三　练习题III

习题课题目部分选自《工科数学分析（上册）》，《工科数学分析学习指导与习题解答（上册）》和《哈尔滨工业大学微积分历届期末试题集》。

3.1　不定积分及换元积分法

计算下列不定积分

1. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+5x+25}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$ ([3], P. 102, 二、4)

3.2　分部积分法

计算下列不定积分

1. $\displaystyle\int x^2e^{2x}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \arcsin x+\arccos x\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{\ln(e^x+1)}{e^x}\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \sin\ln x\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$ ([3], P. 13, 一、2)
7. $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

3.3　有理函数及三角有理函数

计算下列不定积分

1. $\displaystyle\int \frac{2+x^2}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{3\cos x-\sin x}{\cos x-2\sin x}\mathrm{d}x$ ([3], P. 97, 三)
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$ ([3], P. 105, 三、2)

3.4 特殊函数的原函数

1. 设$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0\\ e^x+x, & x\geq 0\end{cases}$，求$\int f(x)\mathrm{d}x$。

2. 设$f(x)=|x^3-1|$，求$\int f(x)\mathrm{d}x$。

3.5 中值定理(续)

1. 设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$x\in[0,1]$时$0<f(x)<1$。求证：存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=2-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

2. 设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=-f(1)=1$。证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$\xi f'(\xi)+3f(\xi)=0$。

3. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)=1$。求证：存在$\xi,\eta\in(a,b)$使得$e^{\eta-\xi}(f(\eta)+f'(\eta))=1$。

3.6 补充习题

1. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导且$b>a>0$。证明：存在$\xi,\eta\in(a,b)$使得$f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$。

2. 设$f(x)$在$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$。证明：存在$\xi\in(-1,1)$使得$f'''(\xi)=3$。

3. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二次可导且$f(a)=f(c)=f(b)=0$，其中$c\in(a,b)$、证明：(1) 至少存在两个不同的点$\xi_1,\xi_2\in(a,b)$使得$f'(\xi_i)+f(\xi_i)=0$，$i=1,2$。(2) 存在$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)=f(\xi)$。

3.7 考点分析

3.1.

第1,2小题，直接写出凑微分的形式。

3.2.

第1小题，标准的两次分部积分法。

第2小题，先用一次分部积分把$\arctan x$去掉再说。

第3小题，答案不是$x(\arcsin x+\arccos x)+C$。

第4小题，利用分部积分把ln去掉。

第5小题，换元法去掉$\ln x$，然后分部积分两次。

第6小题，记住$\tan x$的原函数就好算了。

第7小题，两种做法都可以，目的就是去掉$\arcsin x$。

第8小题，换元法去掉$\sqrt{x}$再说。

第9小题，典型的三角换元。

第10小题，先换元再分部积分。

3.3.

第1小题，有理分式部分和分解。

第2小题，换元之后可以直接写出有理函数。

第3小题，看看分子是平方与立方的区别。

第4小题，课堂例题的做法。

第5小题，换元之后转化为有理分式的部分和分解。

3.4.

第1,2小题，考察不定积分的C。

3.5.

第1小题，等价变形$xf'(x)+f(x)-2x$之后再寻找原函数。

第2小题，先进性等价变形，再寻找原函数。

第3小题，先对函数$e^x f(x)$用一次拉格朗日中值定理，再对剩下的东西用一次拉格朗日中值定理。

3.6.

第1小题，拉格朗日中值定理和柯西中值定理一起考。

第2小题，泰勒展开之后应用达布定理。

第3小题，和习题2.5.2的思路类似。

3.8 参考答案

3.8.1 不定积分及换元积分法

1. 解：

$$\begin{aligned}&\int \frac{2x+5}{x^2+5x+25}\mathrm{d}x\\=&\int \frac{\mathrm{d}(x^2+5x+25)}{x^2+5x+25}=\ln(x^2+5x+25)+C\end{aligned}$$

2. 解：

$$\begin{aligned}&\int \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x(1+x)}\mathrm{d}x\\=&\int \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x})}\mathrm{d}x=-\int \ln(1+\frac{1}{x})\mathrm{d}\ln(1+\frac{1}{x})\\=&-\frac{1}{2}\ln^2(1+\frac{1}{x})+C\end{aligned}$$

3.8.2 分部积分法

1. 解：

$$\begin{aligned}&\int x^2e^{2x}\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}e^{2x}\\=&\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x^2\\=&\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}e^{2x}\\=&\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C\end{aligned}$$

2. 解：

$$\begin{aligned}&\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\\=&\int \arctan x\mathrm{d}\sqrt{x^2+1}\\=&\sqrt{x^2+1}\arctan x-\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\\=&\sqrt{x^2+1}\arctan x-\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C\end{aligned}$$

3. 解：由于

$$(\arcsin x+\arccos x)'=(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})=0$$

因此，

$$\int(\arcsin x+\arccos x)\mathrm{d}x = x(\arcsin 0+\arccos 0)+C=\frac{\pi}{2}x+C$$

4. 解：

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\ln(e^x+1)}{e^x}\mathrm{d}x\\
=&-\int\ln(e^x+1)\mathrm{d}e^{-x}=-e^{-x}\ln(e^x+1)+\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}\\
=&-e^{-x}\ln(e^x+1)+\int\frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{1+e^{-x}}\\
=&-e^{-x}\ln(e^x+1)-\ln(1+e^{-x})+C
\end{aligned}$$

5. 解：

$$\begin{aligned}
&\int\sin\ln x\mathrm{d}x\\
\overset{t=\ln x}{=}&\int e^t\sin t\mathrm{d}t\\
=&\int\sin t\mathrm{d}e^t\\
=&e^t\sin t-\int e^t\mathrm{d}\sin t\\
=&e^t\sin t-\int\cos t\mathrm{d}e^t\\
=&e^t\sin t-e^t\cos t-\int e^t\sin t\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

所以，原式

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C\\
=&\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C.
\end{aligned}$$

6. 解：

$$\begin{aligned}
&\int x\tan^2 x\mathrm{d}x\\
=&\int x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x\\
=&\int x\mathrm{d}\tan x-\int x\mathrm{d}x\\
=&x\tan x-\int\tan x\mathrm{d}x-\frac{x^2}{2}\\
=&x\tan x-\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C
\end{aligned}$$

7. 解：

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\arcsin x}{x^2}\mathrm{d}x\\
\overset{x=\sin t}{=}&\int \frac{t}{\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t\\
=&\int \frac{t}{\sin^2 t}\mathrm{d}\sin t\\
=&-\int t\mathrm{d}\frac{1}{\sin t}\\
=&-\frac{t}{\sin t}+\int \csc t\mathrm{d}t\\
=&-\frac{t}{\sin t}+\ln|\csc t-\cot t|+C\\
=&-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{1-x^2}{x^2}\right|+C
\end{aligned}
$$

8. 解：

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\
\overset{x=t^2}{=}&\int \frac{t^2}{1+t}2t\mathrm{d}t\\
=&2\int(t^2-t+1)\mathrm{d}t-2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}\\
=&\frac{2}{3}t^3-t^2+2t-2\ln(1+t)+C\\
=&\frac{2}{3}x^{2/3}-x+2x^{1/2}-2\ln(1+x^{1/2})+C
\end{aligned}
$$

9. 解：

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}\\
\overset{x=\tan t}{=}&\int \frac{1}{\tan t\sec t}\sec^2 t\mathrm{d}t\\
=&\int \csc t\mathrm{d}t\\
=&\ln|\csc t-\cot t|+C\\
=&\ln|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{x}|+C
\end{aligned}
$$

10. 解：

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x \\
\overset{t=\arctan x}{=}&\int \frac{e^t}{\sec^3 t}\sec^2 t\mathrm{d}t \\
=&\int e^t\cos t\mathrm{d}t \\
=&\frac{1}{2}e^t(\cos t+\sin t)+C \\
=&\frac{1}{2}e^{\arctan x}(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}})+C
\end{aligned}
$$

3.8.3 有理函数及三角有理函数

1. 由有理分式部分和分解定理，可以得到$\dfrac{2+x^2}{x(1-x^2)}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{1+x}$。于是

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{2+x^2}{x(1-x^2)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{1-x}-\frac{3}{2}\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x \\
=&2\ln|x|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C
\end{aligned}
$$

2. 解：

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
=&-\int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}\cos x=\int 1\mathrm{d}\cos x-2\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x} \\
=&\cos x-2\arctan(\cos x)+C
\end{aligned}
$$

3. 解：

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
=&-\int 1\mathrm{d}x+2\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

其中，第二项为

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} \\
=&\int\frac{\sec^2 x}{1+\sec^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{2+\tan^2 x} \\
=&\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{1+(\frac{\tan x}{\sqrt{2}})^2}\mathrm{d}\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \\
=&\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C
\end{aligned}
$$

所以，原式$=-x+\sqrt{2}\arctan\left(\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$。

4. 解：假设$3\cos x-\sin x=A(\cos x-2\sin x)+B(\cos x-2\sin x)'$，则

$$\begin{aligned}3&=A-2B\\1&=2A+B\end{aligned}$$

于是$A=1$，$B=-1$。进而，

$$\begin{aligned}&\int\frac{3\cos x-\sin x}{\cos x-2\sin x}\mathrm{d}x\\=&x-\ln|\cos x-2\sin x|+C\end{aligned}$$

5. 解：

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{(1-\cos^2 x)^2}\\=&-\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{(1+\cos x)^2}+\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{(1-\cos x)^2}\mathrm{d}\cos x\\=&\frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+\frac{1}{1+\cos x}-\frac{1}{1-\cos x}\right)+C\end{aligned}$$

3.8.4 特殊函数的原函数

1. 解：当$x<0$时$\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+x+C_1$，当$x\geq 0$时$\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+\frac{x^2}{2}+C_2$。

由于$\int f(x)\mathrm{d}x$在$x=0$处连续，得到$C_1=1+C_2$。进而，

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{x^3}{3}+x+C_1, & x<0\\ e^x+\frac{x^2}{2}+C_1-1, & x\geq 0\end{cases}$$

2. 解：将函数写成分段函数的形式：

$$f(x)=\begin{cases}x^3-1, & x>1\\ 1-x^3, & x\leq 1\end{cases}$$

于是

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{x^4}{4}-x+C_1, & x<1\\ x-\frac{x^4}{4}+C_2, & x\geq 1\end{cases}$$

由连续性知道$C_1=C_2+3/2$，故

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{x^4}{4}-x+C_1, & x<1\\ x-\frac{x^4}{4}+C_1-\frac{3}{2}, & x\geq 1\end{cases}$$

3.8.5 中值定理（续）

1. 证明：令$F(x) = x(f(x) - x)$，则$F(0) = 0$。进一步设$G(x) = f(x) - x$，则由于$G(0) > 0$及$G(1) < 0$，根据介值定理存在$\eta \in (0, 1)$ 使得$G(\eta) = 0$。进而$F(\eta) = 0$。由罗尔定理知存在$\xi \in (0, \eta)$使得
$$0 = F'(\xi) = \xi f'(\xi) + f(\xi) - 2\xi$$
即$f'(\xi) = 2 - \dfrac{f(\xi)}{\xi}$。证毕。 ∎

2. 证明：由于$f(0) = -f(1) = 1$，由介值性知，存在$\eta \in (0, 1)$使得$f(\eta) = 0$。令$F(x) = x^3 f(x)$，则$F(0) = 0 = F(\eta)$。由罗尔定理知存在$\xi \in (0, \eta)$使得
$$F'(\xi) = \xi^2(\xi f'(\xi) + 3f(\xi)),$$
又因为$\xi^2 \neq 0$, 所以$\xi f'(\xi) + 3f(\xi) = 0$。证毕。 ∎

3. 设$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，且$f(a) = f(b) = 1$。求证：存在$\xi, \eta \in (a, b)$使得$e^{\eta-\xi}(f(\eta) + f'(\eta)) = 1$。
证明：在区间$[a, b]$上，对函数$F(x) = e^x f(x)$应用拉格朗日中值定理可以得到：存在$\eta \in (a, b)$满足
$$F'(\eta) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$
即
$$e^\eta(f(\eta) + f'(\eta)) = \frac{e^b - e^a}{b - a}$$
进一步，在区间$[a, b]$上，对函数e^x应用拉格朗日中值定理可以得到：存在$\xi \in (a, b)$满足
$$e^\xi = \frac{e^b - e^a}{b - a}$$
所以有$e^{\eta-\xi}(f(\eta) + f'(\eta)) = 1$。证毕。 ∎

3.8.6 补充习题

1. 证明：在区间$[a, b]$上对函数$F(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ 应用柯西中值定理得：存在$\eta \in (a, b)$，使得
$$\frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} = \frac{f'(\eta)}{2\eta}$$
即
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{a + b}{2\eta} f'(\eta)$$
于是针对函数$f(x)$在区间$[a, b]$上应用拉格朗日中值定理得：存在$\xi \in (a, b)$，使得
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$
即$f'(\xi) = \dfrac{a + b}{2\eta} f'(\eta)$。证毕。 ∎

2. 证明：由于$f(x)$在$[-1,1]$上具有三阶连续导数，可以讲$f(x)$在$x=0$点进行泰勒展开：

$$f(-1)=f(0)+f'(0)(-1-0)+\frac{1}{2!}f''(0)(-1-0)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)(-1-0)^3$$
$$f(1)=f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{1}{2!}f''(0)(1-0)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)(1-0)^3$$

其中$-1<\xi_1<0<\xi_2<1$。由于$f'(0)=0$，得到

$$1=f(1)-f(-1)=\frac{1}{3!}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))$$

即

$$\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$$

由由习题1.6.3及习题2.6.2可知存在$\xi\in(-1,1)$使得$f'''(\xi)=3$。证毕。 ∎

3. 证明：(1)设函数$F(x)=e^xf(x)$，则$F'(x)=e^x(f(x)+f'(x))$。由$F(a)=F(c)=F(b)=0$，分别在区间$[a,c]$及$[c,b]$应用罗尔中值定理可得：存在$\xi_1\in(a,c)$, $\xi_2\in(c,b)$ 使得

$$F'(\xi_i)=e^{\xi_i}(f(\xi_i)+f'(\xi_i))=0, i=1,2$$

即$f(\xi_i)+f'(\xi_i)=0$，$i=1,2$。

(2) 考察函数$G(x)=e^{-x}(f(x)+f'(x))$，则$G'(x)=e^{-x}(f(x)+f'(x)-(f'(x)+f''(x)))=e^{-x}(f(x)-f''(x))$。由(1)可得$G(\xi_1)=G(\xi_2)=0$。于是在区间$[\xi_1,\xi_2]$上应用罗尔中值定理可得，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得

$$G'(\xi)=e^{-\xi}(f(\xi)-f''(\xi))=0$$

即$f''(\xi)=f(\xi)$。证毕。 ∎