四 练习题IV

4.1 正项级数

1. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{1+|a_n|}$ 发散。

2. 设$u_1>0$，$\{u_n\}$是单调增加数列，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$收敛的充分必要条件是$\{u_n\}$有上界。

3. 设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$e^{b_n}=e^{a_n}-a_n$，$n=1,2,\cdots$。求证：(1) 若$a_n>0$，则$b_n>0$；(2) 若$a_n>0$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$收敛。

4. 设$f(x)$在$|x|\le 1$上有定义，在$x=0$的某个领域内有连续二阶导数，当$x\neq 0$时有$f(x)\neq 0$，并且当$x\to 0$时$f(x)$是x的高阶无穷小。设级数$\{b_n\}$满足

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|\le\left|\frac{f(\frac{1}{n+1})}{f(\frac{1}{n})}\right|$$

证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_nb_{n+1}|}$收敛。

4.2 交错级数

1. 已知函数$f(x)$可导且$f(0)=1$，$0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$。设数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$。证明：(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，且$0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$。

4.3 幂级数

1. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3^n+(-3)^n}{2}+\dfrac{2^{n-1}+(-2)^{n-1}}{2}\right)x^n$的收敛半径。

2. 已知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为3，求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$的收敛区间。

3. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\dfrac{1}{5}$，求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^n$的收敛半径。

4. 将函数$f(x) = \arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$展开成$x$的幂级数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$的和。

5. 将函数$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n \cdot n}(x+1)^{2n}$，$-3 < x < 1$，展开成$x$ 的幂级数。

6. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}4n^2}{2n-1}x^{2n}$的收敛域及和函数。

7. 学校要设立一个奖学金，将存款A万元存入银行，其年利率为$r = 0.05$，要实现第一年提取11万元，第二年提取12万元，……，第n年提取$(10+n)$万元，并能按此规律一直提取下去，问存款A至少应为多少万元？

4.4 傅里叶展开

1. 用余弦级数展开$f(x) = 1 - x^2$，$0 \le x \le \pi$，并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$的和。