# 一　练习题I

## 1.1　微分方程

1. 解下列微分方程：

   (1) $y' + \frac{x}{1-x^2}y = xy^{\frac{1}{2}}$。

   (2) $y' = \frac{1}{x\cos y + \sin xy}$。

   (3) $y'' + \frac{2}{4y}\left(y'\right)^2 = 0$。

   (4) $y'' + 4y = e^{2x} + \sin 2x$。

   (5) 求微分方程$y'' + y = f(x)$满足$y(0) = 0$，$y'(0) = 1$的特解，其中二阶可导函数$f(x)$满足条件$\sin x - f(x) = \int_0^x (x-t)f(x)\mathrm{d}t$。

   (6) 用变量替换$x = \cos t (0 < t < \pi)$化简微分方程$(1-x^2)\,y'' - xy' + y = 0$，并求满足$y(0) = 0$，$y'(0) = 2$的特解。

   (7) 若二阶常系数线性齐次微分方程$y'' + ay' + by = 0$的通解为$y = (C_1 + C_2x)e^x$，则非齐次方程$y'' + ay' + by = x$满足$y(0) = 2$，$y'(0) = 0$的解为？

   (8) 求方程$x^3y'' - x^2y' + xy = x^2 + 1$的通解。

2. 设$y_1, y_2$是一阶线性非齐次微分方程$y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解，若常数$\lambda, \mu$使得$\lambda y_1 + \mu y_2$是该方程的解，$\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则

   (A)$\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$　(B)$\lambda = \frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$　(C)$\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$　(D)$\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

3. 设函数$f(x)$具有二阶连续导数，$z = f(e^x \cos y)$满足

   $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)\, e^{2x}$$

   若$f(0) = 0$，$f'(0) = 0$，求$f(x)$的表达式。

## 1.2　多元函数的微分

1. 下列极限是否存在，若存在请求极限值

   (1) $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2}$。

(2) $\lim\limits_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{x^2y}{x+y}$。

2. 求下列函数在原点处的一阶偏导数：

(1) $u = ze^{2x+y} + e^{4xyz} + zy^2$。

(2) $z = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 。

3. 判断函数的可微性

$$z = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. 设$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x + y$ 且$f(x,0) = x^2$，$f(0,y) = y$。求$f(x,y)$。

5. 计算下列函数的一阶偏导数或导函数

(1) $z - y - x + xe^{z-x-y} = 0$

(2) 由$F\left(x + \dfrac{z}{y}, y + \dfrac{z}{x}\right) = 0$ 决定的函数$z = z(x,y)$。

6. 计算下列函数的高阶偏导数

(1) $z = x^3 f\left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

(2) $F(x, y+z) = z$决定了$z = z(x,y)$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。