三 练习题III

3.1 重积分计算

1. 求直线$\begin{cases} 3x-y+z-1=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$在平面$\pi$：$x-y+3z=0$上投影的直线方程。

2. 计算$\iiint\limits_V z\mathrm{d}v$，其中$V$是椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1$。

3. 计算
$$\iiint\limits_\Omega \left(x^2+5xy^2\sin\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
其中Ω是曲线$\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周所得曲面和平面$z=1$及$z=4$围成。

4. 设区域Ω是曲线$(x^2+y^2+z^2)^2=8z$所围成的区域，求$\iiint\limits_\Omega (x+y+z)^2\mathrm{d}V$。

3.2 曲线积分计算

1. 计算$\int\limits_\Gamma(2xy+2yz+2zx)\mathrm{d}s$，其中$\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y+z=1 \end{cases}$。

2. 设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上的导函数连续，计算
$$\int\limits_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{xy^2f(xy)-x}{y^2}\mathrm{d}y$$
其中曲线L为沿$x^2=13-6y$从$(3,2/3)$到$(1,2)$。

3. 计算曲线积分$\int\limits_L\left(1+xe^{2y}\right)\mathrm{d}x+\left[\left(4x-y^2\right)e^{2y}-y\right]\mathrm{d}y$，其中曲线$L$为沿上半圆周$x^2+y^2=4x$从$(0,0)$到$(4,0)$。

3.3 曲面积分计算

1. 计算曲面积分$\int\limits_\Sigma\left(x^3+x^2y+2z\right)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为球面$z=\sqrt{16-x^2-y^2}$位于$z=1$以上的部分。

2. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^4)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$中$0\le z\le 1$的部分下侧。

3. 计算曲面积分$\oint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中$\Sigma$是椭球面$x^2+2y^2+3z^2=1$的外侧。