二　练习题II

习题课题目部分选自《工科数学分析（上册）》，《工科数学分析学习指导与习题解答（上册）》和《哈尔滨工业大学微积分历届期末试题集》。

2.1　导数、微分的概念及求导法则

1. 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$，问$a,b$为何值时$f(x)$连续且可导？并求出此时的$f'(x)$ ([3], P. 4, 六)。

2. 设曲线$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases} x=t^3/3+t+1/3 \\ y=t^3/3-t+1/3 \end{cases}$确定。求$\dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ ([3], P. 69, 三)。

3. 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续可微且有反函数$g(x)$。已知$f(1)=3,\ f(3)=13,\ f'(1)=2,\ f'(3)=1/3$，求$g'(3)$ ([3], P. 11, 一、1)。

4. 求函数$f(x)=x^2e^{x+1}$在$x=0$处的5阶导数$f^{(5)}(0)$ ([3], P. 70, 一、8)。

5. 已知一个长方形的长l以$2cm/s$的速率增加，宽w以$3cm/s$的速率增加，则当$l=12cm$，$w=5cm$时，它的对角线增加的速率([3], P. 79, 一、1)。

6. 求曲线$\tan(x+y+\pi/4)=e^y$ 在点$(0,0)$处的切线。

7. 设$f(x)$是可导的奇函数，证明：$f'(x)$为偶函数。

2.2　中值定理

1. 设$f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，且$f(0)+f(1)+f(2)=3,\ f(3)=1$。证明：存在$\xi\in(0,3)$使得$f'(\xi)=0$ ([3], P. 82, 五）。

2. 已知函数$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$。证明：
   (1) 存在$\xi\in(0,1)$使得$f(\xi)=1-\xi$，
   (2) 存在两个不同的点$\eta,\zeta\in(0,1)$，使得$f'(\eta)f'(\zeta)=1$ ([3], P. 13, 四)。

3. 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)$。证明存在ξ,η满足$0<\xi<\eta<1$，使得$f'(\xi)+5f'(\eta)=0$。

2.3 洛必达法则

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$。

2. $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{x^2}-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}$。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x}$。

4. $\lim\limits_{n\to +\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)e^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]$。

5. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+6}{x^2}$。

2.4 泰勒公式

1. 设$f(x)$在$[0,a]$上二阶可导，在$(0,a)$内取到最小值且$|f''(x)|\leqslant M$。证明：$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma$ ([3], P. 84, 六)。

2. 设$f(x)=\sin x\sin 3x\sin 5x$，求$f'''(0)$及$f^{(2n)}(0)$，$n\geqslant 1$。

3. 设函数$f(x)$当$|x|<1$时具有二阶导数，且满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{f(x)}{x}}-1}{\ln(e^{\sin x})+2x}=3$$

求$f(0)$，$f'(0)$以及$f''(0)$。

2.5 单调性

1. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，在$(a,+\infty)$内二次可导，且存在$b\in(a,+\infty)$使得$f(a)=f(b)<\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$。求证：至少存在一点$\xi\in(a,\infty)$使得$f''(\xi)>0$ ([3], P. 80, 六)。

2. 设$f(x)$是二次可微函数，满足$f(0)=1$，$f'(0)=0$，且对于任意的$x\geqslant 0$有

$$f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geqslant 0$$

证明：对任意的$x\geqslant 0$有$f(x)\geqslant 3e^{2x}-2e^{3x}$。

2.6 补充习题

1. 已知函数$f(x)$在$(0,1)$内有二阶导数，且存在$c\in(0,1)$使得$f''(c)>0$。证明：

(1) 若$f'(c)=0$，则存在$(0,1)$中两个不同的ξ_1和ξ_2，使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)$。

(2) 若$f'(c)\neq 0$，则存在两个不同的η_1,η_2，使得$f'(c)=\dfrac{f(\eta_1)-f(\eta_2)}{\eta_1-\eta_2}$ ([3], P. 14, 七)。

2. (达布定理) 设$f(x)$在$[a,b]$上可微且$f'(a) < f'(b)$。证明：对于任意适合$f'(a) < c < f'(b)$的c，存在$\xi \in (a,b)$使得$f'(\xi) = c$ ([3], P. 89, 六)。

2.7 考点分析

2.1.

第1小题，又是一个用极限定义的函数，先去掉极限号再说。

第2小题，参数函数求导，理解微商的概念。

第3小题，反函数的求导法则。

第4小题，高阶导数的牛顿莱布尼斯公式。

第5小题，微分的形式不变性。

第6小题，隐函数求导。

第7小题，导函数与奇偶性的关系。

2.2.

这次习题课重点考察基于介值定理的中值定理。

第1小题，第一次习题课1.6.3的应用。

第2小题，第(1)问是第(2)的提示，分段应用两次拉格朗日中值定理就可以了。

第3小题，把"5"换成"1"来理解证明的实质。

2.3.

洛必达法则求极限的核心思想是：尽量不要求导数。

第1小题，分子有理化是问题的关键。

第2小题，先取对数再利用洛必达法则，最后一步用泰勒展开更简单。

第3小题，先化简再用洛必达法则，最后一步可以考虑用等价无穷小代换。

第4小题，写成函数极限再用洛必达法则，注意代数化简。

第5小题，把要求的形式凑出来，剩下的用洛必达法则计算。

2.4.

第1小题，一阶泰勒展开。

第2小题，利用泰勒展开求高阶导数。

第3小题，建议利用极限的无穷小表示。

2.5.

第1小题，注意证明的逻辑完整，思考$f(a) = f(b)$这个条件怎么用。

第2小题，构造函数，利用导数判定单调性，进而证明不等式。

2.6.

第1小题，罗尔中值定理的逆定理和拉格朗日中值定理的证明过程。

第2小题，达布定理的证明方法有很多种，推荐利用极小值证明。

2.8 参考答案

2.8.1 导数、微分的概念及求导法则

1. 解：根据函数$f(x)$的定义将其写成分段函数的形式：

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x>1 \\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x=1 \\ ax+b, & x<1 \end{cases}$$

故当$f(1-)=f(1)=f(1+)$，即$a+b=\dfrac{a+b+1}{2}=1$时，$f(x)$连续；
当$f'(1-)=f'(1+)$，即$a=2$时，$f(x)$可导。
解得：$a=2$，$b=-1$。

2. 解：利用微商求参数表达式的导数：

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}}}{\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}}=\frac{t^2+1}{t^2-1}$$

3. 解：由反函数的定义有$g(f(x))=x$。两边对x求导，可得$g'(f(x))f'(x)=1$。由$f(1)=3$可知

$$g'(3)=g'(f(1))=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2}$$

4. 解：利用牛顿莱布尼斯公式计算高阶导数。

$$f^{(5)}(x)=(ex^2e^x)^{(5)}=e((e^x)^{(5)}x^2+5(e^x)^{(4)}2x+20(e^x)^{(4)})=e^{x+1}(x^2+10x+20)$$

5. 解：长方形的对角线可以写成：$r=\sqrt{l^2+w^2}$。根据微分的一阶形式不变性有

$$\mathrm{d}r=\frac{2\mathrm{d}l+2\mathrm{d}w}{2\sqrt{l^2+w^2}}=\frac{\mathrm{d}l+\mathrm{d}w}{\sqrt{l^2+w^2}}$$

故当$l=12cm$，$w=5cm$时

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{l^2+w^2}}\left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{5}{13}$$

6. 解：隐函数求导。建议把隐函数写成如下形式：

$$\tan(x+y(x)+\pi/4)=e^{y(x)}$$

利用复合函数求导法则，两边对x求导可得：

$$\sec^2(x+y(x)+\pi/4)(1+y'(x))=e^{y(x)}y'(x)$$

于是$y'(0)=-2$且曲线在$(0,0)$点的切线方程为$y=-2x$。

7. 证明：由$f(x)$为奇函数可得：

$$f(x) + f(-x) = 0 \text{ 对任意的}x \text{ 成立}$$

两边对x求导可得：

$$f'(x) - f'(-x) = 0 \text{ 对任意的}x \text{ 成立}$$

即$f'(x)$为偶函数。

2.8.2 中值定理

1. 证明：设$f(x)$在区间$[0,2]$上的最大值为M，最小值为m。则

$$m \leqslant \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \leqslant M$$

进而由题意可知$m \leqslant 1 \leqslant M$。在区间$[0,2]$上应用连续函数的介值定理可得：存在一点$\eta$使得$f(\eta) = 1$。

在区间$[\eta, 3]$上应用罗尔中值定理可得：存在一点$\xi \in (\eta, 3) \subset (0,3)$使得$f'(\xi) = 0$。证毕。 ∎

2. 证明：(1) 设函数$F(x) = f(x)+x-1$，则$F(x)$在$[0,1]$连续。由于$F(0) = -1$及$F(1) = 1$，利用连续函数的零点存在定理，存在$\xi \in (0,1)$使得$F(\xi) = 0$即$f(\xi) = 1-\xi$。

(2) 分别在区间$[0,\xi]$及$[\xi,1]$上，对$f(x)$应用拉格朗日中值定理可得：存在$\eta \in (0,\xi)$及$\zeta \in (\xi,1)$满足

$$f'(\eta) = \frac{f(\xi)-f(0)}{\xi - 0} = \frac{1-\xi}{\xi}$$

且

$$f'(\zeta) = \frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi} = \frac{1-(1-\xi)}{1-\xi} = \frac{\xi}{1-\xi}$$

故$f'(\eta)f'(\zeta) = 1$。证毕。 ∎

3. 证明：由于$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，那么在区间$\left[0,\frac{1}{6}\right]$上应用拉格朗日中值定理可得：存在一点$\xi \in \left(0,\frac{1}{6}\right)$使得$f\left(\frac{1}{6}\right) - f(0) = \frac{1}{6}f'(\xi)$。

同理，存在一点$\eta \in \left(\frac{1}{6},1\right)$，使得$f(1) - f\left(\frac{1}{6}\right) = \left(1-\frac{1}{6}\right)f'(\eta)$。又因为$f(0) = f(1)$，则$\frac{5}{6}f'(\eta) + \frac{1}{6}f'(\xi) = 0.$

综上，存在ξ, η满足$0 < \xi < \eta < 1$，使得$f'(\xi) + 5f'(\eta) = 0$。证毕。 ∎

2.8.3 洛必达法则

1. 解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{\sin x+1}}{x^3}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{\sin x+1}}\frac{x-\sin x}{x^3}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

2. 解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\ln(e^{x^2}-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}\\
=&\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(e^{x^2}-\cos x\right)}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2xe^{x^2}+\sin x}{e^{x^2}-\cos x}}{x^{-1}}\\
=&\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2e^{x^2}+x\sin x}{e^{x^2}-\cos x}\\
=&\lim_{x\to 0^+}\frac{4xe^{x^2}+\sin x+x\cos x}{2xe^{x^2}+\sin x}+\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3e^{x^2}}{2xe^{x^2}+\sin x}\\
=&\lim_{x\to 0^+}\frac{4e^{x^2}+8x^2e^{x^2}+2\cos x-x\sin x}{2e^{x^2}+\cos x+4x^2e^{x^2}}+\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3e^{x^2}}{2xe^{x^2}+\sin x}=2
\end{aligned}$$

最终有 $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{x^2}-\cos x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^2$.

3. 解：

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x}\\
=&e^2+\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2}{x}\\
=&e^2+\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}\left[\frac{2}{x}\ln(1+x)\right]'\\
=&e^2+\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}\left[\frac{2x-2(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\right]\\
=&e^2+2e^2\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\\
=&e^2-2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x+3x^2}
\end{aligned}$$

利用等价无穷小替换，最终有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x}=0$。

4. 解：令$t=\dfrac{1}{n}$，则原式化为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t\left(1-t+\dfrac{1}{2}t^2\right)-\sqrt{1+t^6}}{t^3}\\
=&\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t\left(1-t+\dfrac{1}{2}t^2\right)+e^t(-1+t)-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^6}}\cdot 6t^5}{3t^2}\\
=&\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{6}e^t-\lim_{t\to 0^+}\frac{t^3}{\sqrt{1+t^6}}\\
=&\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

5. 解：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+6}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}+\frac{6x-\sin 6x}{x^3}\right]\\
=&0+\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}\\
=&6\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}=36
\end{aligned}
$$

2.8.4 泰勒公式

1. 证明：设$f(x)$在区间$(0,a)$内的一点$0<\xi<a$取到最小值，因此$f(x)$在$x=\xi$点达到极小值，故$f'(\xi)=0$。

   对$f'(x)$应用拉格朗日中值定理可得：

$$
\begin{aligned}
f'(0)&=f'(\xi)+f''(\eta_1)(0-\xi)\\
f'(a)&=f'(\xi)+f''(\eta_2)(a-\xi)
\end{aligned}
$$

   其中$\eta_1\in(0,\xi)$且$\eta_2\in(\xi,a)$。于是

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant|f''(\eta_1)|\times\xi+|f''(\eta_2)|\times(a-\xi)\leqslant Ma$$

   证毕。 ∎

2. 解：显然$f(x)$是奇函数，即$f(x)+f(-x)=0$对于任意x成立。两边对x求$2n$ 阶导数可得：$f^{(2n)}(x)+(-1)^{2n}f^{(2n)}(-x)=0$对于任意$x$成立。即$f^{(2n)}(x)$，$n\geqslant 1$，均为奇函数。于是$f^{(2n)}(0)=0$对任意$n\geqslant 1$成立。

   由$\sin x$的泰勒展开可得：

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)\left(3x-\frac{9}{3!}x^3+\cdots\right)\left(5x-\frac{125}{3!}x^3+\cdots\right)\\
&=15x^3+O(x^5)
\end{aligned}
$$

   于是$f'''(0)=3!\times 15=90$。

3. 解：由

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{f(x)}{x}}-1}{\ln(e^{\sin x})+2x}=3$$

可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\sin x+2x}=3$$

从而有

$$f(x)=3(\sin x+2x)x+o(x^2)=9x^2+o(x^2)$$

故$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=18$。

2.8.5 单调性

1. 证明：(反证法) 假设$f''(x)\leqslant 0$对任意的$x>0$成立。

(1) 由极限的保序性，存在$\eta>b$使得$f(\eta)>f(b)$。

(2) 由$f(a)=f(b)$，在$[a,b]$区间内应用罗尔中值定理可得：存在$\zeta\in(a,b)$使得$f'(\zeta)=0$。进而有$f'(x)\leqslant 0$对于任意的$x\geqslant\zeta$成立。于是$f(x)$ 在区间$[\zeta,\eta]$上单调非增。这与$f(\eta)>f(b)$矛盾。证毕。 ∎

2. 证明：考察函数$F(x)=e^{-2x}f(x)+2e^x$，则$F(0)=3$ 且

$$F'(x)=e^{-2x}(-2f(x)+f'(x))+2e^x$$

考察$G(x)=e^{-x}F'(x)=e^{-3x}(f'(x)-2f(x))+2$，则$G(0)=0$ 且对于任意的$x\geqslant 0$有

$$G'(x)=e^{-3x}(f''(x)-5f'(x)+6f(x))\geqslant 0$$

故$G(x)$在$[0,\infty)$上是单调非减的，即对于任意的$x\geqslant 0$有$G(x)\geqslant 0$，进而对于任意的$x\geqslant 0$有$F'(x)\geqslant 0$。故$F(x)$在$[0,\infty)$上是单调非减的，进而对任意的$x\geqslant 0$有$f(x)\geqslant 3e^{2x}-2e^{3x}$。证毕。 ∎

2.8.6 补充习题

1. 证明：(1) 由$f''(c)>0$，$f'(c)=0$及导数的定义和极限的保号性可知：在$x=c$的左领域$[c-\delta_1,c)\subset(0,1)$内有$f'(x)<0$且在$x=c$的右领域$(c,c+\delta_2]\subset(0,1)$内有$f'(x)>0$，其中$\delta_1,\delta_2$为两个大于0的常数。于是$f(x)$在$[c-\delta_1,c)$上单调下降，进而$f(c-\delta_1)>f(c)$；而在$(c,c+\delta_2]$ 上单调上升，进而$f(c)<f(c+\delta_2)$。

以下不妨设$f(c-\delta_1)>f(c+\delta_2)$，则取$\xi_2=c+\delta_2$，并在在区间$[c-\delta_1,c]$内应用连续函数的介值定理：存在$\xi_1\in[c-\delta_1,c]$使得：$f(\xi_1)=f(\xi_2)$。证毕。 ∎

(2) 设辅助函数$F(x)=f(x)-f'(c)x$。由题意可得：$F'(c)=f'(c)-f'(c)=0$且$F''(c)=f''(c)>0$，于是由(1)的结论有$(0,1)$两个不同的η_1,η_2使得$F(\eta_1)=F(\eta_2)$，即

$$f(\eta_1)-f'(c)\eta_1=f'(\eta_2)-f'(c)\eta_2$$

进而

$$f'(c) = \frac{f(\eta_1) - f(\eta_2)}{\eta_1 - \eta_2}$$

证毕。 ∎

2. 证明：设辅助函数$F(x) = f(x) - cx$。则$F'(a) = f'(a) - c < 0$且$F'(b) = f'(b) - c > 0$。由导数的定义和极限的保号性可知：$F(a)$是$F(x)$在$x = a$的某个右领域$[a, a + \delta_1]$ 内的最大值且$F(b)$是$F(x)$在$x = b$的某个左领域$[b - \delta_2, b]$内的最大值。进而，连续函数$F(x)$ 在区间$[a, b]$内的最小值一定在内部的某个点$x = \xi \in (a, b)$上达到。于是$F(\xi)$为$F(x)$的一个极小值，故$F'(\xi) = 0$，即$f'(\xi) = c$。证毕。 ∎