四　练习题IV

习题课题目部分选自《工科数学分析（上册）》，《工科数学分析学习指导与习题解答（上册）》和《哈尔滨工业大学微积分历届期末试题集》。

4.1　定积分的定义及其性质

1. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$，求$\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ ([3], P. 5, 二、4)。

2. 若$f(x)$为$[-a,a]$上奇函数且$f(x)$在$[-a,a]$上可积。证明：$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$。

4.2　定积分的计算

1. $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x$ ([3], P. 104, 三、2)

3. $\displaystyle\int_0^1 x^2\arctan x\mathrm{d}x$ ([3], P. 6, 四)

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}-e^{\sin x}+\cos^2 x}{2}\mathrm{d}x$ ([3], P. 5, 一、5)

5. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+e^x}+\sin^3 x\mathrm{d}x$ ([3], P. 13, 一、4)

6. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{1+a\cos x}\mathrm{d}x$，$0<a<1$ ([3], P. 97, 五)

4.3　定积分的应用

1. 曲线$x^2+(y-2)^2=1$所围平面图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积([3], P. 5, 一、2)。

2. 设$f'(x)=\arcsin(x-1)^2$, $f(0)=0$。求$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ ([3], P. 97, 四)。

3. 讨论函数$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$的单调区间与极值([3], P. 95, 五)。

4. 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\left[\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right]$ ([3], P. 70, 一、6)。

5. 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^{p-1}}{n^p+1^{p-1}}+\frac{2^{p-1}}{n^p+2^{p-1}}+\cdots+\frac{n^{p-1}}{n^p+n^{p-1}}\right]$。

4.4 广义积分的计算

1. $\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)}\mathrm{d}x$ ([3], P. 14, 一、4)

2. $\int_{-\infty}^{0}\frac{xe^x}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{d}x$ ([3], P. 104, 三、1)

4.5 一阶常微分方程

解下列微分方程：

1. $xy'+y=x^2+3x+2$
2. $y'=2xy-x^3+x$
3. $xy'+y=xy^2\ln x$
4. $y'=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$

4.6 补充习题

1. 设$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{\int_0^{x^2}e^{t^2}\mathrm{d}t}=\int_e^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$，则常数$a$，$b$为何值？([3], P. 90, 一、4)

2. 设数列a_n满足$a_n>0$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，设数列$b_n$满足$b_n>0$且$\int_{\sin a_n}^{a_n}e^{x^2}\mathrm{d}x=b_n\ln(1+b_n)$。证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$；(2)求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{b_n^2}$ ([3], P. 12, 七)。

3. 设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续且$f(x)\geqslant g(x)$对于任意$x\in[a,b]$成立。证明：若存在$x_0\in[a,b]$使得$f(x_0)>g(x_0)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

4. 设$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可微且$|f'(x)|\leqslant1$对任意的$x\in(0,2)$成立。证明：若$f(0)=f(2)=1$，则$1<\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x<3$。

4.7 考点分析

4.1.

第1小题，先去极限号再求积分。

第2小题，根据定义做变量代换。

4.2.

第1小题，考察有理函数不定积分。

第2小题，换元法和分部积分。

第3小题，分部积分。

第4,5小题，通过积分区间的转化可以去掉一些不好算的积分。

第6小题，思路和上面一样，过程有点复杂。

4.3.

第1小题，旋转体体积公式。

第2小题，分部积分也能做。

第3小题，先把答案猜出来再算，求导数有点麻烦，需要细心。

第4小题，用定积分定义求和式的极限。

第5小题，定积分定义求和式极限，但是需要考虑夹逼定理。

4.4.

第1小题，不变换区间的话计算过程和复杂。

第2小题，思路简单，计算复杂。

4.5.

第1,2小题，常数变异法。

第3小题，伯努利方程。

第4小题，非齐次线性一阶微分方程。

4.6.

第1小题，洛必达法则可以做，但是泰勒展开更简洁。

第2小题，注意积分中值定理的运用。

第3小题，作业题，看图说话。

第4小题，模拟原题，看图说话。

4.8 参考答案

4.8.1 定积分的定义及其性质

1. 解：由$f(x)$的定义可以得到：

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=1, & 0<x<1,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=-1, & 1<x<2\end{cases}$$

故

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=0$$

2. 证明：由$f(x)$为$[-a,a]$上的奇函数可得：

$$\begin{aligned}&\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\\ \xlongequal[\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t]{x=-t}&-\int_a^0 f(-t)\mathrm{d}t+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^a f(-t)\mathrm{d}t+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

4.8.2 定积分的计算

1. 解：

$$\begin{aligned}&\int_0^a\frac{1}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{a^2}\int_0^a\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x\\ =&\frac{1}{a^2}\int_0^a\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2a^2}\int_0^a x\mathrm{d}(\frac{1}{x^2+a^2})\\ =&\frac{1}{a^2}\int_0^a\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2a^2}\left[\left.\frac{x}{x^2+a^2}\right|_0^a-\int_0^a\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\right]\\ =&\frac{1}{4a^3}+\frac{1}{2a^3}\arctan x\big|_0^1=\frac{1}{4a^3}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

2. 解：

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x\\ \xlongequal[\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t]{\sqrt{x}=t}&\int_0^{\pi}2t^2\cos t\mathrm{d}t\\ &=2\ t^2\sin t\big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}t\sin t\mathrm{d}t\\ &=4\ t\cos t\big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}\cos t\mathrm{d}t\\ &=-4\pi\end{aligned}$$

3. 解：

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^2 \arctan x \mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{3} x^3 \arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
=&\frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 x\mathrm{d}x + \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} \\
=&\frac{\pi}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 \\
=&\frac{\pi}{12} + \frac{\ln 2 - 1}{6}
\end{aligned}$$

4. 解：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - e^{\sin x} + \cos^2 x}{2}\mathrm{d}x \\
=&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cos x} - e^{\sin x} + \cos^2 x}{2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x} - e^{\sin x} + \cos^2 x}{2}\mathrm{d}x \\
\xlongequal[\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t]{x=\frac{\pi}{2}-t}&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cos x} - e^{\sin x} + \cos^2 x}{2}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin x} - e^{\cos x} + \sin^2 x}{2}\mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

5. 解：

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+e^x} + \sin^3 x\mathrm{d}x \\
\xlongequal[\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t]{x=-t}&\int_{-1}^0 \frac{x^2}{1+e^x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x}\mathrm{d}x \\
=&\int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

6. 解：

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}$$

在第二个积分中令$x=\pi-t$，则

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1+a\cos x} + \frac{1}{1-a\cos x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{2}{\tan^2 x + 1 - a^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\frac{\tan x}{\sqrt{1-a^2}}}{\left(\frac{\tan x}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2 + 1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan x = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}
\end{aligned}$$

4.8.3 定积分的应用

1. 解：所求旋转体为一个空心环，因此由旋转体体积公式可得：

$$V=\pi\int_{-1}^{1}(2+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x-\pi\int_{-1}^{1}(2-\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=4\pi^2.$$

2. 解：

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=&\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x-1)=(x-1)f(x)|_0^1-\int_0^1(x-1)f'(x)\mathrm{d}x\\=&-\int_0^1(x-1)\arcsin(x-1)^2\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2}\int_0^1\arcsin t\mathrm{d}t\\=&\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\sin x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3. 解：根据定积分的定义可以容易得到：$f(-1)=f(1)=0$，同时

$$f(0)=\int_1^0(-t)e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)>0$$

故推断$f(x)$的单调区间为$(-\infty,-1]$，$[-1,0]$，$[0,1]$及$[1,\infty)$。

以下可以通过求导获得：

$$\begin{aligned}f'(x)&=2x(x^2-x^2)e^{-x^4}+\int_0^{x^2}(x^2-t)'e^{-t^2}\mathrm{d}t\\&=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

于是$f(x)$有三个驻点：$-1,0,1$且在区间$(-\infty,-1]$上单调下降，在区间$[-1,0]$上单调上升，在区间$[0,1]$上单调下降及在区间$[1,\infty)$上单调上升。进而$f(x)$的极小值为0，极大值为$\frac{e-1}{2e}$。

4. 解：由定积分的定义可得：

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\left[\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right]\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right]\\=&\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x=\sin 1-\cos 1\end{aligned}$$

5. 解：与习题1.4.1类似，考虑利用夹逼定理。首先：

$$\frac{n^p}{(n+1)^p}\frac{k^{p-1}}{n^p}\leqslant\frac{k^{p-1}}{n^p+k^{p-1}}\leqslant\frac{k^{p-1}}{n^p}$$

接下来利用定积分的定义可以得到：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^{p-1}}{n^p}+\frac{2^{p-1}}{n^p}+\cdots+\frac{n^{p-1}}{n^p}\right]\\
=&\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

同时

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}\left[\frac{1^{p-1}}{n^p}+\frac{2^{p-1}}{n^p}+\cdots+\frac{n^{p-1}}{n^p}\right]\\
=&\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

故原式的极限为$\dfrac{1}{p}$。

4.8.4 广义积分的计算

1. 解：

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)}\mathrm{d}x\\
=&\int_1^\infty\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)}\mathrm{d}x\\
\xlongequal[\mathrm{d}x=-y^{-2}\mathrm{d}y]{x=y^{-1}}&\int_1^\infty\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)}\mathrm{d}x+\int_1^\infty\frac{y^{-2}}{(1+y^{-2})(1+y^{-4})}\mathrm{d}y\\
=&\int_1^\infty\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)}\mathrm{d}x+\int_1^\infty\frac{y^4}{(1+y^2)(1+y^4)}\mathrm{d}y\\
=&\int_1^\infty\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

2. 解：

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^0\frac{xe^x}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{d}x\\
\xlongequal[\mathrm{d}x=2te^{-x}\mathrm{d}t]{\sqrt{e^x+1}=t}&2\int_1^{\sqrt{2}}\ln(t^2-1)\mathrm{d}t\\
=&2\int_1^{\sqrt{2}}\ln(t-1)\mathrm{d}t+2\int_1^{\sqrt{2}}\ln(t+1)\mathrm{d}t\\
=&2\int_0^{\sqrt{2}-1}\ln t\mathrm{d}t+2\int_2^{\sqrt{2}+1}\ln t\mathrm{d}t\\
=&2\,t\ln t|_0^{\sqrt{2}-1}-2(\sqrt{2}-1)+2\,t\ln t|_2^{\sqrt{2}+1}-2(\sqrt{2}-1)\\
=&-4(\sqrt{2}-1)+4\ln(\sqrt{2}+1)-4\ln 2
\end{aligned}
$$

4.8.5 一阶常微分方程

1. 解：齐次方程通解为

$$
xy'+y=0\Rightarrow y=\frac{C}{x}
$$

常数变易法，令$y=\dfrac{C(x)}{x}$代入原方程得：

$$xC'(x)x^{-1}-xC(x)x^{-2}+C(x)x^{-1}=x^2+3x+2$$

两边直接积分得：

$$C(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x+C$$

故原方程通解为：$y=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{3x}{2}+2+\dfrac{C}{x}$

2. 解：齐次方程通解为

$$y'-2xy=0\Rightarrow y=ce^{x^2}$$

常数变易法，令$y=C(x)e^{x^2}$代入原方程得：

$$C'(x)e^{x^2}+2xC(x)e^{x^2}-2xC(x)e^{x^2}=-x^3+x$$

两边分部积分得：

$$C(x)=\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}+C$$

通解为$y=\dfrac{1}{2}x^2+Ce^{x^2}$

3. 解：将原方程写成伯努利方程：

$$y'+\frac{y}{x}=y^2\ln x$$

其中$n=2$，$P(x)=\dfrac{1}{x}$，$Q(x)=\ln x$。于是通解为

$$y^{-1}=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}C-e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\int\ln xe^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=cx-\frac{1}{2}x(\ln x)^2$$

4. 解：将原方程视为x关于y的线性非齐次一阶常微分方程，即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=x\cos y+\sin 2y$$

令

$$P(y)=-\cos y,Q(y)=\sin 2y$$

代入公式得到：

$$x=e^{\int\cos y\mathrm{d}y}C+e^{\int\cos y\mathrm{d}y}\int\sin 2ye^{-\int\cos y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y=-2(\sin y+1)+e^{-\sin y}c$$

4.8.6 补充习题

1. 解：首先计算等式右边：

$$\int_e^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \int_e^{\infty} \frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}|_e^{\infty} = 1$$

将左边的分子进行泰勒展开：

$$\ln(1+x) - (ax+bx^2) = (1-a)x + (-1/2-b)x^2 + 1/3x^3 + O(x^4)$$

由积分中值定理知：存在$\xi_x \in [0,x]$使得

$$\int_0^{x^2} e^{t^2}\mathrm{d}t = x^2 e^{\xi_x^2} = x^2 + o(x^2)$$

进而根据题意可得：$a=1$且$b=-3/2$。

2. (1)证明：由于$a_n, b_n > 0$，可得：

$$\int_{\sin a_n}^{a_n} e^{x^2}\mathrm{d}x = b_n \ln(1+b_n) \geq \ln^2(1+b_n) \geq 0$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，得

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\sin a_n}^{a_n} e^{x^2}\mathrm{d}x = 0$$

进而

$$\lim_{n\to\infty} \ln^2(1+b_n) = 0$$

故

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

(2) 由(1)可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3}{b_n^2} \\
=&\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3}{b_n \ln(1+b_n)} \\
=&\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3}{\int_{\sin a_n}^{a_n} e^{x^2}\mathrm{d}x} \\
=&\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3}{(a_n - \sin a_n)e^{\xi_n^2}}
\end{aligned}$$

其中$0 < \xi_n < a_n$。故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3}{b_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3}{a_n - \sin a_n} = 6$$

3. 证明：不妨设$x_0 \in (a,b)$。设$\epsilon = \dfrac{f(x_0)-g(x_0)}{4}$，则由$f(x)$及$g(x)$的连续性知：存在$a \leqslant x_1 < x_0 < x_2 \leqslant b$使得：对任意的$x \in [x_1, x_2]$有：

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon \text{ 且} |g(x) - g(x_0)| \leqslant \epsilon$$

于是对任意的$x \in [x_1, x_2]$有：

$$f(x) - g(x) \geqslant f(x_0) - \epsilon - (g(x_0) + \epsilon) = \frac{f(x_0) - g(x_0)}{2}$$

于是

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x \geqslant \frac{x_2 - x_1}{2}(f(x_0) - g(x_0)) > 0$$

证毕。 ∎

4. 证明：我们只需证明左侧不等号成立即可，因为右侧不等号可以类似地得到。

   首先在区间$[0, 1]$上，由拉格朗日中值定理，存在$\xi_x \in (0, x)$使得

   $$f(x) - f(0) = f'(\xi_x)x$$

   故$f(x) \geqslant 1 - x$。接下来在区间$[1, 2]$上，由拉格朗日中值定理，存在$\eta_x \in (x, 2)$使得

   $$f(x) - f(2) = f'(\eta_x)(x - 2)$$

   故$f(x) \geqslant x - 1$。进而容易得到：

   $$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 (1 - x)\mathrm{d}x + \int_1^2 (x - 1)\mathrm{d}x = 1$$

   基于上一个题目的结论，以下只需说明至少存在一个$x_0 \in [0, 2]$使得$f(x_0) > g(x_0)$成立，其中

   $$g(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0, 1], \\ x - 1, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

   否则，

   $$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-} g'(x) = -1 \text{ 但是} f'_+(1) = \lim_{x \to 1+} g'(x) = 1$$

   这与$f(x)$在$x = 1$处可微矛盾。证毕。 ∎