二 多元函数微分学

2.1 多元函数的基本概念

1. 求极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$。

2. 讨论函数$f(x,y)=\dfrac{\sin(x^ny)}{x^2+y^2}$，$x\geq 0,y\geq 0$，$n>0$，在$(x,y)=(0,0)$点的极限是否存在。

3. 证明极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$不存在。

2.2 偏导数及全微分

1. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在点$(0,0)$处连续，偏导数存在但在点$(0,0)$处不连续，而f在点$(0,0)$可微。

2. 计算$(\lg 99)^{1.01}$。

2.3 复合函数求导法

1. 设$z=f(x-y,xy^2)$，若f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 设函数$u=u(x,y)$满足方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$及条件$u(x,2x)=x$，$u'_x(x,2x)=x^2$。$u$有二阶连续偏导，求$u''_{xx}(x,2x)$。

3. 设$u=f(r)$，$r=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其中f具有二阶连续的导数，且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(x^2+y^2+z^2)=0$$

求$f(r)$。

4. 设$f(r)$在$[1,\infty)$上具有二阶连续的导数且$f(1)=0$，$f'(1)=1$，且二元函数$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

求$f(r)$在$[1,\infty)$上的最大值([5], P. 24, 六，P. 115, 四)。

5. 设$z=f(x,y)$在点$(1,1)$处全微分存在，$f(1,1)=1$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$。又设$\psi(x)=f(x,f(x,x))$，求$\left.\frac{\mathrm{d}\psi^3(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$。

6. 设$f(x,y,z)$是可微函数。证明：f为k次齐次函数，即

$$f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$$

当且仅当

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$$

7. 证明：函数$z=f(x,y)$只是$ax+by$的函数当且仅当

$$b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$$

2.4 参考答案

2.4.1 多元函数的基本概念

1. 解：令$r = x^2 + y^2$，则$(2xy)^2 \le r^2$，故

$$\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \frac{1-\cos r}{r^2}\frac{r}{x^2y^2} \ge \frac{1-\cos r}{r^2}\frac{4r}{r^2}$$

于是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} = \infty$。

2. 解：(i) 显然$f(x,0) \equiv 0$。以下设$y \ne 0$，则

$$\left|\frac{\sin(x^n y)}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\sin(x^n y)}{x^n y}\frac{x^n y}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{\sin(x^n y)}{x^n y}\right| \frac{|x^n y|}{2|xy|}$$

于是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$当$n > 1$时。

(ii) 当$0 < n \le 1$时，设$y = kx^n$，则

$$\lim_{x\to 0, y=kx^n} \frac{x^n y}{x^2+y^2} = \begin{cases} \dfrac{k}{1+k^2}, & n = 1 \\ \dfrac{1}{k}, & 0 < n < 1 \end{cases}$$

故$f(x,y)$在$(x,y) = (0,0)$点的极限不存在。

3. 证明：由于当$y = kx^3$时

$$\frac{x^3 y}{x^6+y^2} = \frac{kx^6}{x^6+k^2x^6} \equiv \frac{k}{1+k^2}$$

故对于不同的极限过程其极限值不同，即极限不存在。

2.4.2 偏导数及全微分

1. 证明：由$|f(x,y)| \le |xy|$知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

故$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续。

由复合函数求导法则，当$x \ne 0, y \ne 0$时，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2y(x^2+y^2)^{-3/2}\cos(x^2+y^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - xy^2(x^2+y^2)^{-3/2}\cos(x^2+y^2)^{-1/2}$$

由偏导数定义知道：$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$。故偏导数存在但在点$(0,0)$处不连续。

由于

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

可得

$$f(x,y) = f(0,0) + o(\sqrt{x^2+y^2})$$

即f在点$(0,0)$的全微分为$0\mathrm{d}x + 0\mathrm{d}y$。

2. 解：设$f(x,y) = (\lg x)^y$，则$f(100,1) = 2$且

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(\lg x)^{y-1}\frac{\lg e}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\lg x)^y \ln\lg x$$

于是

$$f(99,1.01) \approx 2 - \frac{\lg e}{100} + \frac{2\ln 2}{100} \approx 2.0095$$

2.4.3 复合函数求导法

1. 解：由复合函数求导法则可得：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x-y,xy^2) + y^2 f_2'(x-y,xy^2)$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} =& -f_{11}''(x-y,xy^2) + 2xyf_{12}''(x-y,xy^2) + 2yf_2'(x-y,xy^2)\\ &- y^2 f_{21}''(x-y,xy^2) + 2xy^3 f_{22}''(x-y,xy^2)\\ =&2yf_2'(x-y,xy^2) - f_{11}''(x-y,xy^2) + (2xy-y^2)f_{12}''(x-y,xy^2)\\ &+ 2xy^3 f_{22}''(x-y,xy^2)\end{aligned}$$

2. 解：由$u(x,2x) = x$求偏导得：

$$u_x'(x,2x) + 2u_y'(x,2x) = 1$$

及

$$u_{xx}''(x,2x) + 4u_{xy}''(x,2x) + 4u_{yy}''(x,2x) = 0$$

再由$u_x'(x,2x) = x^2$得：

$$u_{xx}''(x,2x) + 2u_{xy}''(x,2x) = 2x$$

代入已知条件可得：$u_{xx}''(x,2x) = -\dfrac{4}{3}x$。

3. 解：由$\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

且
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$
于是
$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(x^2+y^2+z^2)\\=&f''(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+(x^2+y^2+z^2)=0\end{aligned}$$
即$f''(r)+f'(r)=-e^{4r}$，进而$f(r)=C_1+C_2e^{-r}-\dfrac{1}{20}e^{-4r}$。

4. 解：由复合函数求导法则得：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf(x^2+y^2)+2x(x^2+y^2)f'(x^2+y^2)$$
且
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f(x^2+y^2)+(10x^2+2y^2)f'(x^2+y^2)+4x^2(x^2+y^2)f''(x^2+y^2)$$
于是
$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\=&4f(x^2+y^2)+12(x^2+y^2)f'(x^2+y^2)+4(x^2+y^2)^2f''(x^2+y^2)=0\end{aligned}$$
即$r^2f''(r)+3rf'(r)+f(r)=0$。

设$r=e^t$且$D=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$，那么：
$$[D(D-1)+3D+1]f=[D^2+2D+1]f=0$$
于是：$f(e^t)=(C_1+C_2t)e^{-t}$且$f(r)=\dfrac{C_1+C_2\ln r}{r}$。由$f(1)=0$得$C_1=0$，进而由$f'(1)=1$得$C_2=1$，即$f(r)=\dfrac{\ln r}{r}$。

以下考察一元函数最值。首先，$f(1)=0$，$\lim\limits_{r\to\infty}f(r)=0$。其次，
$$f'(r)=\frac{1}{r^2}(1-\ln r)=0$$
解得：$r=e$且$f(e)=\dfrac{1}{e}$。最后由于$f''(e)<0$知$f(e)$是极大值。

综上所述：f在$[1,\infty)$上的最大值为$\dfrac{1}{e}$。

5. 解：由复合函数求导法则：
$$\frac{\mathrm{d}\psi^3(x)}{\mathrm{d}x}=3\psi^2(x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$$
由题意得：$\psi(1)=1$，于是
$$\frac{\mathrm{d}\psi^3(x)}{\mathrm{d}x}=3\left(2+3\left(2+3\right)\right)=51$$

6. 证明：对任意给定(x,y,z)，考虑函数$g(t)=f(tx,ty,tz)$。
(必要性) 由f为k次齐次函数知$g(t)=t^kg(1)$，故

$$g'(t)|_{t=1}=kg(1)$$

即

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)\Big|_{t=1}=kf(x,y,z)$$

(充分性) 由题设条件可得：

$$g'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)=\frac{kg(t)}{t}$$

分离变量法解微分方程得到：

$$\ln g(t)-\ln g(1)=k\ln t$$

即

$$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$$

证毕。

7. 证明：不妨设$a\neq 0$。设$r=ax+by$，则$x=\dfrac{r-by}{a}$且$z=f\left(\dfrac{r-by}{a},y\right)$。
由题意可知

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{b}{a}f'_x+f'_y=0$$

即z与y无关。
反之，若$z=f(x,y)=g(ax+by)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ag' \text{ 且}\frac{\partial z}{\partial y}=bg'$$

于是

$$b\frac{\partial z}{\partial x}=abg'=a\frac{\partial z}{\partial y}$$

证毕。