一　微分方程

1.1　二阶线性微分方程

1. 已知$y_1 = \cos x$，$y_2 = e^{-x}$是三阶线性实系数齐次方程的解，试建立该方程。

2. 设$y_1 = e^{-x}$，$y_2 = 2x$是实系数方程$y''' + ay'' + by' + cy = 0$的解，求$a, b, c$ (参见[5], P. 108, 一、1，P. 116, 一、2)。

3. 设$y(x)$是$y''' + y' = 0$的解且当$x \to 0$时是x^2的等价无穷小，求$y(x)$([5], P. 106, 一、1)。

4. 已知$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$的三个特解为$y_1 = x$，$y_2 = e^x$，$y_3 = e^{2x}$。试求$y(0) = 1$，$y'(0) = 3$的特解(参见[5], P. 114, 三)。

5. 若函数$f(x)$满足$f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$及$f''(x) + f(x) = 2e^x$求$f(x)$([5], P. 13, 一、4)。

6. 求方程$y'' + y = x \cos 2x$满足条件$y(0) = 0$及$y'(0) = 0$的特解([5], P. 20, 六)。

7. 求微分方程$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + \sin 2x$的通解([5], P. 113, 三)。

8. 已知$y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$是某二阶常系数非齐次微分方程的三个解，求此方程。

1.2　补充习题

1. 求方程$x^3y'' - x^2y' + xy = x^2 + 1$的通解。

2. 设$f(x)$在$[0, \infty)$上可导，$f(0) = 1$且满足
$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$$
(1) 求$f'(x)$，(2) 证明：$e^{-x} \le f(x) \le 1$对于任意$x \ge 0$成立。

3. 设$f(x)$有连续一阶导数，且当$x \ge 0$时满足
$$f(x) = -1 + x + 2\int_0^x (x-t)f(t)f'(t)\mathrm{d}t$$
求$f(x)$ (参见[5], P. 117, 四)。

4. 求方程$y'' + y' - 2y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$的通解。

1.3 参考答案

1.3.1 二阶线性微分方程

1. 解：由题意可知：$\lambda_1 = i$，$\lambda_2 = -i$及$\lambda_3 = -1$是实系数三次多项式的三个根，故该微分方程的特征方程为：

$$(\lambda + i)(\lambda - i)(\lambda + 1) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

即

$$y''' + y'' + y' + y = 0$$

2. 解：由题意可知：$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 0$及$\lambda_3 = -1$是实系数三次多项式的三个根，故该微分方程特征方程为：

$$\lambda^2(\lambda + 1) = 0$$

即$a = 1, b = 0, c = 0$。

3. 解：该方程的特征方程为：$\lambda^3 + \lambda = 0$，故$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = i$，$\lambda_3 = -i$，其通解为

$$y(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

由当$x \to 0$时$y(x)$是x^2的等价无穷小，得$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2$。于是

$$C_1 + C_2 = 0, C_3 = 0, -C_2 = 2$$

故

$$y(x) = 2 - 2\cos x$$

4. 解：由题意可知线性齐次方程的通解为：

$$y(x) = x + C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - e^x)$$

进而由$y(0) = 1$及$y'(0) = 3$得：

$$C_1 = 1, C_1 + C_2 = 3$$

故$y(x) = 2e^{2x} - e^x$。

5. 解：由题意得齐方程通解为：$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$，进而$f''(x) = C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x}$。于是

$$C_1 e^x + 4C_2 e^{-2x} + C_1 e^x + C_2 e^{-2x} = e^x$$

即

$$2C_1 = 2 \text{ 且} 5C_2 = 0$$

故$f(x) = e^x$。

6. 解：齐方程的通解为：$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$。以下介绍两种求特解的方法：

(a) 设方程的特解为：$y^*(x) = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x$，则

$$(y^*)' = (2cx+2d+a)\cos 2x + (c-2b-2ax)\sin 2x$$
$$(y^*)'' = (4c-4b-4ax)\cos 2x - (4a+4d+4cx)\sin 2x$$

于是得到：

$$4c-4b-4ax+ax+b = x \text{ 且} -(4a+4d+4cx)+cx+d = 0$$

故$a = -\frac{1}{3}, b=0, c=0, d=\frac{4}{9}$且$y^*(x) = -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$。

(b) 考虑$y''+y = x(\cos 2x + i\sin 2x) = xe^{2ix}$。设$y^*(x) = e^{2ix}(ax+b)$是该方程的特解。则

$$-4(ax+b)+4ia+(ax+b) = x$$

故$-3a=1$且$-3b+4ia=0$，即$a=-\frac{1}{3}$且$b=-\frac{4i}{9}$。于是原方程的特解为：$y^*(x) = -Re(e^{2ix}(\frac{4i}{9}+\frac{1}{3}x)) = -\frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$。

于是满足条件$y(0)=0$及$y'(0)=0$ 的特解为：$y(x) = -\frac{5}{9}\sin x - \frac{1}{3}x\cos 2x + \frac{4}{9}\sin 2x$。

7. 解：齐方程的通解为：$y(x) = (C_1+C_2x)e^{2x}$。以下介绍两种求特解的方法：

(a) 由于2是特征方程的重根，$2i$不是特征方程的根，故设特解的形式为：$y^*(x) = ax^2e^{2x} + b\sin 2x + c\cos 2x$。代入后得到：

$$2ax^2e^{2x} - 8b\cos 2x + 8c\sin 2x = e^{2x} + \sin 2x$$

于是$a=\frac{1}{2}, b=0, c=\frac{1}{8}$，即非齐方程通解为：

$$y(x) = (C_1+C_2x)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{8}\cos 2x$$

(b) 为了求非齐方程的特解，考虑$y_1''-4y_1'+4y_1 = e^{2x}$及$y_2''-4y_2'+4y_2 = e^{2ix}$。容易得到$y_1^*(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$且$y_2^*(x) = \frac{i}{8}e^{2ix}$是上述方程的特解。于是原方程的通解为：

$$\begin{aligned} y^*(x) &= (C_1+C_2x)e^{2x} + y_1^*(x) + Im(y_2^*(x)) \\ &= (C_1+C_2x)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \frac{1}{8}\cos 2x \end{aligned}$$

8. 解：由题意可知：e^{2x}及e^{-x}是二次常系数齐次方程通解，故特征方程为：

$$(\lambda-2)(\lambda+1) = \lambda^2-\lambda-2 = 0$$

进而设该方程为：$y''-y'-2y = f(x)$。将y_1代入可得

$$f(x) = y_1''-y_1'-2y_1 = e^x(x+2) - e^x(x+1) - 2xe^x = (1-2x)e^x$$

于是所求方程为：$y''-y'-2y = (1-2x)e^x$。

1.3.2 补充习题

1. 解：令$x=e^t$，$D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则

$$x^2y''=D(D-1)y, xy'=Dy$$

于是原方程化为：

$$(D^2-2D+1)y=e^t+e^{-t}$$

故其齐方程通解为：

$$y(t)=C_1e^t+C_2te^t$$

由于1是特征方程的重根，-1不是特征方程的根，故设特解的形式为：$y^*(t)=at^2e^t+be^{-t}$。代入后得到：

$$2at^2e^t+4be^{-t}=e^t+e^{-t}$$

于是$a=\dfrac{1}{2}$且$b=\dfrac{1}{4}$，即非齐方程通解为：

$$y(t)=(C_1+C_2t)e^t+\frac{1}{2}t^2e^t+\frac{1}{4}e^{-t}$$

于是原方程通解为：

$$y(x)=(C_1+C_2\ln x)x+\frac{1}{2}x\ln^2 x+\frac{1}{4x}$$

2. (1) 解：由$f(x)$在$[0,\infty)$上可导，知$f'(0)=-f(0)=-1$且

$(1+x)(f''(x)+f'(x))+f'(x)+f(x)-f(x)=(1+x)f''(x)+(2+x)f'(x)=0$

令$z=f'(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\frac{2+x}{1+x}\mathrm{d}x$$

于是$\ln|z|=-x-\ln|1+x|+C$，故$f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{1+x}$。

(2) 证明：由(1)知$f'(x)\le 0$，故$f(x)\le f(0)=1$。令$h(x)=f(x)-e^{-x}$，则

$$h'(x)=-\frac{e^{-x}}{1+x}+e^{-x}=e^{-x}\frac{x}{1+x}\ge 0$$

故$f(x)\ge e^{-x}$。证毕。

3. 解：由$y=f(x)$有连续一阶导数，知$f(0)=-1$且

$$y'=1+2\int_0^x f(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

于是$y'(0)=1$且

$$y''=2yy'$$

令$y'=P(y)$，则$y''=P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，故

$$P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=2yP$$

于是$y'=y^2$，进而$f(x)=-\dfrac{1}{x+1}$。

4. 解：由题意可得特征方程为：$\lambda^2+\lambda-2=(\lambda+2)(\lambda-1)=0$。故引入变换$z_1=y$，$z_2=y'-y$可得如下两个微分方程：

$$z_1'=z_1+z_2$$

及

$$z_2'=-2z_2+\frac{e^x}{e^x+1}$$

由常数变异法得到：

$$z_2(x)=3C_2e^{-2x}+e^{-2x}\int\frac{e^{3t}}{e^t+1}\mathrm{d}t=-3C_2e^{-2x}+\frac{1}{2}-e^{-x}+e^{-2x}\ln(e^x+1)$$

进而得到：

$$\begin{aligned}y(x)=z_1(x)&=C_1e^x+e^x\int-3C_2e^{-3t}+\frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+e^{-3t}\ln(e^t+1)\mathrm{d}t\\&=C_1e^x+e^x\left(C_2e^{-3x}-\frac{1}{6}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{-2x}-\frac{1}{3}\ln(e^{-x}+1)-\frac{1}{3}(e^{-3x}\ln(e^x+1))\right)\\&=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}e^{-x}-\frac{1}{3}e^x\ln(e^{-x}+1)-\frac{1}{3}e^{-2x}\ln(e^x+1)\end{aligned}$$