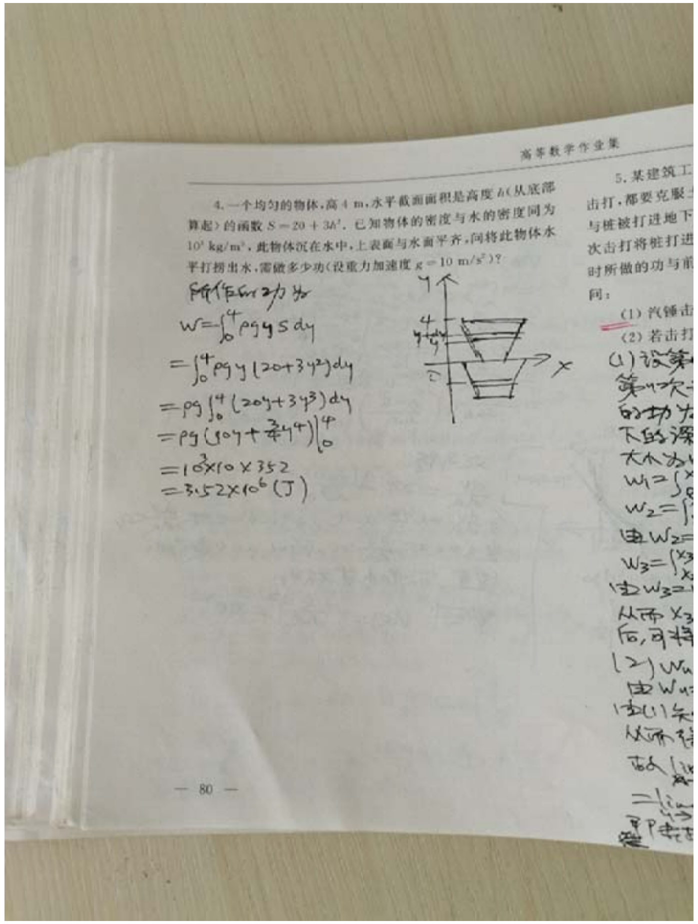
令 $\frac{dV}{da}=0$ 得 $a=e$，当 $1<a<e$ 时，$\frac{dV}{da}<0$，

当 $a>e$ 时，$\frac{dV}{da}>0$，所以 $a=e$ 是最小

值点，故最小体积为

$V(e)=\pi\left(\frac{e}{\ln e}\right)^2=\pi e^2$

— 79 —



4. 一个均匀的物体，高 4 m，水平截面面积是高度 h（从底部算起）的函数 $S=20+3h^2$。已知物体的密度与水的密度同为 $10^3\ kg/m^3$，此物体沉在水中，上表面与水面平齐，问将此物体水平打捞出水，需做多少功（设重力加速度 $g=10\ m/s^2$）？

所作的功为

$$W=\int_0^4 \rho g y S\,dy$$

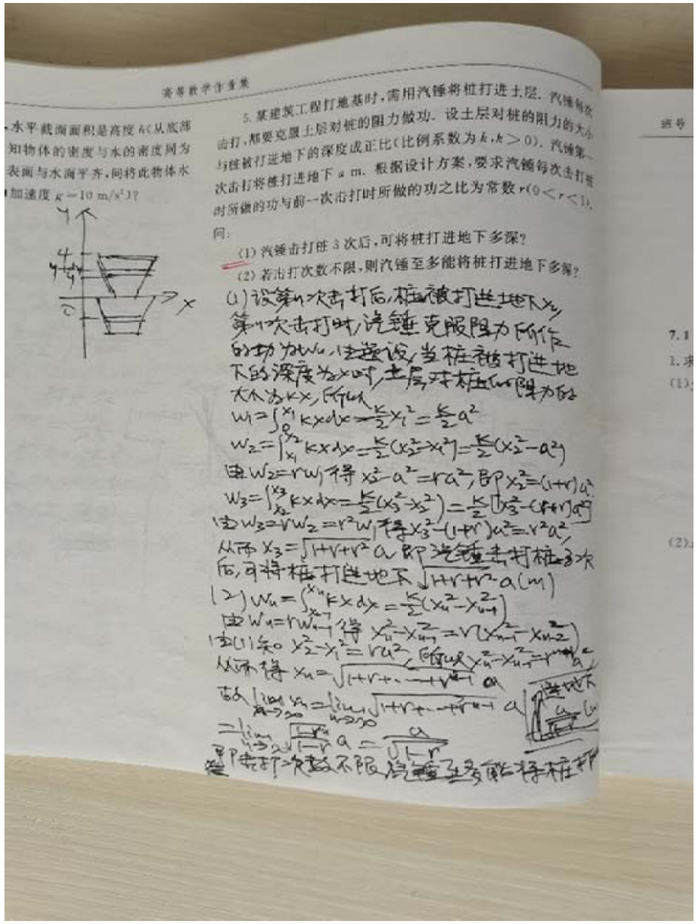
$$=\int_0^4 \rho g y(20+3y^2)\,dy$$

$$=\rho g\int_0^4 (20y+3y^3)\,dy$$

$$=\rho g\left(10y^2+\frac{3}{4}y^4\right)\Big|_0^4$$

$$=10^3\times 10\times 352$$

$$=3.52\times 10^6\ (J)$$



5. 某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层。汽锤每次击打，都要克服土层对桩的阻力做功。设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数为 k，$k>0$）。汽锤第一次击打将桩打进地下 a m。根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所做的功与前一次击打时所做的功之比为常数 r（$0<r<1$）。问：

(1) 汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

(2) 若击打次数不限，则汽锤至多能将桩打进地下多深？

(1) 设第 n 次击打后，桩被打进地下 x_n，第 n 次击打时，汽锤克服阻力所作的功为 W_n，依题设，当桩被打进地下的深度为 x 时，土层对桩的阻力的大小为 kx，所以

$W_1=\int_0^{x_1} kx\,dx=\frac{k}{2}x_1^2=\frac{k}{2}a^2$

$W_2=\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2)=\frac{k}{2}(x_2^2-a^2)$

由 $W_2=rW_1$ 得 $x_2^2-a^2=ra^2$，即 $x_2^2=(1+r)a^2$

$W_3=\int_{x_2}^{x_3} kx\,dx=\frac{k}{2}(x_3^2-x_2^2)=\frac{k}{2}[x_3^2-(1+r)a^2]$

由 $W_3=rW_2=r^2W_1$ 得 $x_3^2-(1+r)a^2=r^2a^2$，

从而 $x_3=\sqrt{1+r+r^2}\,a$，即汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下 $\sqrt{1+r+r^2}\,a$ (m)

(2) $W_n=\int_{x_{n-1}}^{x_n} kx\,dx=\frac{k}{2}(x_n^2-x_{n-1}^2)$

由 $W_n=rW_{n-1}$ 得 $x_n^2-x_{n-1}^2=r(x_{n-1}^2-x_{n-2}^2)$

由(1)知 $x_2^2-x_1^2=ra^2$，所以 $x_n^2-x_{n-1}^2=r^{n-1}a^2$

从而得 $x_n=\sqrt{1+r+\cdots+r^{n-1}}\,a$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+r+\cdots+r^{n-1}}\,a$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}}\,a=\frac{a}{\sqrt{1-r}}$

即若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下 $\frac{a}{\sqrt{1-r}}$ (m)