一 练习题I

习题课题目部分选自《工科数学分析（上册）》，《工科数学分析学习指导与习题解答（上册）》和《哈尔滨工业大学微积分历届期末试题集》。

1.1 函数的性质

1. 证明：定义在以原点为对称的数集上的函数都能唯一地表示为一个奇函数和一个偶函数之和([2], P. 10, 例7)。

2. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，且有常数T，$B>0$，使得$f(x+T)=Bf(x)$。证明：$f(x)$可以表示为一个指数函数a^x和一个以T为周期的函数之积，即$f(x)=a^x\psi(x)$ ([2], P. 23, 9)。

3. 设$f(x)=|x+1|-|x-1|$，求$\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n}(x)$的表达式。

4. 设$f(x)$是单调奇函数，证明：$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)$ 是单调奇函数。

5. 证明：$y=\cos(\pi x)+\sin(\sqrt{2}\pi x)$不是周期函数。

1.2 极限的定义以运算

一、用极限的定义证明：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$ ([1], 习题2.1, 第3题(2))。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=A$ ([2], P. 44, 例13)。

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}$，其中$a\neq 0$。

二、计算下列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ ([1], 习题2.8, 1 (1))。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\ldots+\dfrac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}$ ([2], P. 40, 例2，[3], P. 85, 三、2)。

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ ([2], P. 42, 例10)。

4. 设$[x]$表示不超过x的最大整数，试确定a的值使得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)$$

存在([3], P. 80, 三；P. 81, 一、2)。

5. $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{[4x]}{1+x}$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数，$\{x\}=x-[x]$。

1.3 重要极限和等价无穷小

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[7]{1+5x}\sqrt[5]{1+7\tan x}-1}{\sin x}$ ([1], 习题2.7, 第4题(3))。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{\tan x}-e^{\sin x})(1+x^2)}{\arcsin x\ln(1+x^2)}$ ([3], P. 7, 三、1)。

3. 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+3)^a-x]=b$，求$b$ ([3], P. 7, 一、2；P. 79, 四；P. 80, 一、4)。

4. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\dfrac{1}{\ln\cos x}}=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$ ([3], P. 77, 一、2)。

5. 设α,β为两个无穷小，证明：α,β为等价无穷小当且仅当

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=0$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin x}}$。

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^x$。

1.4 夹逼定理和单调有界原理

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^2}{n^3+1^2}+\dfrac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2}\right]$ ([3], P. 7, 三、2)。

2. 设$x_1\geqslant -12$，$x_n=\sqrt{x_{n-1}+12}$其中$n\geqslant 2$。证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其极限值([3], P. 84, 五)。

3. 设$x_1\in R$，$x_n=\sin x_{n-1}$其中$n\geqslant 2$。求：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ ([3], P. 88, 三)。

4. 设$x_1=2$，$x_n=\dfrac{2x_{n-1}+6}{x_{n-1}+1}$其中$n\geqslant 2$。证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其极限值。

1.5 函数的连续性和间断点类型

1. 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上单调上升，且其值域为区间$[f(a),f(b)]$。证明：$f(x)$在$[a,b]$上连续([1], 习题2.7, 16题)。

2. 求函数
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin(\pi x)}, & x<0\\ \ln(1+x)+\sin\frac{1}{x^2-1}, & x\geqslant 0\end{cases}$$
的间断点，并判断其类型([3], P. 80, 五)。

3. 设函数$f(x)$，$g(x)$在区间$[a,b]$上连续。证明：
$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}\ 及 G(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$
均为区间$[a,b]$上的连续函数。

1.6 补充习题

1. 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$。若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，求$a,b$ ([2], P. 47, 例20)。

2. 设$f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n$，$n=1,2,\ldots$。
   (1) 证明：方程$f_n(x)=1$在$[0,+\infty)$有唯一实根x_n。
   (2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$([3], P. 77, 三)。

3. 设$f(x)$在(a,b)内连续，$g(x)$在(a,b)内有定义且$g(x)>0$。证明：对于(a,b)内任意n个点$x_1,x_2,\ldots,x_n$，至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得
$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)g(x_i)=f(\xi)\sum_{i=1}^{n}g(x_i)$$
([3], P. 79, 六)。

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{(3+2\sqrt{2})^n\right\}$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数，$\{x\}=x-[x]$。

1.7 考点分析

1.1.

第1小题，奇函数偶函数的定义，唯一性的证明。

第2小题，周期函数。

第3小题，熟悉数学归纳法。

第4小题，奇函数，单调性和反函数的概念综合。

第5小题，周期函数。

1.2.

一、

第1小题，直接按定义陈述。

第2小题，经典的两段论。

第3小题，注意证明过程中$a \neq 0$的应用。

二、

第1小题，周期性在极限中的应用。

第2小题，列项相消。

第3小题，乘法的列项相消。

第4,5小题，考察左右极限。

1.3.

第1,2小题，等价无穷小代换，切记乘除可换，加减不可换。

第3,4小题，根据极限求参数。

第5小题，考察逻辑推理的严密。

第6,7小题，重要极限应用。

1.4.

第1小题，夹逼定理。

第2小题，单调有界原理。

第3小题，单调有界原理，用反证法求极限值。

第4小题，不单调的单调有界原理，亦可以用压缩映像原理。

1.5.

第1小题，答疑的时候问的比较多。关键是结合图像理解值域是$[f(a), f(b)]$的作用。

第2小题，检查可疑点，然后求极限。

第3小题，连续函数的加减乘除及有限次复合还是连续的。

1.6.

第1小题，根据极限定义写出$f(x)$的表达式，然后根据连续性求a, b。

第2小题，存在性由连续函数的介值性可以得到，唯一性可以不用导数，最后的极限可以由单调有界原理得到。

第3小题，连续函数介值性。

第4小题，考察的是二项式展开。

1.8 参考答案

1.8.1 函数的性质

1. 证明：对于任意给定函数$f(x)$，定义$g(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$及$h(x) = \dfrac{1}{2}(f(x)+f(-x))$。则容易验证$g(x)$为奇函数，$h(x)$为偶函数且$f(x) = g(x)+h(x)$。即：函数都能表示为一个奇函数和一个偶函数之和。

   唯一性(反证法)：设存在奇函数$g_1(x), g_2(x)$及偶函数$h_1(x), h_2(x)$，使得$f(x) = g_1(x) + h_1(x) = g_2(x) + h_2(x)$，则$g_1(x) - g_2(x) = h_2(x) - h_1(x)$。这蕴含着函数$p(x) = g_1(x) - g_2(x) = h_2(x) - h_1(x)$为既奇又偶函数，于是$p(x) \equiv 0$，即$g_1(x) = g_2(x)$且$h_1(x) = h_2(x)$。证毕 ∎

2. 证明：设$a = B^{1/T}$及$\psi(x) = f(x)a^{-x}$。则

   $$\psi(x+T) = f(x+T)a^{-x-T} = Ba^{-T}f(x)a^{-x} = \psi(x)$$

   即$\psi(x)$为以T为周期的函数且$f(x) = a^x\psi(x)$。

3. 解：用(第一)数学归纳法证明：

   $$\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n}(x) = \begin{cases} 2, & x > \frac{1}{2^{n-1}}, \\ 2^n x, & -\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \\ -2, & x < -\frac{1}{2^{n-1}} \end{cases}$$

   1) 基础：当$n = 1$时，将函数$f(x)$写成分段函数的形式，即为：

   $$f(x) = \begin{cases} 2, & x > 1, \\ 2x, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -2, & x < -1 \end{cases}$$

   2) 归纳：假设结论对于自然数$n-1$成立，即

   $$\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n-1}(x) = \begin{cases} 2, & x > \frac{1}{2^{n-2}}, \\ 2^{n-1} x, & -\frac{1}{2^{n-2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}, \\ -2, & x < -\frac{1}{2^{n-2}} \end{cases}$$

   故

   $$\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n}(x) = \begin{cases} 2, & \underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n-1}(x) > 1, \\ 2x, & -1 \leqslant \underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n-1}(x) \leqslant 1, \\ -2, & x < -1 \end{cases}$$

即

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n}(x)=2 && 当 x>\frac{1}{2^{n-1}}\\
&\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n}(x)=-2 && 当 x<-\frac{1}{2^{n-1}}\\
&\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n}(x)=2\underbrace{(f\circ f\circ\cdots\circ f)}_{n-1}(x)=2^n x && 当 -\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

故结论对于自然数n成立。证毕 ∎

4. 证明：由于$f(x)$是单调函数，因此必有反函数$y=f^{-1}(x)$。以下不妨假设$f(x)$是单调增加的。

   单调性：(反证法)设存在$x_1<x_2$使得$y_1=f^{-1}(x_1)>y_2=f^{-1}(x_2)$。由反函数的定义可得：

$$x_1=f(y_1)<x_2=f(y_2)$$

   这与$f(x)$的单调增加的矛盾。

   奇函数：(反证法)不妨设存在$x>0$使得

$$f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)>0$$

   则

$$f^{-1}(-x)>-f^{-1}(x)$$

   故

$$-x=f(f^{-1}(-x))>f(-f^{-1}(x))=-f(f^{-1}(x))=-x$$

   矛盾。证毕 ∎

5. 证明：假设函数y是以T为周期的函数，那么$y(kT)\equiv y(0)=1$对于所有的k成立，也就是说

$$\cos(\pi kT)+\sin(\sqrt{2}\pi kT)=\cos(\pi(k+2)T)+\sin(\sqrt{2}\pi(k+2)T)$$

   故

$$2\sin(\pi T)\sin(\pi(k+1)T)=2\cos(\sqrt{2}\pi(k+1)T)\sin(\sqrt{2}\pi T)$$

   分别取$k=0$及$k=-1$可以得到：

$$\sin(\sqrt{2}\pi T)=0$$

   且

$$\sin(\pi T)\sin(\pi T)=\cos(\sqrt{2}\pi T)\sin(\sqrt{2}\pi T)=0$$

   故T及$\sqrt{2}T$均为整数，这与$\sqrt{2}$是无理数矛盾。证毕。 ∎

1.8.2 极限的定义以运算

一、用极限的定义证明：

1. 证明：对于任意$\epsilon > 0$，取$N = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$，则当$n > N$时有

$$\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

证毕。 ∎

2. 证明：对于任意$\epsilon > 0$取$\epsilon_1 = \dfrac{1}{2}\epsilon$。由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$知，存在$N_1 > 0$使得$n > N_1$ 时有

$$|a_n - A| < \epsilon_1$$

考查有限个数$a_1, \ldots, a_{N_1}$一定存在$N > N_1$使得$n > N$时

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A| < \epsilon_1$$

综上所述：当$n > N$时有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - A\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k - A|$$
$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1}^{n} |a_k - A| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

证毕。 ∎

3. 证明：对于任意$\epsilon > 0$，取$\delta \leqslant \min\left\{\dfrac{a}{2}, \dfrac{\epsilon a^2}{2}\right\}$，则当$0 < |x - a| < \delta$时有

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{x-a}{xa}\right| \leqslant \frac{2\delta}{a^2} < \epsilon$$

证毕。 ∎

二、计算下列极限

1. 解：

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \lim_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+1/n}+1}\right)$$
$$= \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

2. 解：由于

$$\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n\times(n+1)}-\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}\right)$$

利用错项相消可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{4}$$

3. 解：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

4. 解：首先估算左右极限。

$$\lim_{x\to0+}a[x]=0\text{ 且 }\lim_{x\to0-}a[x]=-a$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right)&=\lim_{x\to0+}\left(\frac{\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})+\frac{2}{x}}{\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})+\frac{1}{x}}\right)\\&=\lim_{x\to0+}\left(\frac{x\ln(1+e^{-\frac{2}{x}})+2}{x\ln(1+e^{-\frac{1}{x}})+1}\right)=2\\\lim_{x\to0-}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\right)&=\lim_{x\to0-}\left(\frac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}\right)=\lim_{x\to0-}\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=0\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)$$

存在，若$2=-a$，即$a=-2$。

5. 解：由于$1<x<1.1$时，$4<4x<4.4$，故$[4x]\equiv4$。因此

$$\lim_{x\to1+}\frac{4}{1+x}=2$$

1.8.3 重要极限和等价无穷小

1. 解：

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[7]{1+5x}\sqrt[5]{1+7\tan x}-1}{\sin x}\\=&\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[7]{1+5x}-1+1)(\sqrt[5]{1+7\tan x}-1+1)-1}{\sin x}\\=&\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[7]{1+5x}-1}{\sin x}+\frac{\sqrt[5]{1+7\tan x}-1}{\sin x}+\frac{(\sqrt[7]{1+5x}-1)(\sqrt[5]{1+7\tan x}-1)}{\sin x}\\=&\lim_{x\to0}\frac{5}{7}\frac{x}{\sin x}+\frac{7}{5}\frac{\tan x}{\sin x}+\frac{x\tan x}{\sin x}=\frac{74}{35}\end{aligned}$$

2. 解：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}(1+x^2)\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\arcsin x\ln(1+x^2)}\\
=&\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\frac{x}{\arcsin x}\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{x^3}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}\frac{1-\cos x}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

3. 解：由于当$x\to+\infty$时$z(x^5+7x^4+3)^a-x$的极限存在，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}[(x^5+7x^4+3)^a-x]=0$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}x^{5a-1}\left(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)^a=1$$

亦即

$$\lim_{x\to+\infty}x^{5a-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{5a-1}\left(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)^a}{\left(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)^a}=1$$

故$a=\dfrac{1}{5}$。进而

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{(1+7x+3x^5)^{1/5}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5}(7x+3x^5)}{x}=\frac{7}{5}$$

4. 解：首先将题目中已知极限写成重要极限的形式，

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left[1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{4^x-1}{f(x)}}\right)^{\frac{f(x)}{(4^x-1)\ln\cos x}}$$

根据该极限存在可以得到：

$$\ln 2=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(4^x-1)\ln(1+(\cos x-1))}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x\ln 4(\cos x-1)}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{4\ln 2}\frac{f(x)}{x\sin^2\frac{x}{2}}$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=-\ln 2\lim_{x\to 0}-\frac{1}{4\ln 2}\frac{f(x)}{x\sin^2\frac{x}{2}}=-(\ln 2)^2$$

5. 证明：(充分性) 由α,β为等价无穷小知

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$$

故

$$\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=0$$

(必要性)

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim\left(\left(\frac{\alpha-\beta}{\beta}\right)+1\right) = 1$$

证毕。 ∎

6. 解：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin x}} &= \lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x\sin x}} \\ &= \lim_{x\to 0}\left((1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{\sin^2 x/2}{(x/2)^2}\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}\end{aligned}$$

7. 解：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{3}\frac{3}{3x+2}x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{3}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{3}}\right)^{\frac{3x}{3x+2}} = e^{-1}\end{aligned}$$

1.8.4 夹逼定理和单调有界原理

1. 解：首先估计进行如下估计，对于任意$k=1,\ldots,n$有

$$\frac{k^2}{n^3+n^2} \leqslant \frac{k^2}{n^3+k^2} \leqslant \frac{k^2}{n^3}$$

于是

$$\frac{1^2+\cdots+n^2}{n^3+n^2} \leqslant \left[\frac{1^2}{n^3+1^2}+\frac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}\right] \leqslant \frac{1+\cdots+n^2}{n^3}$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3+n^2} &\leqslant \left[\frac{1^2}{n^3+1^2}+\frac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}\right] \\ &\leqslant \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}\end{aligned}$$

进而由夹逼定理可知原式极限为$\dfrac{1}{3}$。

2. 解：可以采用压缩映像原理证明。建议利用单调有界原理求极限以复习和巩固数学归纳法。

(i) 当$x_1\in[-12,4)$时，数学归纳法证明：$0\leqslant x_n<x_{n+1}<4$对所有的$n\geqslant 2$成立。

由$x_1\in[-12,4)$有，$x_2\in[0,4)$，进而$0\leqslant x_3<4$且

$$x_3^2-x_2^2 = x_2+12-x_2^2 = -(x_2-4)(x_2+3) > 0$$

于是$0\leqslant x_2<x_3<4$，即结论对于自然数$n=2$成立。

假设结论对于自然数$n-1$，$n\geqslant 3$，成立。则$0\leqslant x_{n+1}=\sqrt{x_n+12}<\sqrt{4+12}=4$且

$$x_{n+1}^2-x_n^2=x_n+12-x_n^2=-(x_n-4)(x_n+3)>0$$

于是$0\leqslant x_n<x_{n+1}<4$，即结论对于自然数n成立。

由单调有界原理知道数列$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$存在且$A=\sqrt{A+12}$，解得$A=4$或$A=-3$(不符合保号性，舍去)。

(ii) 当$x_1\in[4,+\infty)$时，数学归纳法类似地可以证明：$x_{n+1}>x_n\geqslant 4$对所有的$n\geqslant 1$成立。于是由单调有界原理知道数列$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$存在且$A=\sqrt{A+12}$，解得$A=4$或$A=-3$(不符合保号性，舍去)。

综上：极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=4$。

3. 尝试性计算可以得到：对于任意的$x_1\in R$有$x_2=\sin x_1\in[-1,1]$。以下可以根据x_2的符号分类讨论。

   (i) 当$x_2\in[0,1]$时，显然有$0\leqslant x_n=\sin x_{n-1}\leqslant x_{n-1}<1$对于所有的$n\geqslant 3$成立。由单调有界原理知道数列$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$存在，根据极限的保号性得到$A\geqslant 0$。

   反证法求极限。若$A>0$，则

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_{n-1}}{x_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}\sin x_{n-1}}{\lim_{n\to\infty}x_n}=\frac{\sin A}{A}$$

   这与$\sin A<A$矛盾。

   (ii) 当$x_2\in[-1,0)$时，与上述讨论类似地可以得到数列$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

4. 证明：(方法一：利用单调有界必有极限，证明过程比较复杂，但是思路非常固定)

   由$x_1=2$得$x_2=\dfrac{2\cdot 2+6}{2+1}=\dfrac{10}{3}$，$x_3=\dfrac{2\cdot\frac{10}{3}+6}{\frac{10}{3}+1}=\dfrac{38}{13}$，$x_4=\dfrac{2\cdot\frac{38}{13}+6}{\frac{38}{13}+1}=\dfrac{154}{51}$。因此$x_1<x_3<3$ 且$x_2>x_4>3$。

   以下证明奇子序列x_{2k-1}是单调增加有上界3的，并且偶子序列x_{2k}是单调减小有下界3的。

   用(第二)数学归纳法。假设上述命题对所有自然数$k<n$成立。当$k=n$时有

$$\begin{aligned}x_{2n-1}-x_{2n-3}&=\frac{2x_{2n-2}+6}{x_{2n-2}+1}-x_{2n-3}\\&=\frac{10x_{2n-3}+18}{3x_{2n-3}+7}-x_{2n-3}\\&=\frac{-3x_{2n-3}^2+3x_{2n-3}+18}{3x_{2n-3}+7}>0\end{aligned}$$

   同时

$$x_{2n-1}=\frac{2x_{2n-2}+6}{x_{2n-2}+1}=2+\frac{4}{x_{2n-2}+1}<3$$

类似地可以得到

$$x_{2n-2} > x_{2n} > 3$$

由单调有界原理知奇子序列x_{2k-1}及偶子序列x_{2k}的极限均存在，分别记为$A = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1}$及$B = \lim_{k\to\infty} x_{2k}$。则

$$A = \frac{2B+6}{B+1} \text{ 且} B = \frac{2A+6}{A+1}$$

故

$$AB + A = 2B + 6 \text{ 且} AB + B = 2A + 6$$

进而得到$A = B$。最后解方程可以得到$A = B = 3$或$A = B = -2$ (根据保号性，舍去负根)。这蕴含着$\lim_{n\to\infty} x_n = 3$存在。 ∎

(方法二：利用压缩映像原理证明)

由x_n的定义容易得到$x_n > 0$对所有的n成立。故

$$x_n = \frac{2x_{n-1}+6}{x_{n-1}+1} = 2 + \frac{4}{x_{n-1}+1} > 2$$

进而

$$|x_n - 3| = \left|\frac{4}{x_{n-1}+1} - 1\right| = \left|\frac{3 - x_{n-1}}{x_{n-1}+1}\right| \leqslant \frac{1}{3}|x_{n-1} - 3|$$

故$|x_n - 3| \leqslant 3^{1-n}$对所有的$n \geqslant 1$成立。因此$\lim_{n\to\infty} x_n = 3$存在。证毕。 ∎

1.8.5 函数的连续性和间断点类型

1. 证明：(反证法) 假设$f(x)$在(a, b)内存在一个不连续点x_0。

   由$f(x)$的单调性可以得到$f(x) < f(x_0)$当$x < x_0$时。

   由单调有界原理，$f(x)$在$x = x_0$处的左极限$f(x_0-)$存在且根据极限保序性有$f(x_0-) \leqslant f(x_0)$。

   类似地，$f(x)$在$x = x_0$处的右极限$f(x_0+)$存在且$f(x_0+) \geqslant f(x_0)$。

   又x_0是$f(x)$的不连续点，必有$f(x_0-) < f(x_0+)$。

   取$c \in (f(x_0-), f(x_0+))$且$c \neq f(x_0)$，根据极限的保序性可以得到：对于任意的$x < x_0$有$f(x) \leqslant f(x_0-) < c$及对于任意的$x > x_0$有$f(x) \geqslant f(x_0+) > c$。于是$c$不在$f(x)$的值域内，于题目中已知条件矛盾。故假设不成立。

   假设$x = a$(或$x = b$)是$f(x)$的不连续点，则在上述过程中只考虑一个单侧极限亦得到矛盾。因此假设也不成立。

   综述：进而$f(x)$在$[a, b]$上连续。 ∎

2. 解：首先考察可疑点，即使得函数$f(x)$分母为零的所有点：

   $$1, 0, -1, -2, \ldots$$

   在分子为0的可疑点处求极限。$x = 0$的情况。由于

   $$f(0+) = -\sin 1 \text{ 且} f(0-) = -\frac{1}{\pi}$$

知道0是第一类间断点。

$x=-1$的情况。由于

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x}{\sin(\pi x)}=-\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)(x-1)}{\sin(\pi(x+1))}=-\frac{2}{\pi}$$

知道-1不是间断点。

故$f(x)$有一个第一类间断点0和无穷多个第二类间断点$1,-2,-3,\ldots$。

3. 证明：我们知道连续函数的绝对值仍是连续函数。于是通过验证：

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

可知$F(x)$为区间$[a,b]$上的连续函数。同理可证$G(x)$亦为区间$[a,b]$上的连续函数。 ∎

1.8.6 补充习题

1. 解：首先写出$f(x)$的显式表达式。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>1\\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1\\ ax^2+bx, & -1<x<1\\ \dfrac{a-b-1}{2}, & x=-1\\ \dfrac{1}{x}, & x<-1\end{cases}$$

于是使得$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，只需

$$\frac{a+b+1}{2}=a+b=1\ \text{且}\frac{a-b-1}{2}=a-b=-1$$

解得：$a=0$，$b=1$。

2. (1) 证明：(存在性) 由函数$f_n(x)$在$[0,\infty)$上连续及$f_n(0)=0<1$和$f_n(2)\geqslant 2>1$可知，存在$x_n\in[0,2]$使得$f_n(x_n)=1$。

(唯一性) 设x_n，y_n是$f_n(x)=1$的两个跟，则

$$0=f_n(x_n)-f(y_n)=(x_n-y_n)(x_n^{n-1}+x_n^{n-2}y_n+\cdots+x_ny_n^{n-2}+y_n^{n-1})$$

于是$x_n=y_n$。

(2) 根据单调有界原理求极限。

显然当$n\geqslant 2$时，$f_n(1)>1$，于是$0<x_n<1$对所有的$n\geqslant 2$成立。由于$f_{n+1}(x_n)=f_n(x_n)+x_n^{n+1}>1$可得$0<x_{n+1}<x_n<1$。进而$x_n$单调下降有下界，故极限$A=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在且$0\leqslant A<x_2<1$。于是

$$1=\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^{n+1}-1}{x_n-1}-1=\frac{1}{1-A}-1$$

故$A=\dfrac{1}{2}$。 ∎

3. 证明：对于(a,b)内任意n个点$x_1,x_2,\ldots,x_n$，由$f(x)$的连续性可得$f(x)$在$[x_1,x_n]$上存在最大值M和最小值m，即

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \text{ 对于任意的} x \in [x_1,x_n] \subset (a,b)$$

令函数$F(x) = f(x)\sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i)$。则$F(x)$在区间$[x_1,x_n]$上连续，且由$g(x) > 0$得$F(x)$的最大值为$M\sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i)$，最小值为$m\sum\limits_{i=1}^{n} g(x_i)$。

若令$c = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)$，由$g(x) > 0$亦可得到：

$$m\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \leqslant c \leqslant M\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

根据$F(x)$在区间$[x_1,x_n]$上的介值定理，存在一点$\xi \in [x_1,x_n] \subset (a,b)$使得$F(\xi) = c$，即

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) = f(\xi)\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

∎

4. 解：由二项式定理展开可以得到

$$(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n \text{ 是整数}$$

故

$$\{(3+2\sqrt{2})^n\} = 1 - (3-2\sqrt{2})^n$$

由于$0 < 3-2\sqrt{2}$，我们知道$\lim\limits_{n\to\infty}(3-2\sqrt{2})^n = 0$，进而$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{(3+2\sqrt{2})^n\right\} = 1$。

参考文献

[1] 哈尔滨工业大学数学分析教研室，工科数学分析（上册），高等教育出版社，北京，2015.

[2] 哈尔滨工业大学数学分析教研室，工科数学分析学习指导与习题解答（上册），高等教育出版社，北京，2015.

[3] 张雅卓，白红，哈尔滨工业大学微积分历届期末试题集，哈尔滨工业大学出版社，2018.