二 练习题II

2.1 偏导数的几何意义及二元函数极值

1. 设$u = f(r)$，$r = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其中$f$具有二阶连续的导数，且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

求$f(r)$。

2. 求函数$f(x,y) = \left(y + \dfrac{x^3}{3}\right)e^{x+y}$ 的极值。

3. 求方程$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$所确定的函数$z=z(x,y)$的极值。

4. 设曲线$C:\begin{cases} x^2+y-z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$，求$C$上距离坐标原点最远和最近距离。

2.2 二重积分计算

1. 计算下列二重积分值

    (1) 设区域D由曲线$y=-x^3$，直线$x=1$与$y=1$围成，计算二重积分$\iint_D [2+xy\cos(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

    (2) 计算$I=\iint_D (x^3+y^3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y): x^2+y^2 \le 2x-2y\}$。

2. 计算$\iint_D (x^2-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y): -1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$

3. 计算$\iint_D \dfrac{\cos y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\left\{(x,y): 0\le x\le \dfrac{\pi}{3}, x\le y\le \dfrac{\pi}{3}\right\}$。

4. 交换累次积分的顺序

    (1) $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$

    (2) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

5. 计算$I=\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$。

6. 计算概率积分$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$。

7. 计算二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y):|x|+|y|\le 2\}$且

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|<1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & | \le |x|+|y| \le 2 \end{cases}$$

8. 设有界闭区域σ是由曲线$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$，$(0\le t\le 2\pi)$，及$y=0$围成。计算二重积分$\iint_\sigma y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

9. 已知平面区域$D=\left\{(r,\theta):2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。