班号　　　　姓名　　　　学号

第三章　微分中值定理与导数的应用

习　题　三

3.1

1. 下列函数在指定的区间上是否满足罗尔定理的条件？在区间内是否存在点 ξ 使 $f'(\xi)=0$?

(1) $f(x)=x^3+4x^2-7x-10,[-1,2]$;

$f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上连续，在 $(-1,2)$ 内可导，且 $f(-1)=f(2)=0$，所以 $f(x)$ 满足罗尔定理条件，故存在 $\xi\in(-1,2)$ 使得 $f'(\xi)=0$. 事实上，由 $f'(\xi)=3\xi^2+8\xi-7=0$ 得 $\xi=\frac{-4+\sqrt{37}}{3}\in(-1,2)$

(2) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2},[-1,1]$.

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上不满足罗尔定理条件。

当 $x\neq0$ 时，有 $f'(x)=-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\neq0$，所以不存在 $\xi\in(-1,1)$ 使 $f'(\xi)=0$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}3-x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{2}{x}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，在区间 $[0,2]$ 上是否满足拉格朗日中值定理的条件？满足等式 $f(2)-f(0)=f'(\xi)(2-0)$ 的 ξ 共有几个？

因为 $f(1^-)=f(1^+)=f(1)=2$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续. 又因为 $f'_-(1)=f'_+(1)=-2$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，故 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内可导. 因此 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上满足拉格朗日定理条件，且 $f(2)-f(0)=f'(\xi)(2-0)$

又 $f'(x)=\begin{cases}-2x, & 0<x\leq1\\ -\frac{2}{x^2}, & 1<x<2\end{cases}$，所以 $1-3=(-2\xi)(2-0)$

或 $1-3=(-\frac{2}{\xi^2})(2-0)$，解得 $\xi=\frac{1}{2}$ 或 $\xi=\sqrt{2}$

3. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$，所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$ 上满足罗尔定理条件，由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(1,2)$, $\xi_2\in(2,3)$, $\xi_3\in(3,4)$，使得

$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$

又 $f'(x)$ 是三次多项式，故方程 $f'(x)$ 有且仅有三个实根，分别位于区间 $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$ 内.

4. 证明：当 $x\geqslant1$ 时，$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

设 $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}$，则在 $[1,+\infty)$ 上可导，且

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-(2x)(2x)}{(1+x^2)^2}$

$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$

所以在 $[1,+\infty)$ 上恒有 $f(x)=C$，令 $x=1$ 得 $C=f(1)=\frac{\pi}{4}$，故

$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$

5. 证明下列不等式.

(1) 当 $a>b>0, n>1$ 时, $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$;

设 $f(x)=x^n$，则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(b,a)$，使得

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b)$$

即

$$a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)$$

因为 $b<\xi<a$，所以 $b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1}$，于是

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$$

(2) 当 $x>0$ 时, $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

设 $f(x)=\ln(1+x)$，对 $f(x)$ 在区间 $[0,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,x)$，使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)$$

即

$$\ln(1+x)-0=\frac{1}{1+\xi}(x-0)$$

又 $0<\xi<x$，所以 $\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$，故

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

6. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，$a>0$，试证：存在点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$.

函数 $f(x)$，$g(x)=\ln x$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)=\frac{1}{x}\neq 0$，由柯西中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$$

整理得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

7. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$f(c)<0\ (a<c<b)$，证明：存在点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)>0$.

对 $f(x)$ 分别在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}<0$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{-f(c)}{b-c}>0$$

对 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}>0$$

8. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 I 上可导，证明：在 $f(x)$ 的任意两个零点之间，必有方程 $f'(x)+f(x)g'(x)=0$ 的实根.

设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的任意两个零点，不妨设 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)=f(x_2)=0$. 令 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$，则 $F(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，且 $F(x_1)=F(x_2)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)e^{g(\xi)}+f(\xi)e^{g(\xi)}g'(\xi)=0$$

即 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

所以 ξ 是方程 $f'(x)+f(x)g'(x)=0$ 的根

9. 设 $f(x)$ 在闭区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上可导，且 $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，证明：存在点 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)\tan\xi$.

因为 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续且 $f(0)f(\frac{\pi}{2})<0$，由零点存在定理，存在 $\eta\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f(\eta)=0$.

令 $F(x)=f(x)\cos x$，则 $F(x)$ 在 $[\eta,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(\eta,\frac{\pi}{2})$ 内可导，且 $F(\eta)=F(\frac{\pi}{2})=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(\eta,\frac{\pi}{2})$，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)\cos\xi+f(\xi)(-\sin\xi)=0$$

又 $\cos\xi\neq0$，所以

$$f'(\xi)=f(\xi)\tan\xi.$$

3.2

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2$$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{2(\pi-2x)(-2)}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\pi-2x}$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{-2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}$$

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\tan7x}{\ln\tan2x}$；

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\tan7x}\cdot\sec^2 7x\cdot7}{\frac{1}{\tan2x}\cdot\sec^2 2x\cdot2}$$

$$=\frac{7}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{\tan2x}{\tan7x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2 7x}{\sec^2 2x}$$

$$=\frac{7}{2}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\sec^2 2x\cdot2}{\sec^2 7x\cdot7}\cdot1=\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{7}\cdot1=1$$

(4) $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1+x}}$；

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{\arccos x}}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}$$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{\sqrt{\arccos x}\sqrt{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}$；

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x-\sin x}-1}{x^3}$

$=e^0\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}$

$=\frac{1}{6}\cdot1=\frac{1}{6}$

(6) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$；

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{-\csc^2\frac{\pi x}{2}\cdot(\frac{\pi}{2})}$

$=\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$

(7) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$；

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{m(1-x^n)-n(1-x^m)}{(1-x^m)(1-x^n)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-mnx^{n-1}+nmx^{m-1}}{-mx^{m-1}(1-x^n)-nx^{n-1}(1-x^m)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-mn(n-1)x^{n-2}+nm(m-1)x^{m-2}}{-m(m-1)x^{m-2}(1-x^n)+mnx^{m-1}x^{n-1}-n(n-1)x^{n-2}(1-x^m)+nmx^{n-1}x^{m-1}}$

$=\frac{-mn(n-1)+nm(m-1)}{mn+nm}=\frac{m-n}{2}$

(8) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$；

$=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\tan x(-\ln x)}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}$

$=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x}=e^0=1$

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$；

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}e^{(\frac{\pi}{2}-x)\ln\cos x}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\cos x}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}}}$

$=e^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(\frac{\pi}{2}-x)^2}{\cos x}}$

$=e^{-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2(\frac{\pi}{2}-x)\cdot(-1)}{-\sin x}}$

$=e^0=1$

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-1\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-1}}\right]^{n(\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-1)}$

因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-1)$

$=\lim\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}{(\frac{1}{\sqrt{n}})^3}=-\frac{1}{6}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}})^n=e^{-\frac{1}{6}}$

4

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{e}\right)^{\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}}\right]^{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{ex}}$

其中 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right]}{1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{1+x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\ln(1+x)-1}{2x}$

$=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{e}{2}$

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=e^{\frac{1}{e}\cdot\left(-\frac{e}{2}\right)}=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

3. 设 $f(x)$ 有二阶导数，当 $x\neq0$ 时，$f(x)\neq0$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 得 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，又 $f''(0)=4$，

所以

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}$

$=\dfrac{1}{2}f''(0)=\dfrac{1}{2}\times4=2$

于是

$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}$

$=e^2$

3.3

1. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的 3 阶泰勒公式.

求导得 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$，$f'''(x)=\dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$，

$f^{(4)}(x)=-\dfrac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$，所以 $f(4)=2$，$f'(4)=\dfrac{1}{4}$，

$f''(4)=-\dfrac{1}{32}$，$f'''(4)=\dfrac{3}{256}$，$f^{(4)}(\xi)=-\dfrac{15}{16}\xi^{-\frac{7}{2}}$

于是泰勒公式为

$\sqrt{x}=f(x)=f(4)+f'(4)(x-4)+\dfrac{f''(4)}{2!}(x-4)^2$

$+\dfrac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4$

$=2+\dfrac{1}{4}(x-4)-\dfrac{1}{64}(x-4)^2+\dfrac{1}{512}(x-4)^3$

$-\dfrac{15}{284}\xi^{-\frac{7}{2}}(x-4)^4$

其中 ξ 介于 4 与 x 之间

2. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

因为 $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$，且

$f(2)=\ln2$，$f^{(k)}(2)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k}$，$k=1,2,\cdots,n$，

所以泰勒公式为

$\ln x=f(x)=f(2)+f'(2)(x-2)+\dfrac{f''(2)}{2!}(x-2)^2$

$+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o((x-2)^n)$

$=\ln2+\dfrac{1}{2}(x-2)-\dfrac{1}{2^3}(x-2)^2+\cdots$

$+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\cdot2^n}(x-2)^n+o((x-2)^n)$

3. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有皮亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式.

求导得 $f'(x)=\sec^2x$, $f''(x)=2\sec^2x\tan x$, $f'''(x)=4\sec^2x\tan^2x+2\sec^4x$, 所以 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=2$,

故麦克劳林公式为

$\tan x=f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$

$=x+0+\frac{x^3}{3!}+0+o(x^3)$

$=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

4. 求函数 $f(x)=xe^{1-x}$ 的带有拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式.

因为 $f^{(k)}(x)=(-1)^k(x-k)e^{1-x}$, $k=0,1,2,\cdots,n+1$,

且 $f^{(k)}(0)=(-1)^{k+1}ke$, $k=0,1,2,\cdots,n$,

$f^{(n+1)}(\theta x)=(-1)^{n+1}(\theta x-n-1)e^{1-\theta x}$

所以麦克劳林公式为

$xe^{1-x}=f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$

$=0+ex+\frac{-2e}{2!}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}ne}{n!}x^n+\frac{(-1)^{n+1}(\theta x-n-1)}{(n+1)!}e^{1-\theta x}x^{n+1}$

$=ex-ex^2+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{e}{(n-1)!}x^n+(-1)^{n+1}\frac{(\theta x-n-1)e^{1-\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$

5. 利用泰勒公式计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$;

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+o(x^4)\right]}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right]}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2}+o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}\right)$

$=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$

6. 确定常数 a,b, 使 $x-(a+b\cos x)\sin x$ 当 $x\to0$ 时为 x 的 5 阶无穷小.

$x-(a+b\cos x)\sin x$

$=x-a\sin x-\frac{b}{2}\sin2x$

$=x-a\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)$

$-\frac{b}{2}\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^5)\right)$

$=(1-a-b)x+\frac{a+4b}{6}x^3-\frac{a+16b}{120}x^5+o(x^5)$

因为当 $x\to0$ 时它是 x 的5阶无穷小, 所以必须

$\begin{cases}1-a-b=0\\a+4b=0\\a+16b\neq0\end{cases}$, 解得 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$

7. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(a)=-f'(b)$，证明：在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $|f''(\xi)| \geq 4\dfrac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$.

将 $f(x)$ 分别在 $x=a$, $x=b$ 处展成一阶泰勒公式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2$$
$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2$$

令 $x=\frac{a+b}{2}$ 得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\frac{a-b}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

两式相减，~~并~~并注意到 $f'(a)=-f'(b)$，得

$$0=f(a)-f(b)+\frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{f''(\xi_1)}{2}-\frac{f''(\xi_2)}{2}\right]$$

于是 $|f(b)-f(a)|=\dfrac{(b-a)^2}{4}\left|\dfrac{f''(\xi_1)}{2}-\dfrac{f''(\xi_2)}{2}\right|$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{|f''(\xi_1)|}{2}+\frac{|f''(\xi_2)|}{2}\right] \leq \frac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$$

即 $|f''(\xi)| \geq 4\dfrac{|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$

其中 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$

3.4

1. 确定下列函数的单调区间.

(1) $y=x-e^x$；

求导得 $y'=1-e^x$，令 $y'=0$ 得 $x=0$.

当 $x>0$ 时，$y'<0$，所以该函数在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

当 $x<0$ 时，$y'>0$，所以该函数在 $(-\infty,0)$ 上单调增加.

(2) $y=(x-1)(x+1)^3$.

求导得 $y'=(x+1)^3+(x-1)\cdot 3(x+1)^2=4(x+1)^2(x-\frac{1}{2})$，

令 $y'=0$ 得 $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$

当 $x<-1$ 和 $-1<x<\frac{1}{2}$ 时，$y'<0$，所以函数在 $(-\infty,\frac{1}{2})$ 上单调减少，当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$y'>0$，所以该函数在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调增加.

2. 设 $f''(x)>0$, $f(0)<0$，试证：函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ 分别在区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内单调递增.

$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

令 $\varphi(x)=xf'(x)-f(x)$，则 $\varphi'(x)=xf''(x)$，

当 $x<0$ 时，$\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调减少.

当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

故当 $x\neq 0$ 时，有 $\varphi(x)>\varphi(0)=-f(0)>0$，所以

$$g'(x)=\frac{\varphi(x)}{x^2}>0$$

故 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

3. 证明下列不等式.

(1) 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$；

设 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})>0$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，于是

当 $x>0$ 时，有 $f(x)>f(0)=0$，即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$$

(2) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$;

设 $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$, 则在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上有

$f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2$
$= (\tan x - x)(\tan x + x)$

令 $g(x) = \tan x - x$, 则在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上有

$g'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x > 0$

所以 $g(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上单调增加, 故当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 从而当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即

$\tan x > x + \frac{x^3}{3}$

(3) 当 $\alpha > \beta > e$ 时, $\beta^\alpha > \alpha^\beta$.

设 $f(x) = x\ln\beta - \beta\ln x$, 则在 $[\beta, +\infty)$ 上有

$f'(x) = \ln\beta - \frac{\beta}{x} > 1 - \frac{\beta}{x} \geq 0$

所以 $f(x)$ 在 $[\beta, +\infty)$ 上单调增加. 于是

当 $\alpha > \beta > e$ 时, 有

$f(\alpha) > f(\beta) = 0$

即 $\alpha\ln\beta - \beta\ln\alpha > 0$

所以 $\beta^\alpha > \alpha^\beta$

4. 讨论方程 $\ln x = ax$ (其中 $a > 0$) 有几个实根?

设 $f(x) = \ln x - ax$, 则在 $(0, +\infty)$ 内有

$f'(x) = \frac{1}{x} - a$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{a}$.

当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调增加, 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调减少. 又

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, $f(\frac{1}{a}) = \ln\frac{1}{a} - 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,

由零点存在定理及函数的单调性

当 $f(\frac{1}{a}) = 0$, 即 $a = \frac{1}{e}$ 时, 方程有唯一实根 $x = e$,

当 $f(\frac{1}{a}) > 0$, 即 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时 方程有两个实根

当 $f(\frac{1}{a}) < 0$ 即 $a > \frac{1}{e}$ 时, 方程无实根

5. 求下列曲线的凸凹区间及拐点.

(1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 5$;

$y' = 3x^2 - 10x + 3$, $y'' = 6x - 10$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \frac{5}{3}$.

当 $x < \frac{5}{3}$ 时, $y'' < 0$, 所以曲线在 $(-\infty, \frac{5}{3})$ 上是凸的. 当 $x > \frac{5}{3}$ 时, $y'' > 0$, 所以曲线在 $(\frac{5}{3}, +\infty)$ 上是凹的. 拐点为 $(\frac{5}{3}, \frac{20}{27})$

(2) $y = \ln(1 + x^2)$;

$y' = \frac{2x}{1+x^2}$, $y'' = \frac{2(1+x^2) - (2x)^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm1$.

当 $x < -1$ 和 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 所以曲线在区间 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上是凹的, 当 $-1 < x < 1$ 时, $y'' < 0$, 所以在区间 $(-1, 1)$ 上是凸的. 拐点为 $(-1, \ln 2)$ 和 $(1, \ln 2)$

班号 姓名 学号

(3) $y=\begin{cases}\ln x-x, x\geqslant 1\\ x^2-2x, x<1\end{cases}$;

函数在$x=1$处连续，当$x>1$时，$y'=\frac{1}{x}-1$，$y''=-\frac{1}{x^2}<0$，所以曲线在区间$(1,+\infty)$上是凸的，当$x<1$时，$y'=2x-2$，$y''=2>0$，所以曲线在区间$(-\infty,1)$上是凹的，拐点为$(1,-1)$

(4) $\begin{cases}x=t^2\\ y=3t+t^3\end{cases}$ $(t>0)$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3+3t^2}{2t}=\frac{3}{2}(\frac{1}{t}+t)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{3}{2}(-\frac{1}{t^2}+1)}{2t}=\frac{3(t^2-1)}{4t^3}$

令$\frac{d^2y}{dx^2}=0$得$t=1$，$t=-1$(舍)

当$0<t<1$时，$0<x<1$，$\frac{d^2y}{dx^2}<0$，所以曲线在区间$(0,1)$上是凸的，当$t>1$时，$x>1$，$\frac{d^2y}{dx^2}>0$，所以曲线在区间$(1,+\infty)$上是凹的。拐点为$(1,4)$.

6. 问a,b为何值时，点$(1,3)$为曲线$y=ax^3+bx^2$的拐点?

$y'=3ax^2+2bx$，$y''=6ax+2b$

因为点$(1,3)$是拐点，所以

解得 $\begin{cases}a+b=3\\ 6a+2b=0\end{cases}$ $a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$. 于是 $y''=-9x+9$

当$x>1$时，$y''<0$，当$x<1$时，$y''>0$，

所以当$a=-\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{2}$时，点$(1,3)$是拐点

学号

3.5

1. 确定下列函数的极值.

(1) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;

$y'=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$

令$y'=0$得$x=-1$，$x=3$.

又$y''=12x-12$

在点$x=-1$处，$y'|_{x=-1}=0$，$y''|_{x=-1}=-24<0$，所以$y|_{x=-1}=17$是极大值

在$x=3$处，$y'|_{x=3}=0$，$y''|_{x=3}=24>0$，所以$y|_{x=3}=-47$是极小值

(2) $y=3-2(x+1)^{\frac{1}{3}}$.

$y'=-\frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$

当$x=-1$时，y'不存在，当$x\neq-1$时，$y'=-\frac{2}{3}\frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}<0$，且函数在点$x=-1$处连续，所以函数在区间$(-\infty,+\infty)$内单调减少，故函数无极值

2. 求下列函数的最大值和最小值.

(1) $y=2x^3-3x^2$，$-1\leqslant x\leqslant 4$;

$y'=6x^2-6x$，令$y'=0$得$x=0$，$x=1$

在$x=0$，$x=1$处，有$y|_{x=0}=0$，$y|_{x=1}=-1$

在$x=-1$，$x=4$处有$y|_{x=-1}=-5$，$y|_{x=4}=80$

比较之，最大值为$y|_{x=4}=80$，最小值为$y|_{x=-1}=-5$

(2) $y=x\ln x$，$0<x\leqslant e$.

$y'=\ln x+1$，令$y'=0$得$x=\frac{1}{e}$

在$x=\frac{1}{e}$处，有$y|_{x=\frac{1}{e}}=-\frac{1}{e}$

又 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$

$y|_{x=e}=e$

比较之，最大值为$y|_{x=e}=e$，最小值为$y|_{x=\frac{1}{e}}=-\frac{1}{e}$

3. 求函数 $f(x)=\arctan\frac{1-x}{1+x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的值域.

$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{(-1)(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$

$=-\frac{1}{1+x^2}<0$

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调减少.

又 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\frac{1-x}{1+x}=\arctan1=\frac{\pi}{4}$

$f(1)=0$

所以 $f(x)$ 的值域为 $[0,\frac{\pi}{4})$

4. 证明下列不等式.

(1) 当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时, $2^{1-p}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant1(p>1)$;

设 $f(x)=x^p+(1-x)^p$, 则在 $[0,1]$ 上有

$f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$

在 $x=\frac{1}{2}$ 处, 有 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{p-1}}$

在 $x=0$, $x=1$ 处有 $f(0)=f(1)=1$

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的~~最大~~值为 $f(1)=1$

最小值 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{p-1}}$, 故当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时, 有

$\frac{1}{2^{p-1}}=f(\frac{1}{2})\leqslant f(x)\leqslant f(1)=1$, 即 $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant1$.

(2) 当 $x<1$ 时, $e^x\leqslant\frac{1}{1-x}$.

设 $f(x)=(1-x)e^x$, 则在 $(-\infty,1)$ 内有

$f'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=0$ (唯一驻点)

又 $f''(x)=-(x+1)e^x$

在 $x=0$ 处, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1<0$, 所以

$x=0$ 是极大值点, 也是最大值点, 最大值

为 $f(0)=1$, 故当 $x<1$ 时, 有

$f(x)\leqslant f(0)=1$

 即 $e^x\leqslant\frac{1}{1-x}$

5. 要造一圆柱形油罐, 体积为 V, 问底半径 r 和高 h 各等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

油罐的表面积为

$S=2\pi r^2+2\pi rh$, ~~且~~ $\pi r^2h=V$

消去 h 得 $S=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$, $r\in(0,+\infty)$

求导得 $\frac{dS}{dr}=4\pi r-\frac{2V}{r^2}$, 令 $\frac{dS}{dr}=0$ 得 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

(唯一驻点), 求二阶导得 $\frac{d^2S}{dr^2}=4\pi+\frac{4V}{r^3}$

在 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 处, $\left.\frac{dS}{dr}\right|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=0$, $\left.\frac{d^2S}{dr^2}\right|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=12\pi>0$

所以 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 是最小值点, 此时, $h=\frac{V}{\pi r^2}=2r$,

故当 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $h=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时, 表面积 S

最小, 这时底直径与高的比为 $2r:h=1:1$

3.6

1. 求下列曲线的渐近线.

(1) $y=\frac{x^2}{4-x^2}$;

$x=\pm2$ 是间断点

因为 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2}{4-x^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2}{4-x^2}=\infty$, 所以

直线 $x=2$ 和 $x=-2$ 都是垂直渐近线.

又因为

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{4}{x^2}-1}=-1$

所以直线 $y=-1$ 是水平渐近线.

(2) $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$

因为 $a_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{x}=e^{\pi}$

$b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-e^{\pi}x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-e^{\pi}x\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-e^{\pi}}{\frac{1}{x}}-e^{\pi}=-e^{\pi}-e^{\pi}=-2e^{\pi}$

所以直线 $y=e^{\pi}x-2e^{\pi}$ 是斜渐近线

因为 $a_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{x}=1$

$b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-x\right]=-2$

所以直线 $y=x-2$ 是斜渐近线.

班号　　姓名　　学号

2. 描绘下列函数的图形.

(1) $y=e^{-\frac{1}{x}}$;

定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，求导得

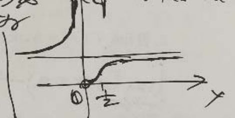
$y'=\frac{1}{x^2}e^{-\frac1x}>0$，$y''=-\frac{2}{x^3}e^{-\frac1x}+\frac{1}{x^4}e^{-\frac1x}=\frac{1-2x}{x^4}e^{-\frac1x}$

令$y''=0$得$x=\frac12$

当$x<0$时，$y'>0,y''>0$，所以函数在区间$(-\infty,0)$上单调增加，凹的；当$0<x<\frac12$时，$y'>0,y''>0$，所以函数在区间$(0,\frac12)$上单调增加，凹的；当$x>\frac12$时，$y'>0,y''<0$，所以函数在区间$(\frac12,+\infty)$上单调增加，凸的，拐点为$(\frac12,e^{-2})$。因为

$\lim\limits_{x\to0^-}e^{-\frac1x}=+\infty$，所以直线$x=0$是垂直渐近线。

又$\lim\limits_{x\to0^+}e^{-\frac1x}=0$。因为$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-\frac1x}=1$，所以直线$y=1$是水平渐近线。图形为



(2) $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

求导得$y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$，令$y'=0$得$x=-1,x=5$

求二阶导得$y''=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$，令$y''=0$得$x=-1$

列表讨论

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	+	0	+	不存在	−	0	+
y''	−	0	+		+	+	+
$y=f(x)$	[illegible]	拐点	↑∪		↓∪	极小值	↑∪

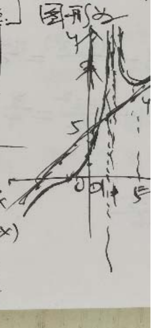
极小值为$\frac{27}{2}$，拐点为$(-1,0)$.

因为$\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=+\infty$，所以$x=1$是垂直渐近线

因为$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}}{x}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x\right]=5$，所以$y=x+5$是斜渐近线.

图形为



学号

3.7

1. 求抛物线 $y=x^2-4x+3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

$y'=2x-4$，$y''=2$，抛物线的顶点为$(2,-1)$，

所以曲率 $K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac32}}\Big|_{x=2}=\frac{2}{[1+(2x-4)^2]^{\frac32}}\Big|_{x=2}=2$.

曲率半径为$R=\frac1K=\frac12$

2. 求曲线 $x^2+xy+y^2=3$ 在点(1,1)处的曲率及曲率半径.

方程关于x求导得$2x+y+xy'+2yy'=0$

再求导得$2+y'+y'+xy''+2(y')^2+2yy''=0$

在点(1,1)处，有$y'\big|_{x=1,y=1}=-1$，$y''\big|_{x=1,y=1}=-\frac23$

所以曲率为$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac32}}\Big|_{x=1,y=1}=\frac{|-\frac23|}{[1+(-1)^2]^{\frac32}}=\frac{\sqrt2}{6}$

曲率半径为$R=\frac1K=\frac{1}{\frac{\sqrt2}{6}}=3\sqrt2$

3. 求曲线 $\begin{cases}x=3t^2\\y=3t-t^3\end{cases}$ 在 $t=1$ 对应的点处的曲率及曲率半径.

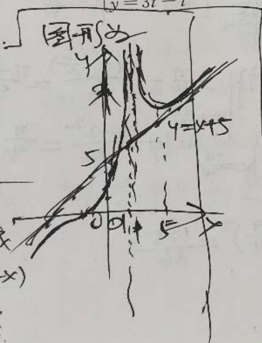
$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\Big|_{t=1}=\frac{3-3t^2}{6t}\Big|_{t=1}=0$

$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}\Big|_{t=1}=\frac{-\frac{1}{2t^2}-\frac12}{6t}\Big|_{t=1}=-\frac16$

所以曲率为

$K=\frac{|\frac{d^2y}{dx^2}|}{[1+(\frac{dy}{dx})^2]^{\frac32}}\Big|_{t=1}=\frac{|-\frac16|}{[1+0^2]^{\frac32}}=\frac16$

曲率半径为$R=\frac1K=\frac{1}{\frac16}=6$.



4. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

$y'=\frac{1}{x}$，$y''=-\frac{1}{x^2}$，曲率为 $K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

曲率半径为 $R=\frac{1}{K}=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}$

求导得 $\frac{dR}{dx}=\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(2x^2-1)}{x^2}$

令 $\frac{dR}{dx}=0$ 得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去），当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 $\frac{dR}{dx}<0$，当 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\frac{dR}{dx}>0$，所以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是极小值点，又是最小值点，于是最小曲率半径为

$R|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x}\Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

5. 求曲线 $y=\tan x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ 处的曲率圆方程.

因为 $y'=\sec^2 x$，$y''=2\sec^2 x\tan x$

$y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=2$，$y''|_{x=\frac{\pi}{4}}=4$.

所以曲率半径为 $R=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}}{4}=\frac{\sqrt{125}}{4}$

曲率中心为

$\xi=\left\{x-\frac{y'(1+(y')^2)}{y''}\right\}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{2(1+2^2)}{4}=\frac{\pi-10}{4}$

$\eta=\left\{y+\frac{1+(y')^2}{y''}\right\}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=1+\frac{1+2^2}{4}=\frac{9}{4}$

故曲率圆方程为

$\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$

总习题三

1. 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则(D).

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(D) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

选(D)

2. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$.

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}[f'(\xi)(x+a-x)]$ （ξ 介于 x 与 $x+a$ 之间）

$=a\lim\limits_{\xi\to\infty}f'(\xi)=ak$

12

3. 设 $f''(x)<0$, $f(0)=0$, 证明：对任何 $x_1,x_2>0$, 都有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

（不妨设 $x_1<x_2$）

证明：对 $f(x)$ 分别在区间 $[0,x_1]$ 和 $[x_2,x_1+x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(0,x_1)$，$\xi_2\in(x_2,x_1+x_2)$，使得

$f(x_1)=f(x_1)-f(0)=f'(\xi_1)(x_1-0)=x_1f'(\xi_1)$

$f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\xi_2)(x_1+x_2-x_2)=x_1f'(\xi_2)$

对 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得

$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)<0$

所以 $f(x_1+x_2)-f(x_2)-f(x_1)=x_1f'(\xi_2)-x_1f'(\xi_1)$
$=x_1(f'(\xi_2)-f'(\xi_1))<0$，即 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$

4. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明：在开区间 $(0,1)$ 内存在两个不同的点 ξ,η，使得 $f'(\xi)=-1$, $f'(\eta)=1$.

设 $F(x)=f(x)+x-1$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，~~(0,1)内可导~~ 且 $F(0)=-1<0$，$F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0$，由零点存在定理，存在 $\eta_1\in(0,\frac{1}{2})$，使得 $F(\eta_1)=0$，又 $F(1)=0$，对 $F(x)$ 在 $[\eta_1,1]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi\in(\eta_1,1)\subset(0,1)$，使得

$F'(\xi)=f'(\xi)+1=0$，即 $f'(\xi)=-1$

设 $G(x)=f(x)-x$，则 $G(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $G(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0$，$G(1)=-1<0$，由零点存在定理，存在 $\eta_2\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $G(\eta_2)=0$，又 $G(0)=0$，对 $G(x)$ 在 $[0,\eta_2]$ 上应用罗尔定理，存在 $\eta\in(0,\eta_2)\subset(0,1)$，使得

$G'(\eta)=f'(\eta)-1=0$，即 $f'(\eta)=1$

5.（达布定理）设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，$x_1,x_2\in(a,b)$．若 $f'(x_1)f'(x_2)<0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(\xi)=0$．你能将这一定理做简单的推广吗？

不妨设 $f'(x_1)<0$，$f'(x_2)>0$，因为 $\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}=f'(x_1)<0$，所以当 Δx 充分小时，$f(x_1+\Delta x)<f(x_1)$，故 $f(x_1)$ 不是 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上的最小值，类似可证 $f(x_2)$ 不是 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上的最小值，故 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 取得最小值 m，即存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f(\xi)=m$，由费马引理，$f'(\xi)=0$.

推广：设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，及任意介于 $f'(x_1)$ 和 $f'(x_2)$ 之间的常数 μ，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(\xi)=\mu$

6. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^4+3}-[A+B(x-1)+C(x-1)^2]}{(x-1)^2}=0$，求常数 A,B,C.

由 $0=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^4+3}-[A+B(x-1)+C(x-1)^2]}{(x-1)^2}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{[2+(x-1)+\frac{5}{4}(x-1)^2+o((x-1)^2)]-[A+B(x-1)+C(x-1)^2]}{(x-1)^2}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{2-A+(1-B)(x-1)+(\frac{5}{4}-C)(x-1)^2+o((x-1)^2)}{(x-1)^2}$

知 $\begin{cases}2-A=0\\1-B=0\\\frac{5}{4}-C=0\end{cases}$

解得 $A=2$，$B=1$，$C=\frac{5}{4}$

7. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的二阶导数，且 $f(0)f'(0)f''(0)\neq 0$. 证明：存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得 $\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)=o(h^2)$.

将 $f(x)$ 展成二阶麦克劳林公式

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$

所以 $f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)}{2}h^2+o(h^2)$

$f(2h)=f(0)+f'(0)(2h)+\frac{f''(0)}{2}(2h)^2+o(h^2)$

$f(3h)=f(0)+f'(0)(3h)+\frac{f''(0)}{2}(3h)^2+o(h^2)$

于是 $\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$

$=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0)+(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)f'(0)h$

$+\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0)h^2+o(h^2)=o(h^2)$

所以 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1=0\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0\end{cases}$，解得 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-3$，$\lambda_3=1$

8. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上有连续的二阶导数，且 $f(-1)=1$，$f(0)=0$，$f(1)=3$，证明：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=4$.

将 $f(x)$ 展成一阶麦克劳林公式

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\eta)}{2!}x^2$ （η 介于 0 与 x 之间）

令 $x=-1$ 得

$1=f(-1)=-f'(0)+\frac{f''(\eta_1)}{2}$ $(-1<\eta_1<0)$

令 $x=1$ 得

$3=f(1)=f'(0)+\frac{f''(\eta_2)}{2}$ $(0<\eta_2<1)$

两式相加得

$4=\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}$

因为 $f''(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上连续（因 $f''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续），所以 $f''(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上有最大值 M，最小值 m，于是

$m\leq 4=\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}\leq M$

由介值定理，存在 $\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$，使得 $f''(\xi)=4$.

9. 设 $a>1$，$f(x)=a^x-ax$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $x(a)$. 问 a 为何值时，$x(a)$ 最小？并求出最小值.

求导得 $f'(x)=a^x\ln a-a$，令 $f'(x)=0$ 得

$x=1-\frac{\ln\ln a}{\ln a}=x(a)$

求导得

$\frac{dx}{da}=-\frac{\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\ln a-\ln\ln a\cdot\frac{1}{a}}{(\ln a)^2}$

$=-\frac{1-\ln\ln a}{a(\ln a)^2}$，$a>1$

令 $\frac{dx}{da}=0$ 得 $a=e^e$（唯一驻点），当 $1<a<e^e$ 时，$\frac{dx}{da}<0$，当 $a>e^e$ 时 $\frac{dx}{da}>0$，所以 $a=e^e$ 是最小值点，最小值为

$x\big|_{a=e^e}=1-\frac{1}{e}$

10. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$ 的驻点，并判断它是否为极值点.

方程关于 x 求导得

$6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0$

令 $y'=0$ 得 $2y-2x=0$，即 $y=x$，代入方程得 $2x^3-x^2-1=0$，解得 $x=1$（驻点）

求二阶导得

$12y(y')^2+6y^2y''-4(y')^2-4yy''+2y'+2y'+2xy''-2=0$

在 $x=1$ 处，$y=1$，$y'=0$，代入上式得

$y''\big|_{x=1}=\frac{1}{2}>0$

所以 $x=1$ 是极小值点，极小值为 $y\big|_{x=1}=1$