文都教育®

2022
文都考研数学系列

考研数学

# 接力题典1800

适用：基础、强化、提高

策划◎文都考研数学命题研究组
编著◎汤家凤

数学一

解答册

**依据考研新大纲全新改编**

**基础篇**：理清基本原理，掌握基本方法

**提高篇**：训练计算能力，强化分析应用

**超值服务**：全书免费网络答疑

中国原子能出版社

文都教育®

2022
文都考研数学系列

考研数学

# 接力题典1800

适用：基础、强化、提高


策划◎文都考研数学命题研究组

编著◎汤家凤


数学一

## 解答册


中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学接力题典1800. 数学一 / 汤家凤编著. —
北京：中国原子能出版社，2019.1(2020.12重印)
ISBN 978-7-5022-7484-9

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①汤… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第025895号

**考研数学接力题典1800. 数学一**

| | |
|---|---|
| **出版发行** | 中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路43号 100048) |
| **责任编辑** | 王　青 |
| **特约编辑** | 贾俊峰 |
| **印　　刷** | 北京铭传印刷有限公司 |
| **经　　销** | 全国新华书店 |
| **开　　本** | 787mm×1092mm 1/16 |
| **印　　张** | 34　　**字　数** 850千字 |
| **版　　次** | 2019年1月第1版 2020年12月第9次印刷 |
| **书　　号** | ISBN 978-7-5022-7484-9　　**定　价** 78.00元 |

**网址:http://www.aep.com.cn**　　**E-mail:atomep123@126.com**
**发行电话:010-68452845**

# 前言

全国硕士研究生招生考试数学试卷分为数学一、数学二、数学三,其中数学一、数学三需要复习高等数学、线性代数、概率统计,数学二需要复习高等数学和线性代数。各试卷题型及分值分布一致,题型分选择题、填空题、解答题(包括计算题、证明题、应用题等),选择题 10 题,分值 50 分,填空题 6 题,分值 30 分,解答题 70 分。由于考研数学复习内容量大面广,需要考查考生对基本概念的理解,基本公式及基本原理的掌握,同时需要考生具有很强的计算能力、综合分析能力、逻辑推理能力、空间想象能力及实际应用能力。要牢固掌握基础知识并用所学知识融会贯通地解决问题,就需要进行系统的练习。那么拥有一本通过分层递进的习题训练达到基础知识的掌握和解题能力的提高,并能帮助考生最终取得优异成绩的习题册就成为广大考研学子的迫切需求。

本书是作者在长达二十多年的考研数学授课、阅卷及对新大纲深入研究的基础上,根据考研数学命题趋势及命题的重点、难点和考生的弱点,从广大考生的实际出发精心编写而成。

本书分基础篇和提高篇,包括高等数学、线性代数和概率统计。基础篇是针对基础复习阶段而设计的,注重对基本概念的理解,基本原理和基本方法的掌握,为复习打下坚实的基础;提高篇适用于复习的强化阶段,注重基本概念的深化、原理的拓展,同时训练计算能力、综合分析能力、证明问题的能力、利用数学知识解决实际问题的能力。本书设计问题的难度和综合性比考试的要求略高,从这些年的使用情况看,达到了非常好的效果。

本书是针对数学一的考生编写,其主要特点有:

1. 每部分的题目都是严格依据最新考纲的规定,无论是题型还是知识点都是依据考研考试的要求设计。基础篇每部分融合了基本概念、基本原理、基本方法的考查点,知识覆盖面广,题型丰富、新颖。通过基础篇的系统练习,考生扎实掌握基础知识,对考纲和考试有清晰的认识,为强化复习打下扎实的基础。

2. 强化复习是取得数学高分非常关键的阶段,不仅强化课程非常关键,习题的设计也是非常重要的一环。本书提高篇的题目侧重对考生的复杂计算能力、逻辑推理能力、综合分析能力和实际应用能力的训练。

3. 本书题目从题型的难度和综合性等方面都体现了整个数学的认知过程,各部分解答力求通俗易懂,方法独到,从最近这些年的使用情况看基本达到了考试对知识点、题型和题目难易度考察的要求。

数学复习不同于其他科目的复习,大家复习时一定要早动手、重基础、循序渐进。基础阶段一定要先建立整个数学的知识框架和体系,然后做一些基础练习(基础知识考查所占分值比重较大,切不可好高骛远);强化阶段是数学复习脱胎换骨的阶段,通过进一步训练综合题型提高自己的各种数学能力和应试技巧以及对考试的适应能力,这是贯穿本书的设计理念。

本书从初次出版到现在的若干年中,受到全国广大学子的厚爱和同仁的支持,文都考研命题研究组的同仁做了大量有益的工作,在此表示由衷的感谢。

限于本人能力,书中不足之处难免,欢迎全国广大的学子和同仁的不吝指正。

欢迎各位同学在学习之余能关注汤老师微博、微信公众号及一直播,汤老师将在这些平台对书中部分题目作直播讲解。

汤老师微博　　　　汤老师微信公众号

汤老师一直播 ID:186288809

汤家凤

2020 年 12 月于南京

# ○ 目录(解答册)

## 上篇　基础篇

# 下篇　提高篇

[上篇]

# 基础篇

# 高等数学部分

## 一、函数、极限、连续

### Ⅰ 入门练习

◇ 填空题

**1.【解】**(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin x)^x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln(1+\sin x)}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+\sin x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(3) 由 $\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]\sim\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$,

$\sqrt{1-x^2}-1=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$ 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt{1-x^2}-1}=1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

**2.【解】**(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{x^2}-1}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2\ln\cos x}-1}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\sin x-x}{x}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}=-\dfrac{1}{6}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{x^2}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}(-x^2)}{x^2}=\dfrac{1}{6}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\arctan x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\arctan x}\cdot\dfrac{e^{x-\arctan x}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\arctan x}-1}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{3}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\ln(1+x)}-e^{x}}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{x}\cdot\dfrac{e^{\ln(1+x)-x}-1}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$.

(6) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^{3}}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x\cos x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^{3}}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^{3}}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^{2}}=-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

**3.【解】**(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x^{2})^{\frac{1}{x\tan x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{[1+(-\sin x^{2})]^{-\frac{1}{\sin x^{2}}}\right\}^{-\frac{\sin x^{2}}{x\tan x}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^{2}}{x\tan x}}=e^{-1}$.

(2) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(e^{2x}+\sin x)^{\frac{2}{x}}&=\lim_{x\to 0}\left\{[1+(e^{2x}-1+\sin x)]^{\frac{1}{e^{2x}-1+\sin x}}\right\}^{\frac{2(e^{2x}-1+\sin x)}{x}}\\&=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+\sin x}{x}}=e^{2\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)}=e^{6}.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\ln(1+x)}\right]^{\frac{1}{\sin 2x}}&=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)}\right]^{\frac{\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}}\right\}^{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin 2x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^{2}}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}}=e^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}&=\lim_{x\to 0}\left\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{\cos x-1}{x-\ln(1+x)}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x-\ln(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{2}}{x-\ln(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1-\frac{1}{1+x}}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}(1+x)}=e^{-1}.\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^{3}}}&=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{x-\sin x}}\right]^{\frac{1}{x^{3}}\cdot\frac{x-\sin x}{1+\sin x}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{3}}\cdot\frac{x-\sin x}{1+\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^{3}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{3}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^{2}}}=e^{\frac{1}{6}}.\end{aligned}$$

**4.【解】**(1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln^{2}x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{2\ln x}{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=4\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=4\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=8\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^{3}}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^{2}}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6}{e^{x}}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^{2}+2x+2}{x^{2}-1}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^{2}}}{1-\dfrac{1}{x^{2}}}=3$.

(4) **方法一**

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x^{4}+2x)}{\ln(x^{2}+x+1)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{4x^{3}+2}{x^{4}+2x}}{\dfrac{2x+1}{x^{2}+x+1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(4x^{3}+2)(x^{2}+x+1)}{(2x+1)(x^{4}+2x)}=2.$$

**方法二**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^4+2x)}{\ln(x^2+x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[x^4\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)\right]}{\ln x^2\left[\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\ln x+\ln\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right)}{2\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=2.$$

**5.【解】**(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}}=1.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=2.$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}\doteq\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\arctan x-\dfrac{\pi}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x-\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=-1.$$

**6.【解】**(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}x}=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\cdot\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}x}=1.$

**7.【解】**$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，

因为 $f(0-0)\neq f(0+0)$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

**8.【解】**$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\arctan x+b\sin2x}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3\arctan x+b\sin2x}{x}$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(3\frac{\arctan x}{x}+b\frac{\sin2x}{x}\right)=3+2b,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}\frac{1-(1-x^2)^{\frac{1}{a}}}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\dfrac{1}{a}(-x^2)}{x^2}=\frac{1}{a},$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)=1$,故 $a=1,b=-1$.

## ◆ 选择题

9.【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{2x\cdot\frac{3a}{x-a}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}2x\cdot\frac{3a}{x-a}}=e^{6a}$,

$\lim\limits_{t\to 0}(1-2t)^{\frac{1}{\sin t}}=\lim\limits_{t\to 0}\{[1+(-2t)]^{-\frac{1}{2t}}\}^{-\frac{2t}{\sin t}}=e^{-2}$,

由 $e^{6a}=e^{-2}$ 得 $a=-\dfrac{1}{3}$,应选(D).

10.【解】取 $a_n=(-1)^n,b_n=\dfrac{n}{n+1}$,显然 $\{a_n\}$ 有界,$\{b_n\}$ 收敛,但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$ 不存在;

取 $a_n=(-1)^n$,显然 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$,但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在;

取 $a_n=n[1-(-1)^n],b_n=n[1+(-1)^n]$,显然 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 无界,但 $a_nb_n=0$,即 $\{a_nb_n\}$ 有界,应选(C).

11.【解】$\alpha=\ln\dfrac{x}{\arctan x}=\ln\left(1+\dfrac{x-\arctan x}{\arctan x}\right)\sim\dfrac{x-\arctan x}{\arctan x}\sim\dfrac{x-\arctan x}{x}$,

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$,所以 $\alpha\sim\dfrac{1}{3}x^2$;

$\beta=\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln\left(1+\dfrac{2x}{1-x}\right)\sim\dfrac{2x}{1-x}\sim 2x$,应选(B).

12.【解】由 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\infty$ 得 $x=-1$ 为第二类间断点;

由 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-2\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=\pi$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-2\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=-\pi$ 得 $x=0$ 为跳跃间断点;

由 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{4}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{\pi}{8}$ 得 $x=1$ 为可去间断点,应选(A).

## ◆ 解答题

13.【证明】(1) $\left|\dfrac{2n}{n+1}-2\right|=\dfrac{2}{n+1}$,对任意的 $\varepsilon>0$,$\left|\dfrac{2n}{n+1}-2\right|<\varepsilon$ 等价于 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}-1$,

对任意的 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right]$,则当 $n>N$ 时,$\left|\dfrac{2n}{n+1}-2\right|<\varepsilon$,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2.$$

(2) $\left|\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}-3\right|=2|x-1|$,对任意的 $\varepsilon>0$,$\left|\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon$ 等价于 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,

对任意的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,则当 $0<|x-1|<\delta$ 时,$\left|\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon$,即

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{x-1}=3.$$

**14.【解】** $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+ax+b=\dfrac{(a+1)x^2+(a+b+2)x+b+2}{x+1}$，

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+ax+b\right)=0$ 得 $\begin{cases}a+1=0,\\a+b+2=0,\end{cases}$ 解得 $a=-1,b=-1$.

**15.【解】**(1) 由 $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=[(1+x)^{\frac{1}{2}}-1]-[(1-x)^{\frac{1}{2}}-1]\sim\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(-x)=x$，

$\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}=[(1+x)^{\frac{1}{3}}-1]-[(1-x)^{\frac{1}{3}}-1]\sim\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}(-x)=\frac{2}{3}x$ 得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}=\frac{3}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\mathrm{e}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x}$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\mathrm{e}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{\mathrm{e}}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(-\frac{1}{x+1}\right)\right]^{-(x+1)}\right\}^{-\frac{2x}{x+1}}=\mathrm{e}^{-2}.$$

(4) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{x-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}\right]^{\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}.$$

(5) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x\sin x}{x^2-x\cos2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}\sin x}{1-\frac{1}{x}\cos2x+\frac{1}{x^2}}=2.$$

**16.【解】** 由 $3^n\leqslant2^n+3^n\leqslant2\cdot3^n$ 得 $3\leqslant(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant2^{\frac{1}{n}}\cdot3$，

由 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

**17.【解】**(1) 令 $b_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}$，

则有 $$b_n\leqslant\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1}=\frac{n^2}{n^2+1},$$

又 $b_n\geqslant\dfrac{n}{n^2+n}+\dfrac{n}{n^2+n}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}=\dfrac{n^2}{n^2+n}$，

即 $$\frac{n^2}{n^2+n}\leqslant b_n\leqslant\frac{n^2}{n^2+1},$$

再由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=1$得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=1$.

(2) $\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+1}}$,

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{1}{2}$,

所以由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)=\dfrac{1}{2}$.

*18*.【解】
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$
$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

*19*.【证明】$a_1>0$,设$a_k>0$,则$a_{k+1}=\ln(1+a_k)>0$,

由数学归纳法原理,对任意的$n$有$a_n>0(n=1,2,\cdots)$.

因为当$x>0$时,$\ln(1+x)<x$,所以$a_{n+1}=\ln(1+a_n)<a_n$,即$\{a_n\}$单调递减,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,$a_{n+1}=\ln(1+a_n)$两边求极限得$A=\ln(1+A)$,解得$A=0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

*20*.【证明】(1) 显然$a_n>0(n=1,2,\cdots)$;

因为当$x>0$时,$\sin x<x$,所以$a_{n+1}=\sin a_n<a_n$,即$\{a_n\}$单调递减,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,$a_{n+1}=\sin a_n$两边取极限得$A=\sin A$,解得$A=0$,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sin^2a_n}-\frac{1}{a_n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-\sin^2a_n}{a_n^2\sin^2a_n}$$
$$\xlongequal{a_n=t}\lim_{t\to0}\frac{t^2-\sin^2t}{t^2\sin^2t}=\lim_{t\to0}\frac{t^2-\sin^2t}{t^4}=\lim_{t\to0}\frac{t+\sin t}{t}\cdot\frac{t-\sin t}{t^3}$$
$$=2\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\frac{2}{3}\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{3}.$$

*21*.【解】$x=-1,0,1$为$f(x)$的间断点.

由$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x-1}\cdot\dfrac{\ln(-x)}{x+1}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\ln[1-(x+1)]}{x+1}=\dfrac{1}{2}$得

$x=-1$为$f(x)$的可去间断点;

由$\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$得$x=0$为$f(x)$的第二类间断点;

由$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=\dfrac{1}{2}$得

$x=1$为$f(x)$的可去间断点.

*22*.【解】$x=0,1$为$f(x)$的间断点.

由 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=0,f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ 得 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点；

由 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}e^{\frac{1}{x}}=e\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x-1}=3e$ 得 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

## Ⅱ 基础练习

### ◇ 填空题

**1.【解】** 由 $f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2$ 得 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$，

由 $-1\leqslant1-x^2\leqslant1$ 得 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

**2.【解】** 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}}=1$ 得 $b=1$，

则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}=1$，故 $a=4$.

**3.【解】**

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)-\sin x}{\sin^3x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t-t}{t^3}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{3t^2}+\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{3}.$$

(2) **方法一**　由 $e^x=1+x+o(x),\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ 得

$$xe^x-\ln(1+x)=x+x^2+o(x^2)-\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\sim\frac{3}{2}x^2,$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{3}{2}$.

**方法二**　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^x-x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

**4.【解】** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2\pi x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2[\pi+\pi(x-1)]}{(x-1)\ln[1+(x-1)]}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2[\pi(x-1)]}{(x-1)^2}=\pi^2$.

**5.【解】** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{\cos x+1}{2}\right)^x-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln\frac{\cos x+1}{2}}-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\cos x-1}{2}\right)}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

6.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^{2x}+\sin 3x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+(e^{2x}-1+\sin 3x)]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+\sin 3x}{x}=5.$

7.【解】由 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ 得 $x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\arctan x}}{x-\sin x}&=6\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\arctan x}}\cdot\frac{\tan x-\arctan x}{x^3}\\&=3\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\arctan x}{x^3}\\&=3\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}\right)\\&=3\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}\right)\\&=3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=2.\end{aligned}$$

8.【解】$\int_0^x \sin t\,dt=1-\cos x=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$,

$$\ln\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\frac{1}{2}\left[x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right]=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+o(x^4),$$

于是$\int_0^x \sin t\,dt-\ln\sqrt{1+x^2}\sim\frac{5}{24}x^4$，故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t\,dt-\ln\sqrt{1+x^2}}{x^4}=\frac{5}{24}.$

9.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1+\arctan x}\right)^{\frac{1}{x^2\arcsin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x-\arctan x}{1+\arctan x}\right)^{\frac{1+\arctan x}{x-\arctan x}}\right]^{\frac{1}{1+\arctan x}\cdot\frac{x-\arctan x}{x^2\arcsin x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\arctan x}\cdot\frac{x-\arctan x}{x^2\arcsin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

10.【解】$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+x^2)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{[1+(\cos 2x-1+x^2)]^{\frac{1}{\cos 2x-1+x^2}}\right\}^{\frac{\cos 2x-1+x^2}{x^2}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1+x^2}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}+1}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}+1}=e^{-1}.$$

11.【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-an+2}{n(1-a)}\right]^{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{2}{n(1-a)}\right]^{\frac{n(1-a)}{2}}\right\}^{3n\cdot\frac{2}{n(1-a)}}=e^{\frac{6}{1-a}}.$

12.【解】

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x\arctan x-\pi x)=2\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=-2.$$

(2) **方法一**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x\right)\cdot\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=2\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}.$$

**方法二**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2-\sin^2 2x}{(2x)^4}\xlongequal{2x=t}4\lim_{t\to 0}\frac{t^2-\sin^2 t}{t^4}$$

$$=4\lim_{t\to 0}\frac{t+\sin t}{t}\cdot\frac{t-\sin t}{t^3}=\frac{4}{3}.$$

13.【解】$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x+6}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x+6}{\sqrt{x^2-4x+6}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4+\frac{6}{x}}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}}-1}=2.$

14.【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-x^3\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}\right)\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}=\dfrac{1}{6}.$

15.【解】$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\dfrac{\pi}{2}x=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\left[\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}(x-1)\right]=-\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cot\left[\dfrac{\pi}{2}(x-1)\right]$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\tan\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}=-\frac{2}{\pi}.$$

16.【解】$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln x}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=1.$

17.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x\cos x}+\sqrt{1+x}}\cdot\dfrac{x\cos x-x}{x^3}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{4}.$$

18.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-\sin x}{\sin^3 x}\xlongequal{\sin x=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t-t}{t^3}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{3t^2}=-\frac{1}{6}.$$

19.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\arctan x}-\mathrm{e}^{\arcsin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\arcsin x}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{\arctan x-\arcsin x}-1}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\arcsin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{-1}-1}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-1}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)}{x^2}\right]=-\frac{1}{2}.$$

**20.【解】** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x}e^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\left(x+3+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-x\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)+\lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+3=4.$$

**21.【解】** 由$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x(x\to 0)$得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2(\sqrt{1+x}-1)}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

**22.【解】** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin^2\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin^2\frac{n\pi}{n}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{i\pi}{n}$

$$=\int_0^1\sin^2\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin^2\pi x\,d(\pi x)\xlongequal{\pi x=t}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}.$$

**23.【解】** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{n^2-1^2}}{n^2}+\frac{2+\sqrt{n^2-2^2}}{n^2}+\cdots+\frac{n+\sqrt{n^2-n^2}}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+\sqrt{n^2-i^2}}{n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+\sqrt{n^2-i^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i}{n}+\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right]=\int_0^1(x+\sqrt{1-x^2})dx$$

$$\xlongequal{x=\sin t}\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}.$$

**24.【解】** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5\Rightarrow a=1$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=5\Rightarrow b=-4.$$

**25.【解】** $\ln(\cos ax)=\ln[1+(\cos ax-1)]\sim\cos ax-1\sim-\frac{a^2}{2}x^2$,

则$-\frac{a^2}{2}=-2,b=2$,解得$a=2,b=2$.

**26.【解】** 由$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$得

$e^{x^2}-\cos x=\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\sim\frac{3}{2}x^2$,

又$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\overset{x-t=u}{=}\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,

于是$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{e^{x^2}-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{\frac{3}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{3x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{3}f'(0)=\frac{2}{3}$.

27.【解】$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin2x^2+e^{ax^2}-1}{\ln(1+2x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin2x^2}{2x^2}+\frac{e^{ax^2}-1}{2x^2}\right)=1+\frac{a}{2}$，$f(0)=a$，

因为$f(x)$在$x=0$处连续,所以$1+\frac{a}{2}=a$,故$a=2$.

28.【解】因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\}^{2\frac{\cos x-1}{x\arctan x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}2\frac{\cos x-1}{x\arctan x}}=e^{-1}$,

所以$a=e^{-1}$.

29.【解】$\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+a\sin x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+a\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)+a=a+b$,

因为$F(x)$在$x=0$处连续,所以$A=a+b$.

30.【解】$\frac{2}{3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\tan2x-2x}{x^3}+\frac{2x+xf(x)}{x^3}\right]$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x-2x}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x^2}$,

由$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x-2x}{x^3}=8\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x-2x}{(2x)^3}\overset{2x=t}{=}8\lim\limits_{t\to0}\frac{\tan t-t}{t^3}=8\lim\limits_{t\to0}\frac{\sec^2t-1}{3t^2}$

$=\frac{8}{3}\lim\limits_{t\to0}\frac{\tan^2t}{t^2}=\frac{8}{3}$

得$\lim\limits_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x^2}=\frac{2}{3}-\frac{8}{3}=-2$.

31.【解】当$x\to0$时,由$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\overset{x-t=u}{=}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，$x-\arctan x=x-[x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)]\sim\frac{x^3}{3}$,

得$\lim\limits_{x\to0}g(x)=3\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=3\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=3\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{2x}=\frac{3}{2}f'(0)=3$,

因为$g(x)$在$x=0$处连续,所以$a=3$.

## ◇ 选择题

32.【解】$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant1,\\0, & |f(x)|>1,\end{cases}$因为$|f(x)|\leqslant1$,所以$f[f(x)]=1$,

于是$f\{f[f(x)]\}=1$,选(B).

33.【解】显然函数为偶函数,选(D).

34.【解】由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\frac{\sin^2 t}{t}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin^2 x}{x}}{2x}=\dfrac{1}{2}$,得 $x\to 0$ 时,$f(x)\sim\dfrac{1}{2}x^2$,

又 $g(x)=\int_0^x\sin^2(x-t)dt\overset{x-t=u}{=}\int_x^0\sin^2 u(-du)=\int_0^x\sin^2 u du$,

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$,得当 $x\to 0$ 时,$g(x)\sim\dfrac{1}{3}x^3$,

故 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶无穷小,应选(A).

35.【解】当 $x\to 0^+$ 时,$\ln(1+x^2)-x^2\sim -\dfrac{1}{2}x^4$,

$\sqrt{1+x^2}+\cos x-2=1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{8}x^4+o(x^4)+1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4+o(x^4)-2\sim -\dfrac{1}{12}x^4$,

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}{x^6}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\ln(1+x^4)}{6x^5}=\dfrac{1}{3}$,得 $x\to 0$ 时,$\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt\sim\dfrac{1}{3}x^6$,

$e^{x^2}-1-x^2=1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)-1-x^2\sim\dfrac{x^4}{2}$,则$\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt$ 为最高阶无穷小,选(C).

36.【解】当 $x\to 0$ 时,$e^{x^n}-1\sim x^n$,因为 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$,所以$(x-\sin x)\ln(1+x)\sim\dfrac{x^4}{6}$,

又因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}\int_0^x(1-\cos^2 t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(1-\cos^2 t)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$,

所以$\dfrac{1}{x}\int_0^x(1-\cos^2 t)dt\sim\dfrac{x^2}{3}$,于是 $n=3$,选(C).

37.【解】由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{x}=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=5$,得 $\alpha\sim 5x$;

由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x=e$,得 $\beta\sim ex$,

故 $\alpha$ 是 $\beta$ 的同阶但非等价的无穷小,应选(D).

38.【解】当 $x\to 0$ 时,$g(x)\sim\dfrac{x^5}{5}$,

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2 dt}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1-\cos x)^2\sin x}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2 x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^4}{4}}{x^3}=0$,

所以 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小,选(B).

39.【解】因为当 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}(n=1,2,\cdots)$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}\sin\dfrac{1}{x_n}=\infty$,当 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi}(n=1,2,\cdots)$

时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}\sin\frac{1}{y_n}=0$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 极限不存在但不是 $\infty$，选(C)。

**40.【解】** 显然$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$，因为$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，

而$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=2\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，所以$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在但不是 $\infty$，选(D)。

**41.【解】** $\lim\limits_{x\to a}F(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}[2x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)]=a^2f(a)$，选(B)。

**42.【解】** 将 $x=0$ 代入题中等式得 $y=1$，

$\cos(xy)+\ln y-x=1$ 两边对 $x$ 求导得 $-\sin(xy)\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1=0$，

将 $x=0,y=1$ 代入上式得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$，即 $f'(0)=1$，

于是$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2$，应选(A)。

**43.【解】** 当 $x>0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}=1$；当 $x=0$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}$；当 $x<0$ 时，$f(x)=x$。

因为 $f(0+0)=1,f(0)=\frac{1}{2},f(0-0)=0$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，选(B)。

**44.【解】** 因为 $f'(0)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，又因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，

显然 $x=0$ 为 $g(x)$ 的间断点，因为$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$，所以

$x=0$ 为 $g(x)$ 的可去间断点，选(B)。

**45.【解】** 当 $|x|<1$ 时，$f(x)=1+x$；当 $|x|>1$ 时，$f(x)=0$；当 $x=-1$ 时，$f(x)=0$；当

$x=1$ 时，$f(x)=1$。于是 $f(x)=\begin{cases}1+x, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1,\\ 0, & x=-1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$ 显然 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，

选(B)。

**46.【解】** 因为$\lim\limits_{x\to -1}\frac{3}{x^3+1}=\infty$，所以$\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{ax+1}=\infty$，即 $a=1$，

又$\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to -1}(x-2)=-1$，选(B)。

**47.【解】** 显然 $x=0$ 为 $g(x)$ 的间断点，因为$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，所以

$x=0$ 为 $g(x)$ 的可去间断点，选(A)。

## ◇ 解答题

48.【解】(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{4x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{4x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{(x-1)(x+3)}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x-1}$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}}=-\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\sin x-x^2\cos x}{\cos2x\ln(1-2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\sin x-x^2\cos x}{\ln(1-2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\sin x-x^2\cos x}{-2x}$

$$=\lim_{x\to0}\left(-2\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{2}x\cos x\right)=-2.$$

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1+\sin\dfrac{\pi}{2}x}\cdot\dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin\left[\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi(x-1)}{2}\right]}=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\cos\dfrac{\pi(x-1)}{2}}$$

$$\overset{x-1=t}{=}\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{\ln(\cos t)}{1-\cos\dfrac{\pi t}{2}}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{\ln[1+(\cos t-1)]}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{-\dfrac{1}{2}t^2}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)^2}=-\frac{2}{\pi^2}.$$

(5) $1-\sqrt{1-x^2}\sim\dfrac{1}{2}x^2$,

由 $\sin x=x+o(x^2)$， $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$ 得 $\sin x-e^x+1\sim-\dfrac{x^2}{2}$,

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-e^x+1}{1-\sqrt{1-x^2}}=-1$.

(6) 由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$ 得 $\ln(1-2x)=-2x-2x^2+o(x^2)$,

于是 $\arctan^2x[2x+\ln(1-2x)]\sim-2x^4$;

又由 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$， $e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+o(x^4)$ 得

$\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}\sim-\dfrac{1}{12}x^4$，故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{\arctan^2x[2x+\ln(1-2x)]}=\dfrac{1}{24}$.

(7) $\sqrt{1+x^4}-1\sim\frac{1}{2}x^4$，

由 $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+o(x^2)$ 得

$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$，　$\sqrt{1-x^2}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$，

于是 $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}-2\sim-\frac{1}{4}x^4$，故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}-2}{\sqrt{1+x^4}-1}=-\frac{1}{2}$.

(8) $$\lim_{x\to0}(\sin3x+e^{2x})^{\frac{1}{\ln(1-x)}}=\lim_{x\to0}\left\{[1+(\sin3x+e^{2x}-1)]^{\frac{1}{\sin3x+e^{2x}-1}}\right\}^{\frac{\sin3x+e^{2x}-1}{\ln(1-x)}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x+e^{2x}-1}{\ln(1-x)}}=e^{-\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin3x}{x}+\frac{e^{2x}-1}{x}\right)}=e^{-5}.$$

(9) $$\lim_{x\to0}(e^{x^2}+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left\{[1+(e^{x^2}-1+\cos x-1)]^{\frac{1}{e^{x^2}-1+\cos x-1}}\right\}^{\frac{e^{x^2}-1+\cos x-1}{x^2}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1+\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

**49.【解】** $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{t}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

**50.【解】** $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\arcsin^2x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin^2x-x^2}{x^2\arcsin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin^2x-x^2}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x+x}{x}\cdot\frac{\arcsin x-x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{x^2}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$
$$=-\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{3}.$$

**51.【解】方法一** $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-2x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-2x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-2x}}=\frac{3}{2}.$$

**方法二** $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-2x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)-(\sqrt{1-2x}-1)}{x},$$

由 $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$，$\sqrt{1-2x}-1\sim-x$ 得 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-2x}}{x}=\frac{3}{2}$.

**52.【解】** $$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin^4x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4$$

$$\overset{\sin x=t}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}.$$

53.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\ln(1+x)}}{\sqrt[3]{1-x^2}-1}=\lim e^{\ln(1+x)}\cdot\dfrac{e^{x-\ln(1+x)}-1}{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{3}}-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{-\frac{1}{3}x^2}=-3\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=-3\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=-\frac{3}{2}.$$

54.【解】由$\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{8}x^4+o(x^4)$,

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2),e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$ 得 $x\to 0$ 时,$\cos x-e^{x^2}\sim-\dfrac{3}{2}x^2$,

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4}=-\dfrac{1}{12}.$

55.【解】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{\sin[\pi(x-1)+\pi]}$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{\ln[1+(x-1)]}{\sin\pi(x-1)}=-\frac{1}{\pi}.$$

56.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sqrt{1-x^2}\cos x)}{\sin x\ln(1+\tan x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sqrt{1-x^2}\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sqrt{1-x^2}+\ln\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\sqrt{1-x^2}-1)]}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1.$$

57.【解】(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{\sin x\ln\cos x}}{x^3}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\ln\cos x}{x^3}$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x\ln[1+(\cos x-1)]}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

(2) 由$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$ 得 $1-\sqrt{1-x^2}\sim\dfrac{1}{2}x^2$,

于是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^{x^2}-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{(e^{x^2}-1)+(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2+\frac{1}{2}x^2}=\dfrac{1}{3}.$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x}+x+1}{\sqrt{x^2+x+2}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{4x^2}}-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x+1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2\sqrt{1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{4x^2}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}=1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x=2\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\overset{\frac{\pi}{2}-x=t}{=}2\lim\limits_{t\to0}t\cot t=2\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\tan t}=2.$

58.【解】 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\sin3x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sin3x\ln\cot x}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\sin3x\ln\tan x}$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin3x}{\tan x}\cdot\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{\tan x}}}\overset{\tan x=t}{=}e^{-3\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}}=e^{3\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}}}=e^0=1.$$

59.【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}}\right\}^{x^2\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}{\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi(1+x^2)}}{-\frac{2}{x^3}}}=e^{-\frac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{1+x^2}}=0.$$

60.【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=e^0=1.$$

61.【解】由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+2|x|}{x+2}\arctan x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-2x}{x+2}\arctan x=\pi$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+2|x|}{x+2}\arctan x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+2x}{x+2}\arctan x=\pi$，得

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2|x|}{x+2}\arctan x=\pi.$

62.【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(t^2+1)e^{t^2-x^2}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(t^2+1)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+1)e^{x^2}}{(1+2x^2)e^{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

63.【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$

64.【解】 $a_n=\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}=\frac{1}{\sqrt2}[\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}]$，

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{\sqrt2}\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}]=\frac{1}{\sqrt2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt2}.$$

**65.**【解】因为$\dfrac{i^2}{n^3+n^2+n+n}\leqslant\dfrac{i^2}{n^3+n^2+n+i}\leqslant\dfrac{i^2}{n^3+n^2+n+1}(i=1,2,\cdots,n)$,

所以$\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+n^2+n+n}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i^2}{n^3+n^2+n+i}\leqslant\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+n^2+n+1}$,

由 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+n^2+n+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+n^2+n+1}=\dfrac{1}{3}$,根据夹逼定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+n^2+n+1}+\frac{2^2}{n^3+n^2+n+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2+n+n}\right)=\frac{1}{3}.$$

**66.**【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n^2}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{4+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{4+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}}=\ln(x+\sqrt{x^2+4})\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{5})-\ln2.$$

**67.**【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})}$,

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\dfrac{i}{n})=2\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=2\left[x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x\right]$

$$=2\ln2-2\int_0^1(1-\frac{1}{x+1})\mathrm{d}x=4\ln2-2=\ln\frac{16}{\mathrm{e}^2},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}=\dfrac{16}{\mathrm{e}^2}$.

**68.**【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n+n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$

$$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=\ln2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\ln\frac{4}{\mathrm{e}},$$

所以原式$=\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

**69.**【解】令$\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}=a_n$,

则$\dfrac{1}{n+1}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)\leqslant a_n\leqslant\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)$,

而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$，

根据夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]=\frac{2}{\pi}$.

**注解** 求$n$项之积或和的极限的常用方法有：

(1) 先计算其积或和，再计算其极限；

(2) 夹逼定理；

(3) 定积分.

**70.【解】**$x\to0$时，由$1-\cos^a x\sim\frac{a}{2}x^2$得

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$1-\sqrt{\cos2x}\sim\frac{2}{2}x^2$，$1-\sqrt[3]{\cos3x}\sim\frac{3}{2}x^2$，…，$1-\sqrt[n]{\cos nx}\sim\frac{n}{2}x^2$，

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\frac{1-\sqrt{\cos2x}}{x^2}+\cos x\sqrt{\cos2x}\frac{1-\sqrt[3]{\cos3x}}{x^2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\cos x\sqrt{\cos2x}\cdots\sqrt[n-1]{\cos(n-1)x}\frac{1-\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{4}.$$

**71.【解】**$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}}\right]^{\frac{1}{x}\cdot\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}}$

$=e^{\frac{1}{n}\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x}}=e^{\frac{1}{n}\lim\limits_{x\to0}(a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n)}=e^{\frac{1}{n}(\ln a_1a_2\cdots a_n)}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

**72.【解】**$\cos(\sin x)=1-\frac{\sin^2x}{2!}+\frac{\sin^4x}{4!}+o(x^4)$，

$\sin^2x=\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]^2=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$，

$\sin^4x=\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]^4=x^4+o(x^4)$，

$\cos(\sin x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5x^4}{24}+o(x^4)$，

$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$，

则 $\cos(\sin x)-\cos x\sim\frac{1}{6}x^4$，故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\frac{1}{6}$.

**73.【解】** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(a^x-x\ln a)-\ln(b^x-x\ln b)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{(a^x-1)\ln a}{a^x-x\ln a}-\frac{(b^x-1)\ln b}{b^x-x\ln b}}{2x}$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{\ln a}{a^x-x\ln a}\cdot\frac{a^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\ln b}{b^x-x\ln b}\cdot\frac{b^x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\ln^2a-\ln^2b),$$

故原式 $=e^{\frac{1}{2}(\ln^2a-\ln^2b)}$.

**74.【解】** 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\ln(1+x^2)}{4x^3}=\frac{1}{2}$，得 $f(x)\sim\frac{1}{2}x^4$，

再由 $g(x)=x^a(e^{bx}-1)\sim bx^{a+1}$，得 $a=3,b=\frac{1}{2}$.

**75.【解】方法一** 由 $0=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}$

$$=6^3\lim_{x\to0}\frac{\sin6x-6x}{(6x)^3}+\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$$\overset{t=6x}{=}6^3\lim_{t\to0}\frac{\sin t-t}{t^3}+\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$$=6^3\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{3t^2}+\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$$=-36+\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2},$$

得 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$.

**方法二** 由 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ 得 $\sin6x=6x-\frac{(6x)^3}{3!}+o(x^3)=6x-36x^3+o(x^3)$，

于是由 $0=\lim\limits_{x\to0}\frac{-36x^3+6x+o(x^3)+xf(x)}{x^3}=-36+\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$，

得 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$.

**76.【解】** 因为 $x\to0$ 时，$\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]\sim\frac{f(x)}{\sin x}$，

所以 $A=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]}{\arctan^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\sin x\cdot\arctan^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}$，即 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=A$.

**77.【解】** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right]=\frac{1}{2}$.

**78.【解】** 因为 $x\to0^+$ 时，$1-\sqrt{\cos x}=\frac{1-\cos x}{1+\sqrt{\cos x}}\sim\frac{1}{4}x^2$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x$，

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=\dfrac{1}{2}$.

**注解**　该题考查等价无穷小求极限的方法，当 $x\to0$ 时常用的等价无穷小有：

(1) $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$；

(2) $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$1-\cos^a x\sim\dfrac{a}{2}x^2$；

(3) $(1+x)^a-1\sim ax$；

(4) $a^x-1\sim x\ln a$.

***79*.【解】** 因为 $x\to0$ 时，$g(x)=x-\sin x=x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\sim\dfrac{1}{6}x^3$，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\tan x}\arctan t^2\,dt}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\arctan(\tan^2x)\cdot\sec^2x}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

所以当 $x\to0$ 时，$f(x)=\int_0^{\tan x}\arctan t^2\,dt$ 与 $g(x)=x-\sin x$ 是同阶非等价的无穷小.

***80*.【解】** 由 $\lim\limits_{x\to0}[f(x)+\cos x]^{\frac{1}{x}}=e^3$，得 $f(0)=0$，

$$e^3=\lim_{x\to0}[f(x)+\cos x]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{[1+(f(x)+\cos x-1)]^{\frac{1}{f(x)+\cos x-1}}\right\}^{\frac{f(x)+\cos x-1}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+\cos x-1}{x}}=e^{f'(0)},$$

则 $f'(0)=3$.

***81*.【解】** 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，所以 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，又 $f(x)$ 二阶连续可导且 $f''(0)=4$，

所以 $f(x)=2x^2+o(x^2)(x\to0)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left\{\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{f(x)}}\right\}^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^2$.

***82*.【解】** $\lim\limits_{x\to1}\left(\tan\dfrac{\pi}{4}x\right)^{\tan\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\left\{\left[1+\left(\tan\dfrac{\pi}{4}x-1\right)\right]^{\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}x-1}}\right\}^{\tan\frac{\pi}{2}x\cdot(\tan\frac{\pi}{4}x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to1}\tan\frac{\pi}{2}x\cdot(\tan\frac{\pi}{4}x-1)}$，

由 $\lim\limits_{x\to1}\tan\dfrac{\pi}{2}x\cdot\left(\tan\dfrac{\pi}{4}x-1\right)=\lim\limits_{x\to1}\sin\dfrac{\pi}{2}x\cdot\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}x-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}x}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-1$ 得

$\lim\limits_{x\to1}\left(\tan\dfrac{\pi}{4}x\right)^{\tan\frac{\pi}{2}x}=e^{-1}$.

***83*.【解】** $\lim\limits_{x\to0}(\cos x^2)^{\frac{1}{x(\sin x-\tan x)}}=\lim\limits_{x\to0}\left\{[1+(\cos x^2-1)]^{\frac{1}{\cos x^2-1}}\right\}^{\frac{\cos x^2-1}{x(\sin x-\tan x)}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x^2-1}{x(\sin x-\tan x)}},$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x^2-1}{x(\sin x-\tan x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^4}{x(\sin x-\tan x)}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{\sin x-\tan x}$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x^2}{1-\frac{1}{\cos x}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\cos x\cdot\frac{x^2}{\cos x-1}=1$$

所以$\lim\limits_{x\to0}(\cos x^2)^{\frac{1}{x(\sin x-\tan x)}}=e$.

**84.【解】** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-x}{x(1-\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to0}(1+\sqrt{\cos x})\cdot\frac{\tan(\tan x)-x}{x(1-\cos x)}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-x}{x(1-\cos x)}$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-x}{\frac{1}{2}x^3}=4\lim_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-x}{x^3}$$

$$=4\lim_{x\to0}\left[\frac{\tan(\tan x)-\tan x}{x^3}+\frac{\tan x-x}{x^3}\right],$$

由$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-\tan x}{\tan^3 x}\overset{\tan x=t}{=}\lim\limits_{t\to0}\frac{\tan t-t}{t^3}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sec^2 t-1}{3t^2}=\frac{1}{3},$$

再由$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\frac{1}{3}$得$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\tan x)-x}{x(1-\sqrt{\cos x})}=\frac{8}{3}$.

**85.【解】** 因为 $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$, $e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)$,

所以 $\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$,

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

**86.【解】** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}}$,

而$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1,$$

故$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}$.

**87.【解】** $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^{\ln(1+x)}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)\ln\sin x}$,

而$\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)\ln\sin x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot x\ln\sin x=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln\sin x$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\sin x}\cdot\cos x = 0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^{\ln(1+x)} = 1$.

*88.*【解】$x\to0$ 时，由 $1-\cos ax \sim \frac{a^2}{2}x^2$ 得

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan ax - a\sin x}{x(1-\cos ax)} = \lim_{x\to0}\frac{2}{a^2}\,\frac{\tan ax - a\sin x}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{2}{a^2}\,\frac{\tan ax - \sin ax + (\sin ax - a\sin x)}{x^3}$$

$$= \frac{2}{a^2}\lim_{x\to0}\left[\frac{\tan ax - \sin ax}{x^3} + \frac{\sin ax - a\sin x}{x^3}\right],$$

而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax - \sin ax}{x^3} \overset{t=ax}{=} a^3\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\tan t - \sin t}{t^3} = a^3\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}\cdot\dfrac{\frac{1}{\cos t}-1}{t^2} = \dfrac{a^3}{2}$,

因为 $\sin ax = ax - \frac{a^3}{6}x^3 + o(x^3)$，　$a\sin x = a\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] = ax - \frac{a}{6}x^3 + o(x^3)$,

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax - a\sin x}{x^3} = \dfrac{a-a^3}{6}$,

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax - a\sin x}{x(1-\cos ax)} = \dfrac{2}{a^2}\left(\dfrac{a^3}{2} + \dfrac{a-a^3}{6}\right) = \dfrac{2a^2+1}{3a}$.

*89.*【解】由 $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ 得 $x\to0$ 时，$x^2(x-\arctan x) \sim \frac{x^5}{3}$,

则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x (e^t-1-t)^2\mathrm{d}t}{x^2(x-\arctan x)} = 3\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x (e^t-1-t)^2\mathrm{d}t}{x^5} = \dfrac{3}{5}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1-x)^2}{x^4}$

$$= \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)^2 = \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}\right)^2 = \frac{3}{20}.$$

*90.*【解】令 $f(x) = \ln(1+x)$，$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$，则

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) = f'(\xi)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n(n+1)}，其中\frac{1}{n+1} < \xi < \frac{1}{n},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{1+\xi} = 1$.

*91.*【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}}{b-\cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{b-\cos x}$,

显然 $b=1$，且 $\dfrac{2}{\sqrt{a}} = 2$，故 $a = 1$.

*92.*【解】$x\to0$ 时，$x-(a+b\cos x)\sin x = x - a\sin x - \frac{b}{2}\sin 2x$

$$= x - a\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right] - \frac{b}{2}\left[2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + o(x^5)\right]$$

$$= (1-a-b)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{2b}{3}\right)x^3 - \left(\frac{a}{120} + \frac{2b}{15}\right)x^5 + o(x^5),$$

则$\begin{cases} 1-a-b=0, \\ \dfrac{a}{6}+\dfrac{2b}{3}=0, \end{cases}$ 解得 $a=\dfrac{4}{3}, b=-\dfrac{1}{3}$.

**93.【解】** 由 $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$,

得 $e^x(1+bx+cx^2) = \left[1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right](1+bx+cx^2)$

$$= 1 + (b+1)x + \left(b + c + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{b}{2} + c + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3),$$

所以 $b+1=a, b+c+\dfrac{1}{2}=0, \dfrac{b}{2}+c+\dfrac{1}{6}=0$,即 $a=\dfrac{1}{3}, b=-\dfrac{2}{3}, c=\dfrac{1}{6}$.

**94.【解】** 由洛必达法则,

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x (e^{t^2}-1)\,dt} = \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2},$$

故 $a=1, c=\dfrac{1}{2}$.

**95.【解】** 由 $\ln(1-2x+3x^2) = (-2x+3x^2) - \dfrac{(-2x+3x^2)^2}{2} + o(x^2) = -2x + x^2 + o(x^2)$

得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a-2)x+(b+1)x^2}{x^2} = 2$,

则 $a=2, b+1=2$,即 $a=2, b=1$.

**96.【解】** $\lim\limits_{x\to 0}(x^{-3}\sin 3x + ax^{-2} + b) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x + ax + bx^3}{x^3}$,

由麦克劳林公式得 $\sin 3x = 3x - \dfrac{(3x)^3}{3!} + o(x^3) = 3x - \dfrac{9}{2}x^3 + o(x^3)$,

于是 $\sin 3x + ax + bx^3 = (3+a)x + \left(b - \dfrac{9}{2}\right)x^3 + o(x^3)$,

而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x + ax + bx^3}{x^3} = 0$,所以$\begin{cases} a=-3, \\ b=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

**97.【解】** 由 $\ln(1+2x) = 2x - \dfrac{(2x)^2}{2} + o(x^2) = 2x - 2x^2 + o(x^2)$,

$\dfrac{ax}{1+bx} = ax\cdot[1-bx+o(x)] = ax - abx^2 + o(x^2)$,

得 $\ln(1+2x) + \dfrac{ax}{1+bx} = (a+2)x - (ab+2)x^2 + o(x^2)$,

于是$\begin{cases} a+2=1, \\ ab+2=-1, \end{cases}$ 解得 $a=-1, b=3$.

98.【解】$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx, & |x|<1, \\ \dfrac{1}{x}, & |x|>1, \\ \dfrac{1}{2}(a-b-1), & x=-1, \\ \dfrac{1}{2}(a+b+1), & x=1, \end{cases}$ 因为 $f(x)$ 是连续函数,所以

$$f(-1-0)=-1=f(-1)=\frac{1}{2}(a-b-1)=f(-1+0)=a-b,$$

$$f(1-0)=a+b=f(1)=\frac{1}{2}(a+b+1)=f(1+0)=1,$$

解得 $a=0,b=1$.

99.【解】由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(ae^{-x}+x^2+\sin x)}{\sqrt{bx^2+x\cos x-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left[e^{-x}\left(a+\dfrac{x^2+\sin x}{e^{-x}}\right)\right]}{\sqrt{bx^2+x\cos x-1}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+\ln\left(a+\dfrac{x^2+\sin x}{e^{-x}}\right)}{\sqrt{bx^2+x\cos x-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\dfrac{1}{x}\ln\left(a+\dfrac{x^2+\sin x}{e^{-x}}\right)}{-\sqrt{b+\dfrac{1}{x}\cos x-\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{b}}=2,$$

得 $b=\dfrac{1}{4}$.

100.【证明】显然$\{a_n\}$单调增加,现证明:$a_n\leqslant 3$,

当 $n=1$ 时,$a_1=\sqrt{6}\leqslant 3$,

设 $n=k$ 时,$a_k\leqslant 3$,

当 $n=k+1$ 时,$a_{k+1}=\sqrt{6+a_k}\leqslant\sqrt{6+3}=3$,

由归纳法原理,对一切的自然数 $n$,有 $a_n\leqslant 3$,所以$\{a_n\}$收敛.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,对 $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$ 两边取极限,得 $A=\sqrt{6+A}$,解得 $A=3$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$.

101.【证明】先证明$\{a_n\}$单调减少.

$a_2=0,a_2<a_1$;

设 $a_{k+1}<a_k,a_{k+2}=-\sqrt{1-a_{k+1}}$,由 $a_{k+1}<a_k$ 得 $1-a_{k+1}>1-a_k$,

从而 $-\sqrt{1-a_{k+1}}<-\sqrt{1-a_k}$,即 $a_{k+2}<a_{k+1}$,由归纳法得数列$\{a_n\}$单调减少.

现证明 $a_n\geqslant-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$a_1=1\geqslant-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,设 $a_k\geqslant-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,则 $1-a_k\leqslant 1+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$,

$\sqrt{1-a_k}\leqslant\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,从而 $-\sqrt{1-a_k}\geqslant-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,即 $a_{k+1}\geqslant-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,由归纳法,对一切 $n$,

有 $a_n\geqslant-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

由极限存在准则,数列$\{a_n\}$收敛,设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,对$a_{n+1}+\sqrt{1-a_n}=0$两边求极限得

$A+\sqrt{1-A}=0$,解得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

***102.*****【证明】**先证明$a_n\geqslant 2$,

$a_1=4\geqslant 2$,

设$a_k\geqslant 2$,

则$a_{k+1}=\sqrt{a_k+2}\geqslant\sqrt{2+2}=2$,

由数学归纳法,对任意的自然数$n$有$a_n\geqslant 2$;

由$a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n+2}-a_n=\dfrac{a_n+2-a_n^2}{\sqrt{a_n+2}+a_n}=\dfrac{(1+a_n)(2-a_n)}{\sqrt{a_n+2}+a_n}\leqslant 0$得

数列$\{a_n\}$单调递减,即数列$\{a_n\}$单调递减有下界,故极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,对$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$两边取极限得$A=\sqrt{A+2}$,解得$A=-1$(舍去),$A=2$.

***103.***(1)**【证明】**先证明有界性

由$a_1>0$得$a_2=1-e^{-a_1}>0$,

设$a_k>0$,则$a_{k-1}=1-e^{-a_k}>0$,由归纳法,对一切的$n$有$a_n>0$;

再证明$\{a_n\}$单调

**方法一**

$$a_{n+1}=1-e^{-a_n}=e^0-e^{-a_n}=e^{\xi}\cdot a_n(-a_n<\xi<0),$$

由$\xi<0$得$e^{\xi}<1$,于是$a_{n+1}<a_n$,即$\{a_n\}$单调递减,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

**方法二**

$$a_{n+1}-a_n=1-e^{-a_n}-a_n,$$

令$f(x)=1-e^{-x}-x$,$f(0)=0$,

由$f'(x)=e^{-x}-1<0(x>0)$得$f(x)<0(x>0)$,于是$a_{n+1}-a_n<0$,即$\{a_n\}$单调递减,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,由$a_{n+1}=1-e^{-a_n}$得$A=1-e^{-A}$,解得$A=0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(2)**【解】**$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{-a_n}-a_n}{a_n^2}\xlongequal{a_n=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-e^{-t}-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{-t}-1}{2t}=-\dfrac{1}{2}$.

***104.*****【解】**当$0\leqslant x\leqslant 1$时,$0\leqslant\dfrac{\ln^n(1+x)}{1+x^2}\leqslant\ln^n(1+x)\leqslant x^n$,

积分得$0\leqslant\int_0^1\dfrac{\ln^n(1+x)}{1+x^2}dx\leqslant\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$,

由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{\ln^n(1+x)}{1+x^2}dx=0$.

***105.*****【解】**$x=0$及$x=1$为$f(x)$的间断点.

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点；

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x}{1-x}\sin x=\sin1\cdot\lim_{x\to1^-}\frac{\ln[1+(x-1)]}{1-x}=-\sin1,\text{即 }f(1-0)=-\sin1,$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}\sin x=\sin1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=\sin1,\text{即 }f(1+0)=\sin1,$$

因为 $f(1-0)\neq f(1+0)$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

**106.【解】** 当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\ln\left(1+\frac{x^n}{\mathrm{e}^n}\right)}{n}=1$，

当 $x=\mathrm{e}$ 时，$f(\mathrm{e})=1$，

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\ln x+\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}^n}{x^n}\right)}{n}=\ln x$，

故 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant\mathrm{e},\\ \ln x, & x>\mathrm{e},\end{cases}$ 因为 $f(\mathrm{e}-0)=f(\mathrm{e})=f(\mathrm{e}+0)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x>0$ 内处处连续.

**107.【解】** 因为 $f(x)$ 为初等函数，所以 $f(x)$ 的间断点为 $x=0$ 和 $x=1$.

因为 $x\to0$ 时，$1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\sim-\dfrac{x}{1-x}\sim-x$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$，即 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点；

因为 $f(1-0)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=0$，$f(1+0)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=1$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点.

**108.【解】** 显然 $x=0$、$x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点.

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{1+\mathrm{e}^{-2}},\quad f(0+0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{1+\mathrm{e}^{-2}},$$

因为 $f(0-0)\neq f(0+0)$，所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

$$f(1-0)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{\pi}{4},\quad f(1+0)=\lim_{x\to1^+}f(x)=\frac{\pi}{4}\lim_{x\to1^+}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x-1}}-1}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x-1}}+\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}=0,$$

因为 $f(1-0)\neq f(1+0)$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

**109.【解】** $x=-1$、$x=0$、$x=1$、$x=2$ 为 $f(x)$ 的间断点，

由 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}-\dfrac{(x^2+1)}{(x^2-1)\arctan x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}}=\infty$ 得 $x=-1$ 为第二类间断点，

由 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\arctan x}\cdot\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}}=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 得 $x=0$ 为可去间断点，

由 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$ 得 $x=1$ 为第二类间断点，

由 $f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$ 得 $x=2$ 为第二类间断点.

# 二、导数与微分

## Ⅰ 入门练习

### ◇ 填空题

**1.【解】**(1) 由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$ 得 $f(1)=0,f'(1)=3$,则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[2\cdot\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right]$$
$$=2f'(1)+f'(1)=3f'(1)=9.$$

(2) 由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x^2-1}=-1$ 得 $f(1)=1$,

再由 $-1=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{1}{2}f'(1)$ 得 $f'(1)=-2$,

则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\cosh)-1}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f[1+(\cosh-1)]-f(1)}{h^2}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f[1+(\cosh-1)]-f(1)}{\cosh-1}\cdot\frac{\cosh-1}{h^2}=-\frac{1}{2}f'(1)=1.$$

**2.【解】**(1) $y'=2\sin\dfrac{1+x}{1-x}\cdot\cos\dfrac{1+x}{1-x}\cdot\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=\sin 2\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\cdot\dfrac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$

$$=\frac{2}{(1-x)^2}\sin 2\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

(2) $y'=e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\dfrac{1}{x}$.

(3) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot(-1)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

(4) $y'=2\arctan\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}$.

**3.【解】**(1) $y'=\dfrac{2\ln(1+x)}{1+x}+\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=\dfrac{2\ln(1+x)}{1+x}+\dfrac{1}{1+x^2}$.

(2) $y'=2x2^x+x^2 2^x\ln 2$.

(3) $y'=\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)-2x\arctan x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-2x\arctan x}{(1+x^2)^2}$.

**4.【解】**(1) 由 $y=a^{x^a}=e^{x^a\ln a}$ 得

$$y' = e^{x^a \ln a} \cdot a x^{a-1} \ln a = a x^{a-1} \cdot a^{x^a} \ln a.$$

(2) 由 $y = e^{\sin x \ln(1+x^2)}$ 得

$y' = e^{\sin x \ln(1+x^2)} \cdot \left[\cos x \cdot \ln(1+x^2) + \frac{2x\sin x}{1+x^2}\right] = (1+x^2)^{\sin x}\left[\cos x \cdot \ln(1+x^2) + \frac{2x\sin x}{1+x^2}\right].$

**5.【解】** 由 $f(x) = \lim\limits_{t\to 0} x^2(1+t^2)^{\frac{x}{\sin t^2}} = x^2 \lim\limits_{t\to 0}[(1+t^2)^{\frac{1}{t^2}}]^{\frac{xt^2}{\sin t^2}} = x^2 e^x$ 得

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x.$$

**6.【解】**(1) 当 $x=0$ 时，$y=0$，

$e^{x+y} = xy+1$ 两边同时对 $x$ 求导得 $e^{x+y}\cdot(1+y') = y + xy'$，

将 $x=0, y=0$ 代入得 $y'(0) = -1$.

(2) 当 $x=0$ 时，$y=1$，

$\sin xy + y - 3x = 1$ 两边同时对 $x$ 求导得 $\cos xy \cdot (y+xy') + y' - 3 = 0$，

将 $x=0, y=1$ 代入得 $y'(0)=2$.

**7.【解】**(1) 当 $x=0$ 时，$y=1$，

$e^{xy} = \sin 2x + y^3$ 两边对 $x$ 求导得

$$e^{xy}\cdot\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 2\cos 2x + 3y^2\frac{dy}{dx},$$

将 $x=0, y=1$ 代入得 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{1}{3}$.

(2) $e^{xy} = x^2 + y^2 + 1$ 两边同时对 $x$ 求导得

$$e^{xy}\cdot\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 2x + 2y\frac{dy}{dx},$$

解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - ye^{xy}}{xe^{xy} - 2y}$.

**8.【解】**(1) 由 $y = \frac{1}{2x+1} = (2x+1)^{-1}$ 得

$y' = (-1)(2x+1)^{-2}\cdot 2$，$y'' = (-1)(-2)(2x+1)^{-3}\cdot 2^2$，由归纳法得

$$y^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!\ 2^n}{(2x+1)^{n+1}}.$$

(2) 由 $y = \ln(1-x-2x^2) = \ln[(1+x)(1-2x)] = \ln(1+x) + \ln(1-2x)$ 得

$$y' = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x-1},$$

由归纳法得

$$y^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n} + \frac{2\cdot(-1)^{n-1}(n-1)!\ 2^{n-1}}{(2x-1)^n}$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n} + \frac{2^n\cdot(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2x-1)^n}.$$

**9.【解】** 由 $\Delta y = \frac{\Delta x}{1+x^2} + o(\Delta x)$ 得 $y = y(x)$ 可微且 $y'(x) = \frac{1}{1+x^2}$，

从而 $y(x) = \arctan x + C$，

再由 $y(0) = 4$ 得 $C=4$，故 $y(x) = \arctan x + 4$.

*10*.【解】(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(2t)}{dx}=\frac{d(2t)/dt}{dx/dt}=\frac{2}{\frac{1}{1+t^2}}=2(1+t^2)$.

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{2\cos 2t}{2t}=\frac{\cos 2t}{t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{\cos 2t}{t}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{\cos 2t}{t}\right)\Big/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{-2t\sin 2t-\cos 2t}{t^2}}{2t}=\frac{-2t\sin 2t-\cos 2t}{2t^3}.$$

## ◇ 解答题

*11*.【解】$\frac{dy}{dx}=e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{2\sec^2 2x}{\tan 2x+1}=-\frac{1}{x^2}e^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{2}{x}+\frac{2\sec^2 2x}{\tan 2x+1}$.

*12*.【解】当 $x=0$ 时，$y=1$，

$2^{xy}+\ln(1+x^2)=y$ 两边同时对 $x$ 求导得

$$2^{xy}\cdot\ln 2\cdot(y+xy')+\frac{2x}{1+x^2}=y',$$

解得 $y'(0)=\ln 2$，故 $dy\,|_{x=0}=\ln 2dx$.

*13*.【解】当 $x=0$ 时，$y=1$，

$e^{x+y}-\sin xy=e$ 两边同时对 $x$ 求导得

$$e^{x+y}\cdot(1+y')-\cos xy\cdot(y+xy')=0\text{，代入得 } y'(0)=\frac{1}{e}-1,$$

故所求的切线方程为

$$y-1=\left(\frac{1}{e}-1\right)(x-0)\text{，即 } y=\left(\frac{1}{e}-1\right)x+1.$$

*14*.【解】由 $f(0-0)=f(0)=f(0+0)=0$ 得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

当 $x<0$ 时，$f'(x)=2\cos 2x$；

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\frac{2}{1+2x}$；

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{x}=2,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+2x)}{x}=2,$$

由 $f'_-(0)=f'_+(0)=2$ 得 $f'(0)=2$，故

$$f'(x)=\begin{cases}2\cos 2x, & x<0,\\ \frac{2}{1+2x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

*15*.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$，

由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1$ 得 $f'_-(0)=1$；由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$ 得 $f'_+(0)=0$，

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

16.【解】$f(0-0)=b$，$f(0)=f(0+0)=1$，

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续得 $b=1$；

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2x+1-1}{x}=2,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+ax)+1-1}{x}=a,$$

由 $f'_-(0)=f'_+(0)$ 得 $a=2$，即 $a=2,b=1$.

17.【解】$y=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$，则

$$y^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

## Ⅱ 基础练习

### ◇ 填空题

1.【解】(1)$y'=2\ln(x+\sqrt{x^2+1})\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

(2)$y'=2\arcsin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$.

2.【解】(1)$e^{xy}=x^2+y+1$ 两边同时对 $x$ 求导得

$$e^{xy}\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=2x+\frac{dy}{dx}，解得\frac{dy}{dx}=\frac{2x-ye^{xy}}{xe^{xy}-1}.$$

(2) 当 $x=0$ 时，由 $y+\ln y=1$ 得 $y=1$，

$\sqrt{x^2+y^2}+\ln y=1+2xy$ 两边同时对 $x$ 求导得

$$\frac{x+y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2y+2x\frac{dy}{dx}，代入得\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1.$$

3.【解】由 $y=x^{\sin2x}$ 得 $y=e^{\sin2x\ln x}$，则

$$y'=e^{\sin2x\ln x}\cdot\left(2\cos2x\ln x+\frac{1}{x}\sin2x\right)=\left(2\cos2x\ln x+\frac{1}{x}\sin2x\right)x^{\sin2x},$$

故 $dy=\left(2\cos2x\ln x+\frac{1}{x}\sin2x\right)x^{\sin2x}dx$.

4.【解】$\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 两边同时对 $x$ 求导得

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}，解得\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

5.【解】当 $x=0$ 时,由 $e^{x+y}+\cos(xy)=\sin 3x+2$ 得 $y=0$;

$e^{x+y}+\cos(xy)=\sin 3x+2$ 两边同时对 $x$ 求导得

$e^{x+y}\cdot\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)-\sin(xy)\cdot\left(y+x\dfrac{dy}{dx}\right)=3\cos 3x$,代入得 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=2$.

6.【解】由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=1$ 得 $f(1)=2,f'(1)=1$,则

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(-1+2h)}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+2\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\\&=3f'(1)=3.\end{aligned}$$

7.【解】由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-1}{x-a}=2$ 得 $f(a)=1,f'(a)=2$,于是

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h}&=\lim_{h\to0}[f(a+2h)+f(a-h)]\cdot\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}\\&=2f(a)\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-h)}{h}\\&=2\lim_{h\to0}\left[2\cdot\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right]\\&=6f'(a)=12.\end{aligned}$$

8.【解】方法一

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}(x-1)(x+2)\cdots(x-99)(x+100)=100!.$$

方法二

由 $f'(x)=(x-1)(x+2)\cdots(x-99)(x+100)+x(x+2)\cdots(x+100)+\cdots+x(x-1)(x+2)\cdots(x-99)$ 得 $f'(0)=100!$.

9.【解】因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f'(x)$ 为偶函数,即 $f'(-1)=2$,故

$$\left.\frac{d}{dx}f(x^3)\right|_{x=-1}=\left.3x^2f'(x^3)\right|_{x=-1}=3f'(-1)=6.$$

10.【解】由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+2}{x-1}=3$ 得 $f(1)=-2,f'(1)=3$;

$$f(-3)=f(-4+1)=f(1)=-2,f'(-3)=f'(1)=3,$$

故所求的切线方程为

$$y+2=3(x+3),\text{即 } y=3x+7.$$

11.【解】$f(0+0)=a,f(0)=f(0-0)=1$,

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $a=1$;

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+2x)}{x}=2;$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{bx}-1}{x}=b,$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,所以 $b=2$.

12.【解】(1) $\int_0^x f(2x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{2x-t=u} \int_{2x}^x f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u$,

再由 $x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2(x\to 0)$ 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(2x-t)\mathrm{d}t}{x-\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(2x)-f(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[4\frac{f(2x)-f(0)}{2x}-\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]$$

$$=4f'(0)-f'(0)=3f'(0)=3\pi.$$

(2) $\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2)$

$$\xlongequal{x^2-t^2=u}-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u,$$

则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=xf(x^2)$.

13.【解】由 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}f'(0)=2.$$

14.【解】$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xf'(x^2)$, $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-1}=-2f'(1)$,

$\Delta y$ 的线性部分即函数 $y=f(x^2)$ 在点 $x_0=-1$ 处的微分,即

$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-1}\Delta x=0.15$,或 $-2f'(1)\times 0.05=0.15$,解得 $f'(1)=-\frac{3}{2}$.

15.【解】令 $f(x)=\frac{7x-2}{2x^2+x-1}=\frac{7x-2}{(2x-1)(x+1)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+1}$,

由 $A(x+1)+B(2x-1)=7x-2$ 得 $A=1,B=3$,从而有

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!\ 2^n}{(2x-1)^{n+1}}+\frac{3(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

故 $f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n n!\ 2^n}{(-1)^{n+1}}+3(-1)^n n!\ =-n!\ 2^n+3(-1)^n n!$.

16.【解】(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{2\cos 2t}{2t}=\frac{\cos 2t}{t}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\cos 2t}{t}\right)\Big/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\frac{-2t\sin 2t-\cos 2t}{t^2}}{2t}=-\frac{2t\sin 2t+\cos 2t}{2t^3}.$$

(2) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+t}$,

$e^{yt}=y+2t+1$ 两边同时对 $t$ 求导得

$$e^{yt}\cdot\left(y+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2,\text{解得}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{2-ye^{yt}}{te^{yt}-1},$$

故$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{(t+1)(2-ye^{yt})}{te^{yt}-1}$.

## ◆ 选择题

*17*.【解】$F(0)=f(0)$,

$F'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)+f(x)|\sin x|}{x}=f'(0)-f(0)$;

$F'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)+f(x)|\sin x|}{x}=f'(0)+f(0)$,

因为 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导,所以 $F'_-(0)=F'_+(0)$,

于是 $f(0)=0$,故应选(A).

*18*.【解】$F'(x)=f(\ln x)\cdot(\ln x)'-f\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x}f(\ln x)+\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,应选(A).

*19*.【解】设 $g(1)=0$,$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{x-1}\cdot(x^2+x+1)g(x)=0$,

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+x+1)g(x)=0$,

因为 $f'_-(1)=f'_+(1)=0$,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{x-1}\cdot(x^2+x+1)g(x)=-3g(1)$,

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+x+1)g(x)=3g(1)$,

因为 $f'_-(1)=f'_+(1)=0$,所以 $g(1)=0$,

故 $g(1)=0$ 为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的充分必要条件,应选(C).

*20*.【解】因为 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=0$,$f(0)=f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0}x^2g(x)=0$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=0$,即 $f'_+(0)=0$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}xg(x)=0$,即 $f'_-(0)=0$,

因为 $f'_+(0)=f'_-(0)=0$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,应选(D).

*21*.【解】显然 $f(0)=0$,且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又由 $|f(x)|\leqslant x^2$ 得 $0\leqslant\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right|\leqslant|x|$,根据夹逼定理得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$,即 $f'(0)=0$,选(C).

*22*.【解】当 $x=0$ 时,由 $-\int_1^y e^{-t^2}dt=0$ 得 $y=1$,

$x-\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=0$ 两边对 $x$ 求导得 $1-e^{-(x+y)^2}\cdot\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)=0$,

解得 $\frac{dy}{dx}=e^{(x+y)^2}-1$，且 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=e-1$，

由 $\frac{d^2y}{dx^2}=e^{(x+y)^2}\cdot 2(x+y)\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$ 得 $y''(0)=\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=2e^2$，应选(A).

**23.【解】** 取 $f(x)=\sqrt{x}$，显然 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty$，(A) 不对；

取 $f(x)=\cos x$，显然 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(-\sin x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1\neq0$，(B) 不对；

取 $f(x)=x$，显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=1$，(C) 不对，应选(D).

事实上，取 $\varepsilon=\frac{A}{2}>0$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$，所以存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，

$|f'(x)-A|<\frac{A}{2}$，从而 $f'(x)>\frac{A}{2}$.

当 $x>X$ 时，$f(x)-f(X)=f'(\xi)(x-X)>\frac{A}{2}(x-X)(X<\xi<x)$，

从而 $f(x)>f(X)+\frac{A}{2}(x-X)$，两边取极限得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，应选(D).

**24.【解】** 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

由 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x^2\sin\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}x=0$，得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$；

当 $x>0$ 时，$f'(x)=3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=2x$，

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=f'(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数连续，选(D).

**25.【解】** 因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)=3=f(1)$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

因为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x+1-3}{x-1}=3$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

当 $x\neq1$ 时，$f'(x)=2x+1$，因为 $\lim\limits_{x\to1}f'(x)=3=f'(1)$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续可导，选(D).

**26.【解】** 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f'(x)$ 为偶函数，故在 $(-\infty,0)$ 内有 $f'(x)>0$. 因为 $f''(x)$ 为奇函数，所以在 $(-\infty,0)$ 内 $f''(x)<0$，选(C).

## ◇ 解答题

**27.【解】** 因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}=f(0)$，

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{2}}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2(e^x-1)-2x-x(e^x-1)}{x^2(e^x-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-x-xe^x}{x^3}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-xe^x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x}{x}=-\frac{1}{12},$$

则 $f'(0)=-\frac{1}{12}$,即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

**28.【解】**$f(0)=f(0-0)=0$, $f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=0$,

由 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$ 得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

由 $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2 x}{x}=0$ 得 $f'_-(0)=0$,

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\cdot\tan x}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=0$ 得 $f'_+(0)=0$,

因为 $f'_-(0)=f'_+(0)=0$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

**29.【解】**(1) $y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,

$$y''=-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

(2)$y'=\frac{1}{\tan\sqrt{x^2+1}}\cdot\sec^2\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sin(2\sqrt{x^2+1})}$.

**30.【解】**$y'=f'\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)\cdot\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}\ln\frac{2x-1}{x+1}$.

**31.【解】**(1)$x=0$ 代入 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 得 $y=1$,

$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 两边关于 $x$ 求导得 $\cos(xy)\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\frac{dy}{dx}-1}{y-x}=1$,

将 $x=0,y=1$ 代入上式得$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1$.

(2) 当 $x=0$ 时,$y=1$.

$2^{xy}=x+y$ 两边关于 $x$ 求导得 $2^{xy}\ln 2\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=1+\frac{dy}{dx}$,

将 $x=0,y=1$ 代入得$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\ln 2-1$,故 $dy\,|_{x=0}=(\ln 2-1)dx$.

(3)$x=0$ 时,$y=0$.

$e^{-y}+x(y-x)=1+x$ 两边关于 $x$ 求导得$-e^{-y}y'+y-x+x(y'-1)=1$,则 $y'(0)=-1$;

$-e^{-y}y'+y-x+x(y'-1)=1$ 两边关于 $x$ 求导得 $e^{-y}(y')^2-e^{-y}y''+2(y'-1)+xy''=0$,

代入得 $y''(0)=-3$.

(4)$x=0$ 时,$y=1$.

$x-\int_1^{x+y} e^{-t^2}dt=0$ 两边关于 $x$ 求导得 $1-e^{-(x+y)^2}\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=0$,代入得$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=e-1$.

(5) 由 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}x(1+tx)^{\frac{1}{t}}=x\lim\limits_{t\to0}[(1+tx)^{\frac{1}{tx}}]^x=xe^x$ 得 $f'(x)=(x+1)e^x$,

从而 $f'(1)=2e$,故 $df(x)\mid_{x=1}=2edx$.

32.【解】由$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3e^{3t}f'(e^{3t}-1)}{f'(t)}$ 得$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{3f'(0)}{f'(0)}=3$.

33.【解】由$\frac{dy}{dx}=\frac{(-3^{-x})\ln3}{2+3^{-x}}$ 得$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{\ln3}{3}$,

故 $dy\mid_{x=0}=-\frac{1}{3}\ln3dx$.

34.【解】令 $f(x)=\frac{4x-3}{2x^2-3x-2}=\frac{4x-3}{(x-2)(2x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{2x+1}$,

由 $A(2x+1)+B(x-2)=4x-3$ 得$\begin{cases}2A+B=4,\\A-2B=-3,\end{cases}$解得 $A=1,B=2$,

即 $f(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{2x+1}$,故 $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!\ 2^{n+1}}{(2x+1)^{n+1}}$.

35.【解】$y^{(n)}=C_n^0x^2(\ln x)^{(n)}+C_n^1 2x\cdot(\ln x)^{(n-1)}+C_n^2 2\cdot(\ln x)^{(n-2)}$,

由$(\ln x)^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ 得

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n-2}}+\frac{2n(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-2}}+n(n-1)\cdot\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}$$

$$=\frac{2(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}(n\geqslant3).$$

36.【解】由$\int_0^{x^2}xf(x-t)dt=x\int_0^{x^2}f(x-t)dt\overset{x-t=u}{=}x\int_x^{x-x^2}f(u)(-du)=x\int_{x-x^2}^x f(u)du$ 得

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}xf(x-t)dt=\int_{x-x^2}^x f(u)du+x[f(x)-(1-2x)f(x-x^2)].$$

37.【解】$f(0-0)=1,f(0)=f(0+0)=c$,由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续得 $c=1$;

$$f'(x)=\begin{cases}2e^{2x}, & x<0,\\2ax+b, & x\geqslant0,\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=2,\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=b,f'(0)=b$,由 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续得 $b=2$,即

$$f'(x)=\begin{cases}2e^{2x}, & x<0,\\2ax+2, & x\geqslant0;\end{cases}$$

$$f''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{2e^{2x}-2}{x}=4,$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{2ax+2-2}{x}=2a,$$

由 $f''(0)$ 存在得 $a=2$.

38.【解】当 $x=y=0$ 时,$f(0)=2f(0)$,于是 $f(0)=0$.

对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(h)-f(0)}{h}+2x\right]=2x+f'(0)=2x+1,$$

则 $f(x)=x^2+x+C$,因为 $f(0)=0$,所以 $C=0$,故 $f(x)=x+x^2$.

39.【解】因为 $0\leqslant|f(x)|=|x|\cdot\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\leqslant|x|$,得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$,得 $f'_-(0)=1$,

再由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$,得 $f'_+(0)=0$,

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

40.【证明】$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\frac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}\right]=f''(a).$$

41.【解】$\int_{-a}^{a}f(x+a)\mathrm{d}x-\int_{-a}^{a}f(x-a)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}f(x+a)\mathrm{d}(x+a)-\int_{-a}^{a}f(x-a)\mathrm{d}(x-a)$

$$=\int_0^{2a}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-2a}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{2a}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{-2a}f(x)\mathrm{d}x,$$

又由 $\ln(1+a)=a-\dfrac{a^2}{2}+o(a^2)$,得 $a\to 0$ 时,$a-\ln(1+a)\sim\dfrac{a^2}{2}$,于是

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a-\ln(1+a)}\left[\int_{-a}^{a}f(x+a)\mathrm{d}x-\int_{-a}^{a}f(x-a)\mathrm{d}x\right]=2\lim_{a\to 0}\frac{\int_0^{2a}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{-2a}f(x)\mathrm{d}x}{a^2}$$
$$=\lim_{a\to 0}\frac{2f(2a)-2f(-2a)}{a}=4\lim_{a\to 0}\left[\frac{f(2a)-f(0)}{2a}+\frac{f(-2a)-f(0)}{-2a}\right]=8f'(0)=8.$$

42.【解】方程 $\int_0^{x^2}te^t\mathrm{d}t+\int_0^{\ln y}e^t\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t=e^{x^2}$ 两边对 $x$ 求导得

$2x\cdot x^2e^{x^2}+y\sqrt{1+\ln^2y}\ \dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xe^{x^2}$,则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x(1-x^2)e^{x^2}}{\sqrt{1+\ln^2y}}$.

43.【解】$g(x)=-x^2\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}(x-t)\overset{u=x-t}{=}-x^2\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u=x^2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,

$g'(x)=2x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+x^2f(x)$.

44.【证明】$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}$ 两边关于 $x$ 求导得 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$,解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$,

切线方程为 $Y-y=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}(X-x)$,

令 $Y=0$ 得 $X=x+\sqrt{xy}$；令 $X=0$ 得 $Y=y+\sqrt{xy}$，

则 $X+Y=x+2\sqrt{xy}+y=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=2.$

**45.【解】**$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-1}{h}$，

由 $f(0)=f^2(0)$，得 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$，

若 $f(0)=0$，则对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)=f(x)f(0)=0$，

则 $f'(x)\equiv 0$，与 $f'(0)=1$ 矛盾，从而 $f(0)=1$，

于是 $f'(x)=f(x)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-1}{h}=f(x)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=f(x)f'(0)=f(x)$，

即 $f'(x)-f(x)=0$，解得 $f(x)=Ce^{-\int -dx}=Ce^x$，由 $f(0)=1$ 得 $C=1$，故 $f(x)=e^x$.

**46.【证明】**(1) 对任意的 $x_0\in[a,b]$，由已知条件得

$$0\leqslant|f(x)-f(x_0)|\leqslant M|x-x_0|^k,\quad \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

再由 $x_0$ 的任意性得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(2) 对任意的 $x_0\in[a,b]$，因为 $k>1$，所以 $0\leqslant\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant M|x-x_0|^{k-1}$，

由夹逼定理得 $f'(x_0)=0$，因为 $x_0$ 是任意一点，所以 $f'(x)\equiv 0$，故 $f(x)\equiv$ 常数.

**47.【解】**由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，得 $b=0$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+ax)}{x}=a,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+2x}{x}=2,$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，得 $a=2$，

所以 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\leqslant 0,\\ \ln(1+2x), & x>0,\end{cases}$ 则 $f'(x)=\begin{cases}2x+2, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{1+2x}, & x>0.\end{cases}$

**48.【解】**当 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{2}f(x+1)=\dfrac{1}{2}(x+1)(x^2+2x)$，

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}(x+1)(x^2+2x)}{x}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-1)}{x}=-1,$$

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

**49.【解】**$\displaystyle\int_0^x\cos(x-t)^2dt\overset{x-t=u}{=}\int_x^0\cos u^2(-du)=\int_0^x\cos t^2dt$，

等式 $\displaystyle\int_1^{y-x^2}e^{t^2}dt=\int_0^x\cos t^2dt$ 两边对 $x$ 求导，得 $e^{(y-x^2)^2}\cdot\left(\dfrac{dy}{dx}-2x\right)=\cos x^2$，

于是 $\dfrac{dy}{dx}=2x+e^{-(y-x^2)^2}\cos x^2$.

**50.【解】**(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=g(0)$，所以 $g(x)$ 在 $x=0$

处连续.

当 $x\neq 0$ 时,$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$;

当 $x=0$ 时,由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f'(0)x}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

得 $g'(0)=\dfrac{1}{2}f''(0)$,即 $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0.\end{cases}$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf'(x)-f'(0)x}{x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f'(0)x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)=g'(0),$$

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

**51.【解】**因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,从而有

$f(0+0)=2a=f(0)=f(0-0)=3b$,

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+3x)+2a(e^x-1)}{x}=3+2a$,

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{5\arctan\dfrac{2x}{1-x}+3b(x+1)^2-3b}{x}=10+6b$,

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则 $3+2a=10+6b$,解得 $a=-\dfrac{7}{2}$,$b=-\dfrac{7}{3}$.

# 三、中值定理与一元函数微分学的应用

## Ⅰ 入门练习

**1.【解】**$f(x)\in C[1,2]$,$f(x)$ 在$(1,2)$内可导,且 $f(1)=f(2)=2$,

显然 $f(x)$ 在$[1,2]$上满足罗尔定理的条件,则存在 $\xi\in(1,2)$,使得 $f'(\xi)=0$,

而 $f'(x)=2x-3$,令 $f'(\xi)=0$ 得 $\xi=\dfrac{3}{2}$.

**2.【解】**$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$,由 $f(x)=f'(\theta x)x$ 得

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\theta x},$$

解得 $\theta=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}$,

故 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}.$$

**3.【解】** 由 $f(x)-f(0)=f'(\theta x)x$ 得

$$e^x-1=e^{\theta x}x,解得\ \theta=\frac{\ln\dfrac{e^x-1}{x}}{x},$$

则 $\lim\limits_{x\to0}\theta=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\dfrac{e^x-1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{e^x-1-x}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}.$

**4.【解】** 令 $f(x)=\sin x$，$f'(x)=\cos x$，则

$$\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n+1}=f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)=f'(\xi)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n(n+1)}\cos\xi,$$

其中 $\dfrac{1}{n+1}<\xi<\dfrac{1}{n}$，

则
$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cos\xi=1.$$

**5.【解】** 令 $f'(x)=(1-2x)e^{-2x}=0$ 得 $x=\dfrac{1}{2}$，

当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$，

则 $x=\dfrac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 的最大值点，最大值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}e^{-1}=\dfrac{1}{2e}$.

**6.【解】** $y'=-2xe^{-x^2}$，$y''=(4x^2-2)e^{-x^2}$，

令 $y''=(4x^2-2)e^{-x^2}=0$ 得 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

当 $x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y''>0$；当 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y''<0$；当 $x>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$y''>0$，

故 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 与 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 皆为曲线 $y=e^{-x^2}$ 的拐点，

曲线 $y=e^{-x^2}$ 的凸区间为 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

**7.【解】** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\cos t\,dt+\cos x-1}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{4x^3}$，

由 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$，$x\cos x=x-\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)$，

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ 得

$$x\cos x-\sin x=-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\sim-\frac{x^3}{3},$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\cos t\,dt+\cos x-1}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

8.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-1+\frac{x^2}{2}}{x^2\arctan^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$,

由 $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$ 得 $e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)$,

从而有 $e^{-\frac{x^2}{2}}-1+\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x^4}{8}+o(x^4)\sim\dfrac{x^4}{8}$,

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-1+\frac{x^2}{2}}{x^2\arctan^2 x}=\frac{1}{8}.$$

9.【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x^2+1}{x^3+x^2}=2$,

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-2x]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3-4x^2+1}{x^2+x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-6x^2+1}{x^2+x}=-6$,

故所求曲线的斜渐近线为

$$y=2x-6.$$

10.【解】曲线 $L$ 的参数方程为

$$L:\begin{cases}x=e^{2\theta}\cos\theta,\\ y=e^{2\theta}\sin\theta,\end{cases}$$

$\dfrac{dx}{d\theta}=2e^{2\theta}\cos\theta-e^{2\theta}\sin\theta,\dfrac{dy}{d\theta}=2e^{2\theta}\sin\theta+e^{2\theta}\cos\theta$,则

$$\begin{aligned}ds&=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\\&=\sqrt{(2e^{2\theta}\cos\theta-e^{2\theta}\sin\theta)^2+(2e^{2\theta}\sin\theta+e^{2\theta}\cos\theta)^2}\,d\theta\\&=e^{2\theta}\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta+4\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta=\sqrt{5}\,e^{2\theta}\,d\theta.\end{aligned}$$

11.【解】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t},\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)/dt}{dx/dt}=\frac{\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)'}{a(1-\cos t)}$$

$$=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{a(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2},$$

$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{1}{a}$,

则所求的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}a}.$$

## ◇ 选择题

12.【解】若 $x=a$ 为 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(a)=0$ 或 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导，反之不对，所以应选(D).

13.【解】因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f'(x)$ 为偶函数，$f''(x)$ 为奇函数，故当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0, f''(x)<0$，应选(C).

14.【解】由 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty$ 得 $x=-1$ 为铅直渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x}{2x}=\dfrac{1}{2}$ 得 $x=1$ 不是铅直渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1, \lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-x^2}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^2}{x^2-1}=-1$ 得 $y=x-1$ 为曲线的斜渐近线，应选(B).

15.【解】因为 $f(x)$ 连续，所以由 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-1}{(x-2)^2}=-3$ 得 $f(2)=1$，

存在 $\delta>0$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，$\dfrac{f(x)-1}{(x-2)^2}<0$，即 $f(x)<1=f(2)$，即 $x=2$ 为 $f(x)$ 的极大值点，应选(A).

16.【解】令 $f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}=0$ 得 $x=0, x=2$，

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $0<x<2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，

则 $x=0$ 为极小值点，$x=2$ 为极大值点，应选(C).

17.【解】由拉格朗日中值定理得

$$-f(-1)=f(0)-f(-1)=f'(\xi_1)，其中 -1<\xi_1<0，$$
$$f(1)=f(1)-f(0)=f'(\xi_2)，其中 0<\xi_2<1，$$

因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 单调递增，

又因为 $\xi_1<0<\xi_2$，所以 $f'(\xi_1)<f'(0)<f'(\xi_2)$，即 $-f(-1)<f'(0)<f(1)$，应选(B).

## ◇ 解答题

18.【证明】由积分中值定理，存在 $c\in[1,3]$，使得

$$\int_1^3 f(x)dx=2f(c),$$

由 $2f(0)=2f(c)$ 得 $f(0)=f(c)$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,c)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

19.【证明】由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$ 得 $f(0)=1, f'(0)=0$，

因为 $f(0)=f(1)=1$，所以由罗尔定理，存在 $c\in(0,1)$，使得 $f'(c)=0$；

因为 $f'(0)=f'(c)=0$ 且 $f(x)$ 二阶可导，所以存在 $\xi\in(0,c)\subset(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

20.【证明】令 $\varphi(x)=xf(x)$，

由 $f(1)=0$ 得 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，

而 $\varphi'(x)=xf'(x)+f(x)$，故 $\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$.

21.【证明】令 $\varphi(x)=e^{-2x}f(x)$，

由 $f(a)=f(b)=0$ 得 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$,

由罗尔定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$,

而 $\varphi'(x)=e^{-2x}[f'(x)-2f(x)]$ 且 $e^{-2x}\neq 0$,故 $f'(\xi)-2f(\xi)=0$.

22.【证明】由拉格朗日中值定理,存在 $\xi_1\in(0,1)$,$\xi_2\in(1,2)$,使得

$f(1)-f(0)=f'(\xi_1)$,$0<\xi_1<1$,

$f(2)-f(1)=f'(\xi_2)$,$1<\xi_2<2$,

因为 $f''(x)>0$,所以 $f'(x)$ 单调递增,

又因为 $\xi_1<\xi_2$,所以 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$,即 $f(1)-f(0)<f(2)-f(1)$,

故 $2f(1)<f(2)$.

23.【证明】令 $g(x)=\ln x$,$g'(x)=\dfrac{1}{x}\neq 0(a<x<b)$,由柯西中值定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$,整理得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

24.【解】(1) 方法一

由 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$,$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$ 得

$$x\cos x-\sin x=-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\sim-\frac{x^3}{3},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}=-\dfrac{1}{3}$.

方法二

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{3}.$$

(2) 方法一

由 $(1+x)^a=1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2!}x^2+o(x^2)$ 得

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2),\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2),$$

于是 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=-\dfrac{1}{4}x^2+o(x^2)\sim-\dfrac{1}{4}x^2$,

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=-\dfrac{1}{4}$.

方法二

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=-\frac{1}{4}.$$

25.【证明】方法一

令 $f(x)=x-\ln(1+x)$，$f(0)=0$，

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0(x>0),$$

由 $\begin{cases}f(0)=0,\\ f'(x)>0(x>0)\end{cases}$ 得 $f(x)>0(x>0)$，即 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$；

令 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，$g(0)=0$，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0(x>0),$$

由 $\begin{cases}g(0)=0,\\ g'(x)>0(x>0)\end{cases}$ 得 $g(x)>0(x>0)$，即 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$.

综上，当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

**方法二**

令 $f(x)=\ln(1+x)$，$f'(x)=\frac{1}{1+x}$，

当 $x>0$ 时，由拉格朗日中值定理得

$f(x)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，即 $\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}$，其中 $0<\xi<x$，

由 $\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$ 得 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x(x>0)$.

26.【证明】令 $f(x)=e^x-1-x$，$f(0)=0$，

$f'(x)=e^x-1>0(x>0)$，

由 $\begin{cases}f(0)=0,\\ f'(x)>0(x>0)\end{cases}$ 得 $x>0$ 时，$f(x)>0$，即 $e^x>1+x$.

27.【证明】令 $f(x)=e^x-1-(1+x)\ln(1+x)$，$f(0)=0$，

$$f'(x)=e^x-1-\ln(1+x),$$

因为当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$，

所以当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1-\ln(1+x)>e^x-1-x>0$，

由 $\begin{cases}f(0)=0,\\ f'(x)>0(x>0)\end{cases}$ 得 $f(x)>0(x>0)$，即

当 $x>0$ 时，$e^x-1>(1+x)\ln(1+x)$.

28.【解】因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$，所以曲线没有水平渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to 1}y=\infty$ 得 $x=1$ 为曲线的铅直渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=2$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+x+2}{x-1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{x-1}=3$ 得

$y=2x+3$ 为曲线的斜渐近线.

*29*.【解】由 $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$ 得 $y=0$ 为曲线的一条水平渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to-1}y=\infty$ 得 $x=-1$ 为一条铅直渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to0^-}y=\pi$，$\lim\limits_{x\to0^+}y=-\pi$ 得 $x=0$ 不是曲线的铅直渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to1}y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{x+1}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{8}$ 得 $x=1$ 不是铅直渐近线.

*30*.【解】设 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+1(x>0)$，

令 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}=0$ 得 $x=\mathrm{e}$，

$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，由 $f''(\mathrm{e})=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}<0$ 得 $x=\mathrm{e}$ 为 $f(x)$ 的极大值点，

极大值为 $f(\mathrm{e})=1>0$，

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，所以 $f(x)$ 有且仅有两个不同的零点，即方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-1$ 有且仅有两个不同的根.

*31*.【解】令 $f(x)=kx+\dfrac{1}{x^2}-1$，$f'(x)=k-\dfrac{2}{x^3}$，

当 $k\leqslant0$ 时，$f'(x)=k-\dfrac{2}{x^3}<0$，即当 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递减，

由 $f(0+0)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$ 得方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有唯一根；

当 $k>0$ 时，令 $f'(x)=k-\dfrac{2}{x^3}=0$，解得 $x=\sqrt[3]{\dfrac{2}{k}}$，

当 $x\in\left(0,\sqrt[3]{\dfrac{2}{k}}\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\sqrt[3]{\dfrac{2}{k}}$ 时，$f'(x)>0$，即 $x=\sqrt[3]{\dfrac{2}{k}}$ 为最小值点，

最小值为 $m=f\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{k}}\right)=\dfrac{3-\sqrt[3]{\dfrac{4}{k^2}}}{\sqrt[3]{\dfrac{4}{k^2}}}$，

当 $m=0$，即 $k=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ 时，方程有唯一根，故当 $k\leqslant0$ 或 $k=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ 时，方程有唯一根.

## Ⅱ 基础练习

### ◇ 填空题

*1*.【解】显然 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上连续，在 $(-1,2)$ 内可导，且 $f(-1)=f(2)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi \in (-1,2)$，使得 $f'(\xi)=0$，即 $2\xi-1=0$，故 $\xi=\frac{1}{2}$.

2.【解】$f'(x)=\cos x$，由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=f'\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)\frac{\pi}{2}$ 得 $\cos\frac{\pi}{2}\theta=\frac{2}{\pi}$，解得 $\theta=\frac{2}{\pi}\arccos\frac{2}{\pi}$.

3.【解】由 $f(x)-f(0)=f'(\theta x)x$ 得 $2e^{2\theta x}=\frac{e^{2x}-1}{x}$，解得 $\theta=\frac{1}{2x}\ln\frac{e^{2x}-1}{2x}$，

$$\text{故}\lim_{x\to0}\theta=\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\ln\frac{e^{2x}-1}{2x}\xlongequal{2x=t}\lim_{t\to0}\frac{\ln\frac{e^t-1}{t}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{e^t-1-t}{t}\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{2t}=\frac{1}{2}.$$

4.【解】因为 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点，所以 $f'(1)=0$，代入得 $f''(1)=2-e<0$，故 $x=1$ 为极大值点.

5.【解】由 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$ 得 $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$，即 $e^{-x^2}-1+x^2\sim\frac{x^4}{2}$；

由 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ 得 $x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$，从而 $\ln(1+2x)(x-\sin x)\sim\frac{x^4}{3}$，

故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x^2}-1+x^2}{\ln(1+2x)(x-\sin x)}=\frac{3}{2}$.

6.【解】由 $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+o(x^2)$ 得 $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$，

于是 $\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}\sim-\frac{x^2}{8}$，故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}=-\frac{1}{8}$.

7.【解】由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+2}{x^2+1}\arctan x=-\pi$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3x+2}{x^2+1}\arctan x=\pi$ 得

曲线的水平渐近线为 $y=-\pi$，$y=\pi$.

8.【解】由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-2x]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2xe^{\frac{1}{x}}-2x\right)=2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=2$ 得

曲线的斜渐近线为 $y=2x+2$.

9.【解】$f'(x)=-2(x-1)e^{-(x-1)^2}$，$f''(x)=[4(x-1)^2-2]e^{-(x-1)^2}$，

令 $f''(x)=0$ 得 $x=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，

当 $x<1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$f''(x)>0$；当 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$f''(x)<0$；当 $x>1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，

$f''(x)>0$，且 $f\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$，故点 $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-\frac{1}{2}}\right)$，$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}},e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 为曲线的拐点.

10.【解】$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{-\sin t}{\cos t}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1$；

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{-\sin t}{\cos t}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{-\sin t}{\cos t}\right)/dt}{dx/dt}=-\frac{1}{\cos^3 t},\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-2\sqrt{2},$$

故曲率 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=1.$

## ◇ 选择题

**11.【解】** 由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ 得 $x=0$ 为铅直渐近线;由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{\pi}{4}$ 得 $y=\frac{\pi}{4}$ 为水平渐近线,显然该曲线没有斜渐近线,又因为 $x\to 1$ 及 $x\to -2$ 时,函数值不趋于无穷大,故共有两条渐近线,选(B).

**12.【解】** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,

令 $f'(x)=3x^2-3=0$,得 $x=\pm 1$, $f''(x)=6x$,

由 $f''(-1)=-6<0$,得 $x=-1$ 为函数的极大值点,极大值为 $f(-1)=2+k$,

由 $f''(1)=6>0$,得 $x=1$ 为函数的极小值点,极小值为 $f(1)=-2+k$,

因为 $f(x)=x^3-3x+k$ 只有一个零点,所以 $2+k<0$ 或 $-2+k>0$,故 $|k|>2$,选(C).

**13.【解】**
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-2xf(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-2x-2x[f(x)-f(0)]}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}-2\frac{f(x)-f(0)}{x}\right],$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}=4\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=4\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=-2$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1$,选(B).

**14.【解】** 由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$,根据极限的保号性,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-a|<\delta$ 时,有 $\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0$,从而有 $f(x)<f(a)$,于是 $f(a)$ 为 $f(x)$ 的极大值,选(B).

**15.【解】** 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}=-2$ 得 $f(0)=1$,

由极限的保号性,存在 $\delta>0$,当 $0<|x|<\delta$ 时,$\frac{f(x)-1}{x^2}<0$,即 $f(x)<1=f(0)$,

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点,选(D).

**16.【解】** 由 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f''(x)}{\sin^3\pi x}=2$ 及 $f(x)$ 二阶连续可导得 $f''(1)=0$,

因为 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f''(x)}{\sin^3\pi x}=2>0$,所以由极限保号性,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-1|<\delta$ 时,$\frac{f''(x)}{\sin^3\pi x}>0$,

从而 $\begin{cases}f''(x)>0, x\in(1-\delta,1),\\ f''(x)<0, x\in(1,1+\delta),\end{cases}$ 故 $(1,f(1))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点,选(C).

17.【解】因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|+x^3}=-1<0$，所以由极限的保号性，存在$\delta>0$，当$0<|x|<\delta$时，$\dfrac{f''(x)}{|x|+x^3}<0$. 注意到$x^3=o(x)$，所以当$0<|x|<\delta$时，$f''(x)<0$，

从而$f'(x)$在$(-\delta,\delta)$内单调递减，再由$f'(0)=0$，得$\begin{cases}f'(x)>0,x\in(-\delta,0),\\f'(x)<0,x\in(0,\delta),\end{cases}$

故$x=0$为$f(x)$的极大值点，选(A).

18.【解】根据微分中值定理，$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x<0(x+\Delta x<\xi<x)$，$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x<0$，因为$f''(x)>0$，所以$f'(x)$单调增加，而$\xi<x$，所以$f'(\xi)<f'(x)$，于是$f'(\xi)\Delta x>f'(x)\Delta x$，即$\mathrm{d}y<\Delta y<0$，选(D).

19.【解】由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$及$f''(x)$的连续性，得$f''(0)=0$，由极限的保号性，存在$\delta>0$，当$0<|x|<\delta$时，$\dfrac{f''(x)}{|x|}>0$，从而$f''(x)>0$，于是$f'(x)$在$(-\delta,\delta)$内单调增加，再由$f'(0)=0$，得：当$x\in(-\delta,0)$时，$f'(x)<0$，当$x\in(0,\delta)$时，$f'(x)>0$，所以$x=0$为$f(x)$的极小值点，选(B).

20.【解】$\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，

令$h(x)=xf'(x)-f(x)$，$h(0)=0$，$h'(x)=xf''(x)<0(0<x\leqslant a)$，

由$\begin{cases}h(0)=0,\\h'(x)<0(0<x\leqslant a),\end{cases}$得$h(x)<0(0<x\leqslant a)$，

于是$\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0(0<x\leqslant a)$，故$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,a]$上为单调减函数，选(B).

21.【解】因为$f(x)$可导，所以$f(x)$可微分，即$\Delta y=\mathrm{d}y+o(\Delta x)$，所以$\Delta y-\mathrm{d}y$是$\Delta x$的高阶无穷小，选(A).

22.【解】由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，得$f(0)=0$，$f'(0)=1$，因为$f''(x)<0$，所以$f'(x)$单调减少，在$(-\infty,0)$内$f'(x)>f'(0)=1>0$，故$f(x)$在$(-\infty,0)$内为单调增函数，再由$f(0)=0$，在$(-\infty,0)$内$f(x)<f(0)=0$，选(B).

23.【解】由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{\sin x}=1$得$f'(0)=0$，

由$1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)$得$x=0$为极小值点，选(D).

24.【解】设$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\x^3+1, & x\neq0,\end{cases}$显然$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(-h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{9h^3}{h}=0$，而$f(x)$在$x=0$处不可导，(A)不对；

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)}{\ln^2(1+h)}=\lim_{h\to0}\frac{f[0+(1-\cos h)]-f(0)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f[0+(1-\cos h)]-f(0)}{1-\cos h}\cdot\frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}f'_+(0),$$

即$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\cos h)}{\ln^2(1+h)}$存在只能保证$f(x)$在$x=0$处右可导,故(B)不对;

因为$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h-\tan h}{h^3}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1-\sec^2 h}{3h^2}=-\dfrac{1}{3}$,所以$h-\tan h\sim-\dfrac{1}{3}h^3$,

于是$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h-\tan h)}{h^2}$存在不能保证$f(x)$在$x=0$处可导,故(D)不对;

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\cdot\dfrac{1-e^h}{h}=-f'(0)$,所以选(C).

**25.【解】**由$y=x^2+ax+b$得$y'=2x+a$,

$2y=xy^3-1$两边对$x$求导得$2y'=y^3+3xy^2y'$,解得$y'=\dfrac{y^3}{2-3xy^2}$,

因为两曲线在点$(1,-1)$处切线相同,所以$\begin{cases}-1=1+a+b,\\ 2+a=\dfrac{-1}{2-3},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\ b=-1,\end{cases}$选(B).

**26.【解】**因为$y=f(-x)$的图象与$y=f(x)$的图象关于$y$轴对称,所以$-x_0$为$f(-x)$的极大值点,从而$-x_0$为$-f(-x)$的极小值点,选(B).

**27.【解】**因为$f'''(x_0)>0$,所以存在$\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,$\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}>0$,

从而当$x\in(x_0-\delta,x_0)$时,$f''(x)<0$;当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时,$f''(x)>0$,即$(x_0,f(x_0))$是$y=f(x)$的拐点,选(D).

**28.【解】**$f'(x)=3x^2+2ax+b$,因为$f(x)$在$x=1$处有极小值$-2$,

所以$\begin{cases}1+a+b=-2,\\ 3+2a+b=0,\end{cases}$解得$a=0,b=-3$,选(C).

**29.【解】**由拉格朗日中值定理得$f(1)-f(0)=f'(c)(0<c<1)$,
因为$f''(x)>0$,所以$f'(x)$单调增加,故$f'(0)<f'(c)<f'(1)$,
即$f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$,选(D).

**30.【解】**由$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$得$\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$,即$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'<0$,从而$\dfrac{f(x)}{g(x)}$为单调减函数,

由$a<x<b$得$\dfrac{f(a)}{g(a)}>\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(b)}{g(b)}$,故$f(x)g(b)>f(b)g(x)$,选(A).

**31.【解】**由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$得$f(0)=0$,

由极限保号性,存在$\delta>0$,当$0<|x|<\delta$时,$\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$,从而$f(x)>0=f(0)$,

由极值的定义得$f(0)$为极小值,选(D).

**32.【解】**因为$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$,

所以由极限的保号性,存在$\delta>0$,当$0<|x|<\delta$时,$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$,

当 $x \in (-\delta,0)$ 时，$f(x) < f(0)$；当 $x \in (0,\delta)$ 时，$f(x) > f(0)$，选(D).

## ◇ 解答题

33.【证明】因为 $f(x) \in C[1,2]$，所以 $f(x)$ 在$[1,2]$上取到最小值 $m$ 和最大值 $M$，

又因为 $m \leqslant \dfrac{f(1)+f(2)}{2} \leqslant M$，所以存在 $c \in [1,2]$，使得 $f(c)=\dfrac{f(1)+f(2)}{2}$，即

$2f(c)=f(1)+f(2)$，即 $f(0)=f(c)$，

由罗尔定理，存在 $\xi \in (0,c) \subset (0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

34.【证明】由积分中值定理，存在 $c \in [1,2]$，使得$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=f(c)$，

因为 $f(0)=f(c)$，所以由罗尔定理，存在 $\xi \in (0,c) \subset (0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.

35.【证明】令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$F'(x)=f(x)$，

$F(0)=F(1)=0$，由罗尔定理，存在 $c \in (0,1)$，使得 $F'(c)=0$，即 $f(c)=0$.

令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，$\varphi(0)=\varphi(c)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi \in (0,c) \subset (0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，

而 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)+f(x)]$ 且 $\mathrm{e}^x \neq 0$，故 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

36.【证明】由$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=0$ 得 $f(1)=1$，$f'(1)=0$，

因为 $f(1)=f(2)=1$，所以由罗尔定理，存在 $c \in (1,2)$，使得 $f'(c)=0$.

因为 $f(x)$ 二阶可导且 $f'(1)=f'(c)=0$，所以存在 $\xi \in (1,c) \subset (1,2)$，使得 $f''(\xi)=0$.

37.【证明】由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 得 $f(0)=0$，$f'(0)=1$.

由拉格朗日中值定理，存在 $c \in (0,1)$，使得 $f'(c)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$，

因为 $f'(0)=f'(c)=1$ 且 $f(x)$ 二阶可导，所以由罗尔定理，存在 $\xi \in (0,c) \subset (0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

38.【证明】令 $f(x)=\mathrm{e}^x+x^2-ax-b$，则方程 $\mathrm{e}^x=-x^2+ax+b$ 的根与 $f(x)$ 的零点相同.

不妨设存在 $x_1<x_2<x_3$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi_1 \in (x_1,x_2)$，$\xi_2 \in (x_2,x_3)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，

再由罗尔定理，存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (x_1,x_3)$，使得 $f''(\xi)=0$，而 $f''(x)=\mathrm{e}^x+2\neq0$，矛盾，

故方程 $\mathrm{e}^x=-x^2+ax+b$ 不可能有三个不同的根.

39.【证明】(1) 令 $h(x)=f(x)-x$，$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}>0$，$h(1)=f(1)-1=-\dfrac{1}{2}<0$，

由零点定理，存在 $c \in \left(\dfrac{1}{2},1\right) \subset (0,1)$，使得 $h(c)=0$，即 $f(c)=c$.

(2) 令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x[f(x)-x]$，

由 $f(0)=0$，$f(c)=c$ 得 $\varphi(0)=\varphi(c)=0$，

再由罗尔定理，存在 $\xi \in (0,c) \subset (0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，

而 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)+f(x)-1-x]$ 且 $\mathrm{e}^x \neq 0$，得 $f'(\xi)+f(\xi)=1+\xi$.

40.【证明】令 $\varphi(x)=f(x)\int_x^b g(t)\mathrm{d}t+g(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，

则 $\varphi(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,在区间$(a,b)$内可导,且

$$\varphi'(x)=\left[f'(x)\int_x^b g(t)\mathrm{d}t-f(x)g(x)\right]+\left[g(x)f(x)+g'(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$
$$=f'(x)\int_x^b g(t)\mathrm{d}t+g'(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

因为 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$,所以由罗尔定理,存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$,即

$$f'(\xi)\int_\xi^b g(t)\mathrm{d}t+g'(\xi)\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t=0,$$

由于 $g(b)=0$ 及 $g'(x)<0$,所以区间$(a,b)$内必有 $g(x)>0$,

从而就有$\int_x^b g(t)\mathrm{d}t>0$,于是有$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\dfrac{\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t}{\int_\xi^b g(t)\mathrm{d}t}=0$.

**41.**【证明】(1) 令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x^2}f(x)$,因为 $f(a)=f(b)=0$,所以 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$,

由罗尔定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$,

而 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}[f'(x)-2xf(x)]$ 且 $\mathrm{e}^{-x^2}\neq 0$,故 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

(2) 令 $\varphi(x)=xf(x)$,因为 $f(a)=f(b)=0$,所以 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$,

由罗尔定理,存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $\varphi'(\eta)=0$,

而 $\varphi'(x)=xf'(x)+f(x)$,故 $\eta f'(\eta)+f(\eta)=0$.

**42.**【分析】由 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+(x-1)f(x)=0$,得 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-f(x)=0$,从而 $\left(x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=0$,辅助函数为 $\varphi(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

【证明】令 $\varphi(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

因为 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$,所以由罗尔定理,存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$.

而 $\varphi'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+(x-1)f(x)$,故$\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t+(\xi-1)f(\xi)=0$.

**43.**【分析】这是含端点和含 $\xi$ 的项的问题,且端点与含 $\xi$ 的项不可分离,具体构造辅助函数过程如下:把结论中的 $\xi$ 换成 $x$ 得$\dfrac{f(a)-f(x)}{g(x)-g(b)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,整理得

$$f'(x)g(b)+f(a)g'(x)-f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0,$$

还原得

$$[f(x)g(b)+f(a)g(x)-f(x)g(x)]'=0,$$

辅助函数为

$$F(x)=f(x)g(b)+f(a)g(x)-f(x)g(x).$$

【证明】令 $F(x)=f(x)g(b)+f(a)g(x)-f(x)g(x)$,则 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,在$(a,b)$内可导,且 $F(a)=F(b)=f(a)g(b)$,由罗尔定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,

而 $F'(x)=f'(x)g(b)+f(a)g'(x)-f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$,所以

$$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**44.**【分析】由 $xf'(x)-f(x)=f(2)-2f(1)$ 得$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-\dfrac{f(2)-2f(1)}{x^2}=0$,

从而 $\left[\frac{f(x)}{x}+\frac{f(2)-2f(1)}{x}\right]'=0$，辅助函数为 $\varphi(x)=\frac{f(x)+f(2)-2f(1)}{x}$.

**【证明】** 令 $\varphi(x)=\frac{f(x)+f(2)-2f(1)}{x}$,

则 $\varphi(x)$ 在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导，且 $\varphi(1)=\varphi(2)=f(2)-f(1)$,

由罗尔定理，存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$,

而 $\varphi'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)-f(2)+2f(1)}{x^2}$，故 $\xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1)$.

**45.【证明】** 存在 $\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}-0}=2\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\right],$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2\left[f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right],$$

因为 $f(0)=f(1)$，所以 $f'(\xi)=-f'(\eta)$，即 $f'(\xi)+f'(\eta)=0$.

**46.【证明】** 令 $g(x)=\arctan x$，$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}\neq 0\ (x\neq 0)$,

由柯西中值定理，存在 $\eta\in(0,1)$，使得

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)},\text{即}\frac{4}{\pi}\cdot[f(1)-f(0)]=(1+\eta^2)f'(\eta),$$

再由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(1)-f(0)=f'(\xi)$，故

$$\frac{4}{\pi}f'(\xi)=(1+\eta^2)f'(\eta).$$

**47.【证明】** 令 $F(x)=\ln x$，$F'(x)=\frac{1}{x}\neq 0$，由柯西中值定理，存在 $\xi\in(1,2)$，使得

$$\frac{f(2)-f(1)}{F(2)-F(1)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},\text{即}\frac{f(2)-f(1)}{\ln 2-\ln 1}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}=\xi f'(\xi),$$

由拉格朗日中值定理得 $\ln 2-\ln 1=\frac{1}{\eta}\cdot(2-1)=\frac{1}{\eta}$，其中 $\eta\in(1,2)$,

$f(2)-f(1)=f'(\zeta)(2-1)=f'(\zeta)$，其中 $\zeta\in(1,2)$,

故 $\frac{f'(\zeta)}{f'(\xi)}=\frac{\xi}{\eta}$.

**48.【证明】** 令 $F(x)=x^2$，$F'(x)=2x\neq 0\ (a<x<b)$，由柯西中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\eta)}{F'(\eta)}$，即 $\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}$，整理得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$，再由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，故 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

**49.【证明】** 因为 $f(x)$ 在$[a,b]$上不恒为常数且 $f(a)=f(b)$，所以存在 $c\in(a,b)$，使得

$f(c) \neq f(a)=f(b)$,不妨设 $f(c)>f(a)=f(b)$,

由微分中值定理,存在 $\xi \in (a,c)$,$\eta \in (c,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\quad f'(\eta)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0.$$

**50.【证明】方法一** 令 $f(t)=\ln t$,

由微分中值定理得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)=\frac{b-a}{\xi}$,其中 $\xi \in (a,b)$.

因为 $0<a<\xi<b$,所以 $\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$,

从而 $\frac{b-a}{b}<\frac{b-a}{\xi}<\frac{b-a}{a}$,即 $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

**方法二** $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}$ 等价于 $b(\ln b-\ln a)>b-a$,令 $\varphi_1(x)=x(\ln x-\ln a)-(x-a)$,

$\varphi_1(a)=0$,$\varphi'_1(x)=\ln x-\ln a>0(x>a)$.

由 $\begin{cases}\varphi_1(a)=0,\\ \varphi'_1(x)>0(x>a),\end{cases}$ 得 $\varphi_1(x)>0(x>a)$,而 $b>a$,所以 $\varphi_1(b)>0$,

从而 $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}$,同理可证 $\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

**51.【证明】**(1) 由题意,存在 $c \in (0,2)$,使得 $f(c)=0$,

由拉格朗日中值定理,存在 $\xi_1 \in (0,c)$,$\xi_2 \in (c,2)$,使得

$$f(c)-f(0)=f'(\xi_1)c,$$
$$f(2)-f(c)=f'(\xi_2)(2-c),$$

于是 $|f(0)|=|f'(\xi_1)|c \leqslant Mc$,$|f(2)|=|f'(\xi_2)|(2-c) \leqslant M(2-c)$,

故 $|f(0)|+|f(2)| \leqslant 2M$.

(2) 由题意,存在 $c \in (a,b)$,使得 $f(c)$ 为最小值,从而 $f'(c)=0$,

由拉格朗日中值定理,存在 $\xi_1 \in (a,c)$,$\xi_2 \in (c,b)$,使得

$$f'(c)-f'(a)=f''(\xi_1)(c-a),$$
$$f'(b)-f'(c)=f''(\xi_2)(b-c),$$

于是 $|f'(a)|=|f''(\xi_1)|(c-a) \leqslant M(c-a)$,

$|f'(b)|=|f''(\xi_2)|(b-c) \leqslant M(b-c)$,

故 $|f'(a)|+|f'(b)| \leqslant M(b-a)$.

**52.【证明】**由泰勒公式得

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi)}{2!}(0-x)^2,\xi \in (0,x),$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\eta)}{2!}(1-x)^2,\eta \in (x,1),$$

两式相减得 $$f'(x)=\frac{1}{2}[f''(\xi)x^2-f''(\eta)(1-x)^2],$$

取绝对值得 $$|f'(x)| \leqslant \frac{M}{2}[x^2+(1-x)^2],$$

因为 $x^2 \leqslant x,(1-x)^2 \leqslant 1-x$，所以 $x^2+(1-x)^2 \leqslant 1$，故 $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M}{2}$.

53.【分析】当 $x>1$ 时，$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} > \dfrac{x}{1+x}$ 等价于 $(1+x)\ln(1+x)-x\ln x>0$.

【证明】令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$，　$f(1)=2\ln 2>0$，

因为 $f'(x)=\ln(1+x)+1-\ln x-1=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>0(x>1)$，

所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加，

再由 $f(1)=2\ln 2>0$，得当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，即 $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$.

54.【证明】令 $f(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$，　$f(0)=0$；

$f'(x)=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x)$，　$f'(0)=0$；

$f''(x)=2-\dfrac{2\ln(1+x)}{1+x}-\dfrac{2}{1+x}=2\dfrac{x-\ln(1+x)}{1+x}>0(x>0)$，

由 $\begin{cases} f'(0)=0, \\ f''(x)>0(x>0) \end{cases}$ 得 $f'(x)>0(x>0)$；

由 $\begin{cases} f(0)=0, \\ f'(x)>0(x>0) \end{cases}$ 得 $f(x)>0(x>0)$，即 $x^2>(1+x)\ln^2(1+x)(x>0)$.

55.【证明】令 $f(x)=\arctan x+\dfrac{1}{x}$，

因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}<0(x>0)$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减，

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $f(x)>\dfrac{\pi}{2}$，即 $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}$.

56.【解】令 $y'=(1-x)\arctan x=0$，得 $x=0$ 或 $x=1$，$y''=-\arctan x+\dfrac{1-x}{1+x^2}$，

因为 $y''(0)=1>0$，$y''(1)=-\dfrac{\pi}{4}<0$，所以 $x=0$ 为极小值点，极小值为 $y=0$；$x=1$ 为极大值点，极大值为 $y(1)=\int_0^1(1-t)\arctan t\,dt=\int_0^1\arctan t\,dt-\int_0^1 t\arctan t\,dt$

$$=t\arctan t\Big|_0^1-\int_0^1\frac{t}{1+t^2}dt-\frac{t^2}{2}\arctan t\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}(1-\ln 2).$$

57.【解】令 $P\left(a,\dfrac{a^2}{4}\right)$，因为 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 关于 $y$ 轴对称，不妨设 $a>0$.

$y'(a)=\dfrac{a}{2}$，过 $P$ 点的法线方程为 $y-\dfrac{a^2}{4}=-\dfrac{2}{a}(x-a)$，

设 $Q\left(b,\dfrac{b^2}{4}\right)$，因为 $Q$ 在法线上，所以 $\dfrac{b^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}=-\dfrac{2}{a}(b-a)$，解得 $b=-a-\dfrac{8}{a}$.

$PQ$ 的长度的平方为 $L(a)=(b-a)^2+\left[\dfrac{1}{4}(b^2-a^2)\right]^2=4a^2\left(1+\dfrac{4}{a^2}\right)^3$，

由 $L'(a)=8a\left(1+\dfrac{4}{a^2}\right)^2\left(1-\dfrac{8}{a^2}\right)=0$ 得 $a=2\sqrt{2}$ 为唯一驻点，从而为最小值点，

故 $PQ$ 的最小距离为 $\sqrt{L(2\sqrt{2})}=6\sqrt{3}$.

58.【解】由 $y'=e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}+(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x^2+x}{1+x^2}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=0$ 得 $x=-1$、$x=0$.

当 $x<-1$ 时，$y'>0$；当 $-1<x<0$ 时，$y'<0$；当 $x>0$ 时，$y'>0$，

$y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调增区间为 $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$，单调减区间为 $[-1,0]$，

$x=-1$ 为极大值点，极大值为 $y(-1)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$；$x=0$ 为极小值点，极小值为 $y(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$，所以曲线 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 没有水平渐近线；

又因为 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 为连续函数，所以 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 没有铅直渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{y}{x}=1$，

$$\lim_{x\to-\infty}(y-x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x(e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1)-e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-1}{\frac{1}{x}}-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-1=-2$$

得 $y=x-2$ 为曲线的斜渐近线；

再由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=e^{\pi}$，

$$\lim_{x\to+\infty}(y-e^{\pi}x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}-e^{\pi}\right)-e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}\right]$$

$$=e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}-1}{\frac{1}{x}}-e^{\pi}=e^{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}-e^{\pi}=-2e^{\pi}$$

得 $y=e^{\pi}x-2e^{\pi}$ 为曲线 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的斜渐近线.

59.【分析】$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$ 等价于 $(1+x)\ln(1+x)>\sqrt{1-x^2}\arcsin x$，

【证明】令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$，　$f(0)=0$，

$f'(x)=\ln(1+x)+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x>0\,(0<x<1)$，

由 $\begin{cases}f(0)=0,\\f'(x)>0\,(0<x<1)\end{cases}$ 得当 $0<x<1$ 时，$f(x)>0$，故 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$.

60.【分析】$e^{-2x}>\dfrac{1-x}{1+x}$ 等价于 $-2x>\ln(1-x)-\ln(1+x)$，

【证明】令 $f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)-2x$，$f(0)=0$，

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}-2=\dfrac{2x^2}{1-x^2}>0\,(0<x<1)$，

由$\begin{cases} f(0)=0, \\ f'(x)>0(0<x<1) \end{cases}$得 $f(x)>0(0<x<1)$,故当 $0<x<1$ 时,$e^{-2x}>\dfrac{1-x}{1+x}$.

***61.*****【证明】**令 $f(x)=x-\sin x$, $f(0)=0$,

$f'(x)=1-\cos x>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$,

由$\begin{cases} f(0)=0, \\ f'(x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}$得 $f(x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$,

即当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\sin x<x$;

令 $g(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$, $g(0)=g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$,

由 $g''(x)=-\sin x<0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$,即 $g(x)$ 在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内为凸函数,

由$\begin{cases} g(0)=0,g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0, \\ g''(x)<0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}$得 $g(x)>0\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$,即当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x$

故当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x$.

***62.*****【解】**$f(x)=\int_0^1|x-t|\,dt=\int_0^x(x-t)dt+\int_x^1(t-x)dt$

$$=x^2-\frac{x^2}{2}+\frac{1-x^2}{2}-x(1-x)=x^2-x+\frac{1}{2}.$$

由 $f'(x)=2x-1=0$ 得 $x=\dfrac{1}{2}$,

因为 $f(0)=\dfrac{1}{2}$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$,$f(1)=\dfrac{1}{2}$,

所以 $f(x)$ 在$[0,1]$上的最大值为$\dfrac{1}{2}$,最小值为$\dfrac{1}{4}$.

***63.*****【证明】**$\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}\,dx=2\sqrt{2}$,设 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+2\sqrt{2}$,令 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=0$,得

$x=e$,因为 $f''(e)=-\dfrac{1}{e^2}$,所以 $f(e)=2\sqrt{2}>0$ 为 $f(x)$ 的最大值,又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,所以 $f(x)=0$ 在$(0,+\infty)$内有且仅有两个实根.

***64.*****【解】**$f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=k$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

由 $f'(x)=\ln x+1=0$,得驻点为 $x=\dfrac{1}{e}$,由 $f''(x)=\dfrac{1}{x}>0$,得 $x=\dfrac{1}{e}$ 为 $f(x)$ 的极小值

点,也为最小值点,最小值为 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=k-\dfrac{1}{e}$.

(1) 当 $k>\dfrac{1}{e}$ 时,函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内没有零点;

(2) 当 $k=\frac{1}{e}$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一零点 $x=\frac{1}{e}$;

(3) 当 $0<k<\frac{1}{e}$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点,分别位于 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 与 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 内.

**65.【解】** 因为 $f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}>0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

因为 $f''(x)=-xe^{-\frac{1}{2}x^2}$,当 $x<0$ 时,$f''(x)>0$;当 $x>0$ 时,$f''(x)<0$,则 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内是凹的,在 $(0,+\infty)$ 内是凸的,$(0,0)$ 为 $y=f(x)$ 的拐点.

因为 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt\xlongequal{\frac{1}{2}t^2=u}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 得 $y=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 与 $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 为曲线 $y=f(x)$ 的两条水平渐近线.

**66.【证明】** 令 $\varphi(t)=\ln(x+t)$,由拉格朗日中值定理得

$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln(x+1)-\ln x=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\xi)=\frac{1}{x+\xi}(0<\xi<1)$,

由 $\frac{1}{x+\xi}>\frac{1}{x+1}$ 得 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{x+1}$.

**67.【证明】** 令 $f(x)=\arctan x-ax$,由 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-a=0$ 得 $x=\sqrt{\frac{1-a}{a}}$,

由 $f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}<0$ 得 $x=\sqrt{\frac{1-a}{a}}$ 为 $f(x)$ 的最大值点,

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,$f(0)=0$ 得方程 $\arctan x=ax$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有唯一实根,位于 $\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}},+\infty\right)$ 内.

**68.【证明】** 令 $\varphi(x)=f(x)\sin x$,　$\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$,

由罗尔定理,存在 $\xi\in(0,\pi)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$,

而 $\varphi'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$,

于是 $f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$,故 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

**69.【证明】**(1) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$,　$F'(x)=f(x)$,

$\int_0^2 f(t)dt=F(2)-F(0)=F'(c)(2-0)=2f(c)$,其中 $0<c<2$.

因为 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续,所以 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上取到最小值 $m$ 和最大值 $M$,

$$m\leqslant\frac{f(2)+f(3)}{2}\leqslant M,$$

由介值定理,存在 $x_0\in[2,3]$,使得 $f(x_0)=\frac{f(2)+f(3)}{2}$,即 $f(2)+f(3)=2f(x_0)$,

于是 $f(0)=f(c)=f(x_0)$,

由罗尔定理，存在 $\xi_1 \in (0,c) \subset (0,3)$，$\xi_2 \in (c,x_0) \subset (0,3)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

(2) 令 $\varphi(x)=e^{-2x}f'(x)$，$\varphi(\xi_1)=\varphi(\xi_2)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (0,3)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，

而 $\varphi'(x)=e^{-2x}[f''(x)-2f'(x)]$ 且 $e^{-2x}\neq 0$，故 $f''(\xi)-2f'(\xi)=0$.

**70.【证明】**(1) 令 $h(x)=\ln x$，$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，且 $F'(x)=f(x)\neq 0$，

由柯西中值定理，存在 $\xi \in (1,2)$，使得 $\dfrac{h(2)-h(1)}{F(2)-F(1)}=\dfrac{h'(\xi)}{F'(\xi)}$，即 $\dfrac{\ln 2}{\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{\xi f(\xi)}$.

(2) 由 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(2x-1)}{x-1}$ 得 $f(1)=0$，

由拉格朗日中值定理得 $f(\xi)=f(\xi)-f(1)=f'(\eta)(\xi-1)$，其中 $1<\eta<\xi$，

故 $\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t=\xi(\xi-1)f'(\eta)\ln 2$.

**71.【证明】**对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $x_1\neq x_2$，取 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，由泰勒公式得

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$，其中 $\xi$ 介于 $x_0$ 与 $x$ 之间.

因为 $f''(x)>0$，所以 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，"=" 成立当且仅当"$x=x_0$"，

从而 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}f(x_1)>\dfrac{1}{2}f(x_0)+\dfrac{1}{2}f'(x_0)(x_1-x_0)\\ \dfrac{1}{2}f(x_2)>\dfrac{1}{2}f(x_0)+\dfrac{1}{2}f'(x_0)(x_2-x_0)\end{cases}$，

两式相加得 $f(x_0)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，即 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，

由凹函数的定义，$f(x)$ 在 $(a,b)$ 内为凹函数.

**72.【解】**由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$ 得 $y=1$ 为曲线的水平渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\infty$ 得 $x=-1$ 为曲线的铅直渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}=\dfrac{3e}{2}$ 得 $x=1$ 不是曲线的铅直渐近线；

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ 得 $x=0$ 为曲线的铅直渐近线.

**73.【解】**由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}=2$，

$\lim\limits_{x\to\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(2x-1)e^{\frac{1}{x}}-2x\right]=2\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1=1$ 得

曲线的斜渐近线为 $y=2x+1$.

# 四、不定积分

## ① 入门练习

*1*.【解】(1) $\int x e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$

(2) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}d\left(x+\frac{1}{x}\right)=e^{x+\frac{1}{x}}+C.$

(3) $\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

(4) $\int\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2}=\frac{1}{2}\arctan x^2+C.$

*2*.【解】(1) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2\int e^{\sqrt{x}}d(\sqrt{x})=2e^{\sqrt{x}}+C.$

(2) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx=2\int\sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x})=-2\cos\sqrt{x}+C.$

(3) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=2\int\frac{dx}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=2\int\frac{d(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}=2\ln(1+\sqrt{x})+C.$

(4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int\frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}=2\arctan\sqrt{x}+C.$

*3*.【解】(1) $\int\frac{dx}{x\ln^2x}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln^2x}=-\frac{1}{\ln x}+C.$

(2) $\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx=\int\frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2}=-\frac{1}{x\ln x}+C.$

*4*.【解】(1) $\int\frac{dx}{(2x+3)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2}=-\frac{1}{2(2x+3)}+C.$

(2) $\int\frac{x}{(x+2)^3}dx=\int\frac{(x+2)-2}{(x+2)^3}dx=\int\frac{1}{(x+2)^2}dx-2\int\frac{1}{(x+2)^3}dx$

$$=-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}+C.$$

*5*.【解】(1) $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int\frac{d(e^x-1)}{\sqrt{e^x-1}}=2\int\frac{d(e^x-1)}{2\sqrt{e^x-1}}=2\sqrt{e^x-1}+C.$

(2) $\int\frac{e^x}{4+e^{2x}}dx=\int\frac{d(e^x)}{2^2+(e^x)^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x}{2}+C.$

*6*.【解】(1) $\int\sin^3x\cos x\,dx=\int\sin^3x\,d(\sin x)=\frac{1}{4}\sin^4x+C.$

(2) $\int\frac{\cos x+\sin x}{(\sin x-\cos x)^2}dx=\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}=-\frac{1}{\sin x-\cos x}+C.$

(3)$\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{4+\sin^2 x}=\frac{1}{2}\arctan \frac{\sin x}{2}+C.$

(4)$\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C.$

**7.【解】**(1)$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(2)$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

**8.【解】**(1)$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\arcsin x-\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

(2)$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}\xlongequal{\sqrt{x}=t}2\int \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=2t-2\ln(1+t)+C$

$$=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

**9.【解】**(1)$\int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+C.$

(2)$\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int \ln x\,\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C.$

(3)$\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x=-\int x^2\mathrm{d}(\cos x)=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

$$=-x^2\cos x+2\int x\,\mathrm{d}(\sin x)=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

(4)$\int x^2\arctan x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int \arctan x\,\mathrm{d}(x^3)=\frac{x^3}{3}\arctan x-\frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^3}{3}\arctan x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^3}{3}\arctan x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$$

**10.【解】**(1)$I=\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(\sin x)=\mathrm{e}^{2x}\sin x-2\int \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$

$$=\mathrm{e}^{2x}\sin x+2\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(\cos x)=\mathrm{e}^{2x}\sin x+2\mathrm{e}^{2x}\cos x-4\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x,$$

解得$\int e^{2x}\cos x\mathrm{d}x=\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C.$

(2)$I=\int \sec^3 x\mathrm{d}x=\int \sec x\mathrm{d}(\tan x)=\sec x\tan x-\int \tan x\mathrm{d}(\sec x)$

$=\sec x\tan x-\int \tan^2 x\sec x\mathrm{d}x=\sec x\tan x-I+\int \sec x\mathrm{d}x$

$=\sec x\tan x-I+\ln|\sec x+\tan x|,$

解得$\int \sec^3 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|)+C.$

## ◇ 解答题

*11*.【解】$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=2\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\int \arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}(\arcsin\sqrt{x})$

$=\arcsin^2\sqrt{x}+C.$

*12*.【解】$\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2)-\int \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2)-\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2+C.$

*13*.【解】(1)$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\int \sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\tan\frac{x}{2}+C.$

(2)$\int \frac{\cos^2 x\mathrm{d}x}{1+\cos x}=\int \frac{\cos^2 x-1+1}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\left(\cos x-1+\frac{1}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x$

$=\sin x-x+\tan\frac{x}{2}+C.$

(3)$\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int\left(1-\frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}x=x-\int \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\mathrm{d}x$

$=x-\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=x-\int \sec^2 x\mathrm{d}x-\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^2 x}=x-\tan x+\frac{1}{\cos x}+C.$

*14*.【解】(1)$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+\arcsin x$

$=-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$

(2)$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(x^2)\xlongequal{x^2=t}\frac{1}{2}\int \frac{t}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int \frac{t-1+1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$

$=-\frac{1}{2}\int \sqrt{1-t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int (1-t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-t)-\int \frac{\mathrm{d}(1-t)}{2\sqrt{1-t}}$

$=\frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1-t}+C=\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1-x^2}+C.$

$$(3)\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}\xlongequal{x=\sin t}\int\frac{\cos t}{\sin t\cos t}dt=\int\csc t\,dt=\ln|\csc t-\cot t|+C$$

$$=\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$$

$$(4)\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}\xlongequal{x=\tan t}\int\frac{\sec^2 t}{\tan t\sec t}dt=\int\frac{1}{\sin t}dt$$

$$=\ln|\csc t-\cot t|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{x}\right|+C.$$

***15.*【解】**$(1)\int x\arcsin x\,dx=\frac{1}{2}\int\arcsin x\,d(x^2)=\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\frac{x^2}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{x^2-1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{x^2-1}{2}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}\arcsin x+C$$

$$=\frac{2x^2-1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C.$$

$$(2)\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x\,dx=\int\arctan x\,dx-\int\arctan x\,d(\arctan x)$$

$$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}\arctan^2 x$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\arctan^2 x+C.$$

***16.*【解】**$(1)\int\frac{x}{(2x+3)^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{(2x+3)-3}{(2x+3)^2}d(2x+3)$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{2x+3}d(2x+3)-\frac{3}{4}\int\frac{1}{(2x+3)^2}d(2x+3)$$

$$=\frac{1}{4}\ln|2x+3|+\frac{3}{8x+12}+C.$$

$$(2)\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

$$(3)\int\frac{x^3-1}{x^2+x}dx=\int\frac{x^3+x^2-(x^2+x)+x-1}{x^2+x}dx=\int\left(x-1+\frac{x-1}{x^2+x}\right)dx$$

$$=\int\left(x-1+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+2\ln|x+1|-\ln|x|+C.$$

$$(4)\int\frac{dx}{x(1+x^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}\right)d(x^2)=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}+C.$$

***17.*【解】**显然，$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，

故$\int f'(2x-1)dx=\frac{1}{2}f(2x-1)+C=\frac{(2x-1)\cos(2x-1)-\sin(2x-1)}{2(2x-1)^2}+C.$

## Ⅱ 基础练习

### ◆ 填空题

1.【解】$\int \frac{\cos\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int \frac{\cos\sqrt{x}-1}{\sin^2\sqrt{x}}\mathrm{d}(\sqrt{x})$

$$=2\int \frac{\mathrm{d}(\sin\sqrt{x})}{\sin^2\sqrt{x}}-2\int \csc^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\sqrt{x})=-\frac{2}{\sin\sqrt{x}}+2\cot\sqrt{x}+C.$$

2.【解】(1) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)\xlongequal{x+\frac{1}{x}=t}\int\cos^2t\,\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\int(1+\cos2t)\mathrm{d}t=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin2t+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\sin\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]+C.$$

(2) 因为$(\sin^2x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin2x$，

所以$\int\frac{\sin2x}{4+\sin^4x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\sin^2x)}{2^2+(\sin^2x)^2}=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sin^2x}{2}\right)+C.$

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2}\left(\int\frac{x^2+1}{1+x^4}\mathrm{d}x-\int\frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x\right)$，

由$\int\frac{x^2+1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{(\sqrt{2})^2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C_1$，

$\int\frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C_2$，得

$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C.$

3.【解】因为$\frac{x^3+4x^2+x}{(x+2)^2(x^2+x+1)}=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}-\frac{1}{x^2+x+1}$，

所以$\int\frac{x^3+4x^2+x}{(x+2)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}-\frac{1}{x^2+x+1}\right]\mathrm{d}x$

$$=\ln|x+2|-\frac{2}{x+2}-\int\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\ln|x+2|-\frac{2}{x+2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

4.【解】 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}=\int\frac{(x^2-4)+4}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=-\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x+4\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=-\left(\frac{4}{2}\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}\right)+4\arcsin\frac{x}{2}+C$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

5.【解】 $\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{4x}-10\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-10}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-10}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$

$$=\int\frac{1}{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2-8}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2\sqrt{2}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+2\sqrt{2}}\right|+C.$$

6.【解】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\xlongequal{x=\tan t}\int\frac{\sec^2t\,\mathrm{d}t}{\sec^3t}=\int\cos t\,\mathrm{d}t=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.$

7.【解】 $\int\frac{1}{1+\cos x+\sin^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2+\tan^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$$=2\int\frac{1}{2+\tan^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

8.【解】 $\int\mathrm{e}^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\frac{1+\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sec^2\frac{x}{2}+\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}-\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}+C.$$

## ◇ 选择题

9.【解】令 $f(x)=\cos x-2$，$F(x)=\sin x-2x+C$，显然 $f(x)$ 为周期函数，但 $F(x)$ 为非周期函数，(A) 不对；

令 $f(x)=2x$，$F(x)=x^2+C$，显然 $f(x)$ 为单调增函数，但 $F(x)$ 为非单调函数，(B) 不对；

令 $f(x)=x^2$，$F(x)=\frac{1}{3}x^3+2$，显然 $f(x)$ 为偶函数，但 $F(x)$ 为非奇非偶函数，(C) 不对；

若 $f(x)$ 为奇函数，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，

因为 $F(-x)=\int_a^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{t=-u}\int_{-a}^{x}f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_{-a}^{x}f(u)\mathrm{d}u$

$$=\int_{-a}^{a}f(u)\mathrm{d}u+\int_a^x f(u)\mathrm{d}u=\int_a^x f(u)\mathrm{d}u=F(x),$$

所以 $F(x)$ 为偶函数，选(D).

10.【解】$\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$，选(B).

## ◇ 解答题

**11.【解】**(1)$\int \frac{dx}{(5-x)\sqrt{1-x}}=-2\int \frac{d(1-x)}{(5-x)\cdot 2\sqrt{1-x}}=-2\int \frac{d(\sqrt{1-x})}{2^2+(\sqrt{1-x})^2}$

$$=-\arctan\frac{\sqrt{1-x}}{2}+C.$$

(2)$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{x^2+1}}d(x^2+1)$

$$=\frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1}\,d(x^2+1)-\int \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}d(x^2+1)$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{x^2+1}+C.$$

(3)$\int \frac{x^{14}}{(x^5+1)^4}dx=\frac{1}{5}\int \frac{x^{10}}{(x^5+1)^4}d(x^5)\xlongequal{x^5=t}\frac{1}{5}\int \frac{t^2}{(t+1)^4}dt$

$$=\frac{1}{5}\int \frac{(t+1)^2-2(t+1)+1}{(t+1)^4}dt$$

$$=\frac{1}{5}\int[(t+1)^{-2}-2(t+1)^{-3}+(t+1)^{-4}]dt$$

$$=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{1}{3(t+1)^3}\right]+C$$

$$=-\frac{1}{5(x^5+1)}+\frac{1}{5(x^5+1)^2}-\frac{1}{15(x^5+1)^3}+C.$$

(4)$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx=\int \frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}dx=\int \frac{d\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)}{\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)^2}=\frac{x}{x-\ln x}+C.$

(5)$\int \frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\int \frac{dx}{2\sin x(1+\cos x)}=\int \frac{dx}{2\sin x\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}=\int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{2\sin x}$,

由 $\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$ 得 $\frac{1}{2\sin x}=\frac{1}{4}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\right)$,

于是 $\int \frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\frac{1}{4}\int\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\right)d\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

(6)$\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2dx=-\int \ln^2 x\,d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln^2 x}{x}+2\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

$$=-\frac{\ln^2 x}{x}-2\int \ln x\,d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}+2\int \frac{dx}{x^2}$$

$$=-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}+C.$$

(7) 令$\frac{x-1}{2x^2+x-1}=\frac{x-1}{(x+1)(2x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}$,

由 $A(2x-1)+B(x+1)=x-1$ 得$\begin{cases}2A+B=1,\\-A+B=-1.\end{cases}$ 解得 $A=\frac{2}{3}, B=-\frac{1}{3}$,

故$\int\frac{x-1}{2x^2+x-1}dx=\frac{2}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|2x-1|+C.$

(8)$\int\frac{1+\ln(1-x)}{x^2}dx=-\int[1+\ln(1-x)]d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=-\frac{1+\ln(1-x)}{x}+\int\frac{1}{x(x-1)}dx$$

$$=-\frac{1+\ln(1-x)}{x}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C.$$

(9)$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}\xlongequal{x=2\sec t}\int\frac{2\sec t\tan t}{4\sec^2 t\cdot 2\tan t}dt=\frac{1}{4}\int\cos t\,dt=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{\sqrt{x^2-4}}{4x}+C.$

(10)$\int\sin^4 x\cos^3 x\,dx=\int\sin^4 x(1-\sin^2 x)d(\sin x)$

$$=\int(\sin^4 x-\sin^6 x)d(\sin x)=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$$

**12.【解】**因为$\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]'=\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}\cdot\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1-x^2}$,

所以$\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C.$

**13.【解】**$\int\frac{dx}{\sqrt{x(4x-1)}}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{(2\sqrt{x})^2-1}}=\ln(2\sqrt{x}+\sqrt{4x-1})+C.$

**14.【解】**$\int\frac{x+1}{(3x+2)^3}dx=\frac{1}{9}\int\frac{(3x+2)+1}{(3x+2)^3}d(3x+2)$

$$\xlongequal{3x+2=t}\frac{1}{9}\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt=\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{9}\left[\frac{1}{3x+2}+\frac{1}{2(3x+2)^2}\right]+C.$$

**15.【解】**令$\frac{1}{(x-3)^2(x^2-6x+8)}=\frac{1}{(x-2)(x-4)(x-3)^2}$

$$=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{(x-3)^2},$$

由 $A(x-4)(x-3)^2+B(x-2)(x-3)^2+C(x-2)(x-3)(x-4)+D(x-2)(x-4)=1$

得$\begin{cases}A+B+C=0,\\-10A-8B-9C+D=0,\\33A+21B+26C-6D=0,\\-36A-18B-24C+8D=1,\end{cases}$ 解得 $A=-\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}, C=0, D=-1$,

故$\int\frac{dx}{(x-3)^2(x^2-6x+8)}=\int\left[-\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x-4)}-\frac{1}{(x-3)^2}\right]dx$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|+\frac{1}{x-3}+C.$$

16.【解】$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}\xlongequal{x=\sec t}\int\frac{\sec t\tan t}{\sec t\tan t}\mathrm{d}t=\int\mathrm{d}t=t+C=\arccos\frac{1}{x}+C.$

17.【解】$\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{1+(\sqrt{x-1})^2}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{\sqrt{x-1}=t}2\int\frac{t^2\arctan t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\arctan t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\int\arctan t\,\mathrm{d}t-2\int\frac{1}{1+t^2}\arctan t\,\mathrm{d}t$$

$$=2t\arctan t-2\int\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t-2\int\arctan t\,\mathrm{d}(\arctan t)$$

$$=2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln x-\arctan^2\sqrt{x-1}+C.$$

18.【解】$\int\arcsin^2x\,\mathrm{d}x=x\arcsin^2x-\int\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,\mathrm{d}x$

$$=x\arcsin^2x+2\int\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$=x\arcsin^2x+2\int\arcsin x\,\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2})$$

$$=x\arcsin^2x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int\mathrm{d}x$$

$$=x\arcsin^2x+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

19.【解】$\int\frac{x\sin x}{\cos^3x}\mathrm{d}x=-\int\frac{x\,\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^3x}=\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos^2x}\right)$

$$=\frac{x}{2\cos^2x}-\frac{1}{2}\int\sec^2x\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2\cos^2x}-\frac{1}{2}\tan x+C.$$

20.【解】$\int\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sin\left[\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

21.【解】$\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\sqrt{x})\xlongequal{\sqrt{x}=t}2\int\arctan t\,\mathrm{d}t$

$$=2t\arctan t-2\int\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t=2t\arctan t-\ln(1+t^2)+C$$

$$=2\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}-\ln(1+x)+C.$$

22.【解】因为$[\ln(\tan x)]'=\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x=\frac{1}{\sin x\cos x}$,

所以$\int\frac{\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}dx=\int\ln(\tan x)d[\ln(\tan x)]=\frac{1}{2}\ln^2(\tan x)+C.$

23.【解】$\int\frac{(x+1)\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=-\int\arcsin x\,d(\sqrt{1-x^2})+\int\arcsin x\,d(\arcsin x)$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+\frac{1}{2}\arcsin^2 x+C.$$

24.【解】$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}-\int\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}=\int\sec^2\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)-\int\frac{d(1+\cos x)}{1+\cos x}$

$$=\tan\frac{x}{2}-\ln(1+\cos x)+C.$$

25.【解】$\int\frac{\tan^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int(\sec^2\sqrt{x}-1)d(\sqrt{x})=2(\tan\sqrt{x}-\sqrt{x})+C.$

26.【解】$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{2\arctan x+3}}=\int\frac{d(\arctan x)}{\sqrt{2\arctan x+3}}$

$$=\int\frac{d(2\arctan x+3)}{2\sqrt{2\arctan x+3}}=\sqrt{2\arctan x+3}+C.$$

27.【解】因为$(3+\sin x\cos x)'=\cos 2x$,

所以$\int\frac{\cos 2x}{(3+\sin x\cos x)^2}dx=\int\frac{d(3+\sin x\cos x)}{(3+\sin x\cos x)^2}=-\frac{1}{3+\sin x\cos x}+C.$

28.【解】由$\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}$得

$$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx=\int\frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)^2}dx=\int\frac{d\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)}{\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)^2}=-\frac{1}{\frac{\ln x}{x}-1}+C=\frac{x}{x-\ln x}+C.$$

29.【解】$\int\frac{dx}{\sqrt{4e^x+1}}=\int\frac{e^{-\frac{x}{2}}dx}{\sqrt{e^{-x}+4}}=-2\int\frac{d(e^{-\frac{x}{2}})}{\sqrt{(e^{-\frac{x}{2}})^2+4}}=-2\ln\left(e^{-\frac{x}{2}}+\sqrt{e^{-x}+4}\right)+C.$

30.【解】$\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx\xlongequal{x=\sec t}\int\frac{\tan t}{\sec^2 t}\cdot\sec t\tan t\,dt=\int\frac{\tan^2 t}{\sec t}dt$

$$=\int\frac{\sec^2 t-1}{\sec t}dt=\int\sec t\,dt-\int\cos t\,dt=\ln|\sec t+\tan t|-\sin t+C$$

$$=\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$$

31.【解】令$\sqrt{e^x-1}=t$,则$x=\ln(1+t^2)$,

$$\int\sqrt{e^x-1}\,dx=\int t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt=2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=2t-2\arctan t+C=2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$$

32.【解】$\int\frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}+e^{2x}+1}dx=\int\frac{e^x+e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}+1}dx$

$$=\int\frac{d(e^x-e^{-x})}{(\sqrt{3})^2+(e^x-e^{-x})^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{3}}+C.$$

33.【解】由 $\frac{2x^3+4x+1}{x^2+x+1}=2x-2+\frac{4x+3}{x^2+x+1}$ 得

$$\int\frac{2x^3+4x+1}{x^2+x+1}dx=\int\left(2x-2+\frac{4x+3}{x^2+x+1}\right)dx=x^2-2x+\int\frac{2(2x+1)+1}{x^2+x+1}dx$$

$$=x^2-2x+2\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\int\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=x^2-2x+2\ln(x^2+x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

34.【解】$\int\frac{\sin x+\cos^2x}{1+\sin x}dx=\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx+\int\frac{1-\sin^2x}{1+\sin x}dx$

$$=\int\left(1-\frac{1}{1+\sin x}\right)dx+\int(1-\sin x)dx$$

$$=2x-\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\cos x+C.$$

35.【解】$\int\frac{dx}{\sin x\cos^4x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos^4x}dx=\int\frac{\sin^2x}{\sin x\cos^4x}dx+\int\frac{\cos^2x}{\sin x\cos^4x}dx$

$$=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^4x}+\int\frac{1}{\sin x\cos^2x}dx=\frac{1}{3\cos^3x}+\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos^2x}dx$$

$$=\frac{1}{3\cos^3x}-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2x}+\int\csc x\,dx$$

$$=\frac{1}{3\cos^3x}+\frac{1}{\cos x}+\ln|\csc x-\cot x|+C.$$

36.【解】$\int\frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin^2x}dx=\int\frac{1}{1+\sin^2x}dx+\int\frac{\sin x}{1+\sin^2x}dx+\int\frac{\cos x}{1+\sin^2x}dx$

$$=\int\frac{\sec^2x}{\sec^2x+\tan^2x}dx+\int\frac{1}{\cos^2x-2}d(\cos x)+\int\frac{1}{1+\sin^2x}d(\sin x)$$

$$=\int\frac{1}{1+2\tan^2x}d(\tan x)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}+\arctan\sin x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\cos x}{\sqrt{2}+\cos x}+\arctan\sin x+C.$$

37.【解】$\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4x+\cos^4x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x}{1-2\sin^2x\cos^2x}dx$

$$=\int\frac{\sin 2x}{2-\sin^2 2x}dx=\int\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}dx=-\frac{1}{2}\arctan\cos 2x+C.$$

38.【解】$\int \frac{\sin x\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}{2+\sin^2 x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{2+\sin^2 x}d(1+\sin^2 x)$

$\xlongequal{t=\sqrt{1+\sin^2 x}}\frac{1}{2}\int \frac{t}{1+t^2}d(t^2)=\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$=t-\arctan t+C=\sqrt{1+\sin^2 x}-\arctan\sqrt{1+\sin^2 x}+C.$

39.【解】$\int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}dx=\frac{1}{8}\int x\cos\frac{x}{2}\csc^3\frac{x}{2}dx$

$=-\frac{1}{8}\int x\,d\left(\csc^2\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{8}x\csc^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\int \csc^2\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)$

$=-\frac{1}{8}x\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C.$

40.【解】$\int \arcsin x\arccos x\,dx=x\arcsin x\arccos x-\int\frac{x(\arccos x-\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=x\arcsin x\arccos x-\int\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=x\arcsin x\arccos x+\int\arccos x\,d(\sqrt{1-x^2})-\int\arcsin x\,d(\sqrt{1-x^2})$

$=x\arcsin x\arccos x+\sqrt{1-x^2}(\arccos x-\arcsin x)+2x+C.$

41.【解】$\int x\arctan\sqrt{x}\,dx\overset{\sqrt{x}=t}{=}2\int t^3\arctan t\,dt=\frac{1}{2}\int\arctan t\,d(t^4)$

$=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{2}\int\frac{t^4}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{2}\int\frac{(t^4-1)+1}{1+t^2}dt$

$=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt$

$=\frac{1}{2}t^4\arctan t-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3-t+\arctan t\right)+C$

$=\frac{1}{2}(x^2-1)\arctan\sqrt{x}-\frac{1}{6}\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}\sqrt{x}+C.$

42.【解】$\int\frac{x\arctan x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\arctan x\,d(\sqrt{1+x^2})$

$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$=\sqrt{1+x^2}\arctan x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

43.【解】令$\sqrt{x}=t$，则

$\int\arctan(1+\sqrt{x})dx=\int\arctan(1+t)d(t^2)=t^2\arctan(1+t)-\int\frac{t^2}{1+(1+t)^2}dt$

$=t^2\arctan(1+t)-\int\left(1-\frac{2t+2}{t^2+2t+2}\right)dt$

$=t^2\arctan(1+t)-t+\ln(t^2+2t+2)+C$

$=x\arctan(1+\sqrt{x})-\sqrt{x}+\ln(x+2\sqrt{x}+2)+C.$

**44.【解】**$\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2x}\mathrm{d}x=-\int\ln\sin x\,\mathrm{d}(\cot x)=-\cot x\ln\sin x+\int\cot x\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$

$$=-\cot x\ln\sin x+\int(\csc^2x-1)\mathrm{d}x=-\cot x\ln\sin x-\cot x-x+C.$$

**45.【解】**$\int\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}(1-x)}{2\sqrt{1-x}}+\int\frac{\mathrm{d}(1+x)}{2\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin x+C.$$

**46.【解】**$\int\frac{1+\cos x}{1+\sin^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+\sin^2x}\mathrm{d}x+\int\frac{\cos x}{1+\sin^2x}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\sec^2x}{\sec^2x+\tan^2x}\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1+\sin^2x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\tan x)}{1+(\sqrt{2}\tan x)^2}+\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1+\sin^2x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+\arctan(\sin x)+C.$$

**47.【解】**令$\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$，则$x=\ln(1+t^2)$，$\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，

则$\int\frac{x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}=\int\frac{(1+t^2)\ln(1+t^2)}{t}\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$=2\int\ln(1+t^2)\mathrm{d}t=2t\ln(1+t^2)-2\int\frac{2t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2t\ln(1+t^2)-4\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t=2t\ln(1+t^2)-4t+4\arctan t+C$$

$$=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$$

**48.【解】**$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int\frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}+1}}=-\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2)}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\xlongequal{t^2=u}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+u+1}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}+1}\right]+C.$$

**49.【解】** $\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$=\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{3}{2}}+C.$$

**50.【解】** $\int\frac{x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}-\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\arcsin x=-\left(1+\frac{x}{2}\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C.$$

**51.【解】** $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^4}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^4}{t^2+1}\mathrm{d}t$

$$=-\int\frac{(t^4-1)+1}{t^2+1}\mathrm{d}t=-\int\left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{t^3}{3}+t-\arctan t+C=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C.$$

**52.【解】** 由 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}=\ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$，得 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$，

再由 $f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x$，得 $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$，

所以 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=x+2\ln|x-1|+C.$

**53.【解】** 由 $f(\ln x)=\begin{cases}1,x<1,\\x,x\geqslant1,\end{cases}$ 得 $f(x)=\begin{cases}1,\ x<0,\\\mathrm{e}^x,x\geqslant0,\end{cases}$ 于是 $\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C_1,x<0,\\\mathrm{e}^x+C_2,x\geqslant0,\end{cases}$

由 $C_1=1+C_2$，取 $C_2=C$ 得 $\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C+1, & x<0,\\\mathrm{e}^x+C, & x\geqslant0.\end{cases}$

**54.【解】** $\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$=\int\frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

**55.【解】** $\int\frac{1}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{1+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C.$

**56.【解】** $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\int t\cos^2t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int t(1+\cos2t)\mathrm{d}t$

$$=\frac{t^2}{4}+\frac{1}{4}\int t\,\mathrm{d}(\sin2t)=\frac{t^2}{4}+\frac{1}{4}\left(t\sin2t-\int\sin2t\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t\sin2t+\frac{1}{8}\cos2t+C$$

$$=\frac{1}{4}\arcsin^2x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

57.【解】$\int\frac{\ln x}{\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x=2\int\ln x\,\mathrm{d}(\sqrt{x-2})=2\sqrt{x-2}\ln x-2\int\frac{\sqrt{x-2}}{x}\mathrm{d}x$,

因为 $\int\frac{\sqrt{x-2}}{x}\mathrm{d}x\overset{\sqrt{x-2}=t}{=}2\int\frac{t^2}{2+t^2}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{2}{2+t^2}\right)\mathrm{d}t$

$$=2t-\frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C=2\sqrt{x-2}-2\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}+C,$$

所以 $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x=2\sqrt{x-2}\ln x-4\sqrt{x-2}+4\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}+C.$

58.【解】$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{1}{x-t}}=\lim\limits_{t\to x}\left[\left(1+\frac{x-t}{t-1}\right)^{\frac{t-1}{x-t}}\right]^{\frac{1}{t-1}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$,则

$$\int\frac{f(x)}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=-\int\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-1}\right)=-\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}+C.$$

59.【解】(1)$\varphi'(x)=-2\ln(1+\cos^2 2x)\sin2x-\ln(1+\sin^2x)\cos x.$

(2)$F'(x)=\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$, $F''(x)=\frac{2x\sin(x^2)}{1+x^4}.$

# 五、定积分及其应用

## Ⅰ 入门练习

1.【解】由 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$ 得

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$

2.【解】$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{1-\sin^2x}\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2x\,\mathrm{d}x=2\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2.$$

3.【解】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\cos^2t\,\mathrm{d}t-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}(\cos x+1)\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}$

$$=-\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=-\frac{1}{3}.$$

4.【解】由 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$ 得

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{x-\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2.$$

5.【解】由 $\int_{-x}^x[f(t+x)+f(t-x)]\mathrm{d}t=\int_{-x}^x f(t+x)\mathrm{d}(t+x)+\int_{-x}^x f(t-x)\mathrm{d}(t-x)$

$$=\int_0^{2x}f(u)\mathrm{d}u+\int_{-2x}^0 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_0^{-2x}f(u)\mathrm{d}u \text{ 得}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-x}^x[f(t+x)+f(t-x)]\mathrm{d}t=2f(2x)-(-2)f(-2x)=2[f(2x)+f(-2x)].$$

6.【解】由 $\int_0^x x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t=x\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} x\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u\right)=\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u+x\sin x^2.$$

7.【解】(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{n+i}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln2.$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{i}{n^2+i^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln2.$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin^2\frac{\pi}{n}+2\sin^2\frac{2\pi}{n}+\cdots+n\sin^2\frac{n\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{i}{n^2}\sin^2\frac{\pi i}{n}$

$$=\int_0^1 x\sin^2\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_0^1\pi x\sin^2\pi x\mathrm{d}(\pi x)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi x\sin^2x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\times\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}.$$

8.【解】$\int_0^\pi\sqrt{1-\sin2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^\pi|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x$

$$=\sqrt{2}\int_0^\pi\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\mathrm{d}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|\sin x|\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{2}\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=2\sqrt{2}.$$

9.【解】$\int_{-\pi}^\pi(|x|+x^3)\sin^2x\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^\pi|x|\sin^2x\mathrm{d}x=2\int_0^\pi x\sin^2x\mathrm{d}x$

$$=2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\sin^2x\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\mathrm{d}x=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$$

*10.*【解】$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x(1+\sin x)}{1+\cos^2 x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

$$=2\times\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}=-2\pi\arctan\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-2\pi\left(0-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{2}.$$

*11.*【解】$\int_0^{2\pi}x\mid\sin x\mid dx=\int_0^{\pi}x\mid\sin x\mid dx+\int_{\pi}^{2\pi}x\mid\sin x\mid dx$,

$\int_0^{\pi}x\mid\sin x\mid dx=\int_0^{\pi}x\sin x dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{\pi}{2}\times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\pi$,

$\int_{\pi}^{2\pi}x\mid\sin x\mid dx\xlongequal{x-\pi=t}\int_0^{\pi}(\pi+t)\mid\sin t\mid dt=\pi\int_0^{\pi}\sin t dt+\int_0^{\pi}t\sin t dt=2\pi+\pi=3\pi$,

则$\int_0^{2\pi}x\mid\sin x\mid dx=4\pi$.

*12.*【解】$\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{1+\cos t}\right)dt$

$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dt=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\tan\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

*13.*【解】$\int_0^1 xf'(2x)dx=\frac{1}{4}\int_0^1 2xf'(2x)d(2x)=\frac{1}{4}\int_0^2 xf'(x)dx=\frac{1}{4}\int_0^2 xd[f(x)]$

$$=\frac{1}{4}xf(x)\Big|_0^2-\frac{1}{4}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}f(2)-\frac{1}{4}\int_0^2 f(x)dx=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1.$$

*14.*【解】$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=-\int_0^{+\infty}\sin^2 x d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx$,

因为
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}=0,\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}=0,$$

所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d(2x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

*15.*【解】取$[x,x+dx]\subset[0,2]$,

$dV=2\pi xy dx=2\pi x\sqrt{2x-x^2}dx$,则

$$V=2\pi\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=2\pi\int_0^2[1+(x-1)]\sqrt{1-(x-1)^2}d(x-1)$$

$$=2\pi\int_{-1}^1(1+x)\sqrt{1-x^2}dx=2\pi\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}dx=4\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$$

$$\xlongequal{x=\sin t}4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\cos t dt=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=4\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\pi^2.$$

## ◇ 解答题

*16.*【解】(1)$\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int_1^2\frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}=2\int_1^2\frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}$

$$=2\arctan\sqrt{x}\Big|_1^2=2\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}.$$

(2) $\int_0^{\pi}(\sin^2x+\cos^3x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin^2x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}\cos^3x\mathrm{d}x$,

而 $\int_0^{\pi}\sin^2x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\mathrm{d}x=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$;

$\int_0^{\pi}\cos^3x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos^2x\mathrm{d}(\sin x)=\int_0^{\pi}(1-\sin^2x)\mathrm{d}(\sin x)=\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x\right)\Big|_0^{\pi}=0$,

故 $\int_0^{\pi}(\sin^2x+\cos^3x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

**17.** (1)【证明】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x\xlongequal{x+t=\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\cos t)(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$.

$I=\int_0^1\frac{x^2}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2t\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$，由 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$ 得

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2t\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2t\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t$，则

$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2t\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2t\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}(\sin t)$

$=\frac{1}{2}\sin^2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$，故 $I=\int_0^1\frac{x^2}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

(2)【解】$\int_0^{\pi}x\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\mathrm{d}x=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$.

**18.**【证明】$\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x+t=a+b}\int_b^af(a+b-t)(-\mathrm{d}t)=\int_a^bf(a+b-t)\mathrm{d}t$

$=\int_a^bf(a+b-x)\mathrm{d}x$.

**19.**【证明】$\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=a+(b-a)t}\int_0^1f[a+(b-a)t]\cdot(b-a)\mathrm{d}t$

$=(b-a)\int_0^1f[a+(b-a)t]\mathrm{d}t=(b-a)\int_0^1f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x$.

**20.**【解】$\int_0^2f(x-1)\mathrm{d}x=\int_0^2f(x-1)\mathrm{d}(x-1)=\int_{-1}^1f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$,

由 $\int_{-1}^0\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{-1}^0=\frac{\pi}{4}$,

$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=\ln2-\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=2\ln2-1$ 得

$$\int_0^2f(x-1)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+2\ln2-1.$$

**21.**【解】(1) $\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1)=\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

$\xlongequal{x=\sin t}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\cos t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

(2) $\int_{-1}^1(x^2+\sin x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^1x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{x=\sin t} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)\cos^2 t\,dt$$

$$=2(I_2-I_4)=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}.$$

(3) $I=\int_0^1 \frac{x^2}{x+\sqrt{1-x^2}}dx \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t\cos t}{\sin t+\cos t}dt$,

因为 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t\sin t}{\cos t+\sin t}dt$,

所以 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t\cos t}{\sin t+\cos t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t\sin t}{\cos t+\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t\cos t+\cos^2 t\sin t}{\sin t+\cos t}dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,d(\sin t)=\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.$$

**22.【解】** $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)d(x^3)=\frac{1}{3}x^3 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 e^{-x^2}dx$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 x^2 e^{-x^2}d(x^2)=-\frac{1}{6}\int_0^1 xe^{-x}dx=\frac{1}{6}\int_0^1 x\,d(e^{-x})$$

$$=\frac{1}{6}xe^{-x}\Big|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1 e^{-x}dx=\frac{1}{3e}-\frac{1}{6}.$$

**23.【解】** 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-0)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}=1$ 且 $\alpha=\frac{1}{2}<1$,

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}=1$ 且 $\alpha=\frac{3}{2}>1$,

所以广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ 收敛,且

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}=2\int_0^{+\infty}\frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}=2\arctan\sqrt{x}\Big|_0^{+\infty}=\pi.$$

**24.【解】** 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-0)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1$ 且 $\alpha=\frac{1}{2}<1$,

又因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{x}}=1$ 且 $\alpha=\frac{1}{2}<1$,

所以广义积分 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ 收敛,且

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=2\int_0^1\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}=2\int_0^1\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}\Big|_0^1=\pi.$$

**25.【解】**(1) $\int_0^{+\infty}x^2e^{-2x}dx=\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}(2x)^2e^{-2x}d(2x)\xlongequal{2x=t}\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}t^2e^{-t}dt=\frac{1}{8}\Gamma(3)=\frac{1}{4}.$

(2) $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx\xlongequal{x^2=t}\int_0^{+\infty}te^{-t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$

**26.【解】** 椭圆位于第一象限的曲线方程为

$$L_1: y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant a),$$

则椭圆所围成的面积为

$$S=4\int_0^a y\mathrm{d}x=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x=a\sin t}\frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab.$$

**27.【解】**(1) 区域 $D$ 的面积为

$$A=\int_0^2 y\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1)$$

$$=\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=\sin t}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\cos t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

(2) 区域 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周而成的几何体体积为

$$V=\pi\int_0^2 y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2(2x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi.$$

(3) 取$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,2]$,

$$\mathrm{d}V=2\pi(2-x)y\mathrm{d}x=2\pi(2-x)\cdot\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x,$$

所求的体积为

$$V=2\pi\int_0^2(2-x)\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=2\pi\int_0^2[1-(x-1)]\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1)$$

$$=2\pi\int_{-1}^1(1-x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2\pi\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=4\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=\sin t}4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\cos t\mathrm{d}t=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=4\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi^2.$$

## Ⅱ 基础练习

### ◇ 填空题

**1.【解】**由$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$ 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u]$$

$$=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$$

故$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=f(x)$.

**2.【解】** 

$$F(x+T)=\int_0^{x+T}f(t)\mathrm{d}t+b(x+T)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+bx+\int_x^{x+T}f(t)\mathrm{d}t+bT$$

$$=F(x)+\int_x^{x+T}f(t)\mathrm{d}t+bT=F(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+bT,$$

由 $F(x+T)=F(x)$,得 $b=-\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

3.【解】因为 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数,所以 $x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数,

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}[x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})+(x^2+1)\sqrt{1-x^2}]dx\\&=\int_{-1}^{1}(x^2+1)\sqrt{1-x^2}dx=2\int_0^1(x^2+1)\sqrt{1-x^2}dx\\&=2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx+2\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx,\end{aligned}$$

而 $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx\overset{x=\sin t}{=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2t-\sin^4t)dt=I_2-I_4=\frac{\pi}{16}$,

$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$,所以原式 $=2\times\frac{\pi}{4}+2\times\frac{\pi}{16}=\frac{5\pi}{8}$.

4.【解】因为 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{x}{1-x}}=1$ 且 $\frac{1}{2}<1$,所以广义积分 $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$ 收敛.

**方法一** 令 $\sqrt{\frac{x}{1-x}}=t$,则 $x=1-\frac{1}{1+t^2}$,$dx=\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$,

则 $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx\overset{x=\tan t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2t}{\sec^4t}\cdot\sec^2t\,dt$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\,dt=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

**方法二** 令 $\sqrt{\frac{x}{1-x}}=t$,则 $x=1-\frac{1}{1+t^2}$,$dx=\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$,

则 $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt=-\int_0^{+\infty}t\,d\left(\frac{1}{1+t^2}\right)=-\frac{t}{1+t^2}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$

$$=\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

**方法三** $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int_0^1\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}d\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-x^2}}dx=\arcsin2x\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

**方法四** 令 $x=\sin^2t$,则 $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\cos t}\cdot2\sin t\cos t\,dt$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\,dt=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

5.【解】 $\int_0^{\pi}x\sqrt{\sin^2x-\sin^4x}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2x-\sin^4x}\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2x-\sin^4x}\,dx$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,d(\sin x)=\frac{\pi}{2}.$$

6.【解】令 $\int_1^{+\infty}f(x)dx=A$，则由 $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^4}\int_1^{+\infty}f(x)dx$，得

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx-\frac{A}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx=1-\frac{A}{6},\text{解得 }A=\frac{6}{7},\text{所以 }f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{7x^4}.$$

7.【解】$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1f(x)d\sqrt{x}=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}f'(x)dx$

$$=-2\int_0^1\sqrt{x}\cdot e^{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=-\int_0^1e^{-x}dx=e^{-1}-1.$$

8.【解】 $\int_0^1xf''(2x)dx=\frac{1}{4}\int_0^12xf''(2x)d(2x)\overset{2x=t}{=}\frac{1}{4}\int_0^2tf''(t)dt=\frac{1}{4}\int_0^2t\,df'(t)$

$$=\frac{1}{4}\left[tf'(t)\Big|_0^2-\int_0^2f'(t)dt\right]=\frac{1}{4}\left(10-f(t)\Big|_0^2\right)=2.$$

9.【解】$\int_{-1}^5f(x-1)dx=\int_{-1}^5f(x-1)d(x-1)=\int_{-2}^4f(x)dx$

$$=\int_{-2}^0f(x)dx+\int_0^4f(x)dx=\int_{-2}^0\frac{1}{4+x^2}dx+\int_0^4\frac{1}{1+2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-2}^0+\frac{1}{2}\ln(1+2x)\Big|_0^4=\frac{\pi}{8}+\ln3.$$

10.【解】令 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^ax}$，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^ax}\overset{\frac{\pi}{2}-x=t}{=\!=\!=}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{-dt}{1+\cot^at}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cot^ax},$$

则 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^ax}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cot^ax}=\frac{\pi}{2}$，故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^ax}=\frac{\pi}{4}$.

11.【解】$\int_0^{+\infty}x^7e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^6e^{-x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma(4)=\frac{3!}{2}=3.$

12.【解】$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{2-x}}=\int_1^{+\infty}\frac{e^xdx}{e^{2x}+e^2}=\frac{1}{e}\int_1^{+\infty}\frac{e^{x-1}dx}{e^{2(x-1)}+1}$

$$=\frac{1}{e}\arctan e^{x-1}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4e}.$$

13.【解】$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2x}=\int_e^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=1.$

## ◇ 选择题

14.【解】$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4x\,dx=0$，

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3x+\cos^4x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\,dx>0,$$

$$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3x-\cos^4x)dx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\,dx<0,$$

$P<M<N$,选(D).

15.【解】当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$F(x)=\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}$;

当 $1<x\leqslant 2$ 时,$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t+\int_1^x(2-t)\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{3}+2x-2-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2},$$

选(B).

16.【解】由 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=1$ 且 $\alpha=\frac{4}{3}>1$ 得 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4}}$ 发散,

同理 $\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4}}$ 发散,故 $\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4}}$ 发散,应选(B).

17.【解】因为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为单调减少的凹函数,根据几何意义,$S_2<S_1<S_3$,选(B).

18.【解】曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 $x$ 轴的三个交点为 $x=0,x=1,x=2$,

当 $0<x<1$ 时,$y<0$;当 $1<x<2$ 时,$y>0$,所以围成的面积可表示为(C)的形式,选(C).

19.【解】双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 的极坐标形式为 $r^2=\cos2\theta$,再根据对称性,有

面积 $A=4\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\mathrm{d}\theta$,选(A).

20.【解】由元素法的思想,对 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[a,b]$,

$\mathrm{d}V=\{\pi[m-g(x)]^2-\pi[m-f(x)]^2\}\mathrm{d}x=\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$,

则 $V=\pi\int_a^b[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$,选(B).

21.【解】取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,h]$, $\mathrm{d}F=\rho g\times x\times a\times\mathrm{d}x=\rho gax\mathrm{d}x$,

则 $F=\rho g\int_0^h ax\mathrm{d}x=\rho g\int_0^h ah\mathrm{d}h$,选(A).

22.【解】过曲线 $y=(x-1)^2$ 上点 $(2,1)$ 的法线方程为 $y=-\frac{1}{2}x+2$,该法线与 $x$ 轴的交点为 $(4,0)$,则由该法线、$x$ 轴及该曲线所围成的区域 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得的几何体的体积为 $V=\pi\int_1^2(x-1)^4\mathrm{d}x+\pi\int_2^4\left(-\frac{1}{2}x+2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{3}=\frac{13\pi}{15}$,选(D).

## ◇ 解答题

23.【解】$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0 f(x-u)g(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(x-u)g(u)\mathrm{d}u$,

(1) 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x(x-u)\sin u\mathrm{d}u=x-\sin x$;

(2) 当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时,$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-u)\sin u\mathrm{d}u=x-1$,

于是 $\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=\begin{cases}x-\sin x,0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ x-1,\quad x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

24.【解】因为 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数，

所以 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sin^2 x]\cos^2 x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\,dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\sin^2 x)dx=2(I_2-I_4)$

$=2(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{8}.$

25.【证明】(1) 设 $f(-x)=f(x)$，

因为 $F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)dt\overset{t=-u}{=\!=}\int_0^x(-x+2u)f(-u)(-du)$

$=\int_0^x(x-2u)f(u)du=F(x)$，

所以 $F(x)$ 为偶函数.

(2) $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt$，

$F'(x)=\int_0^x f(t)dt-xf(x)=x[f(\xi)-f(x)]$，其中 $\xi$ 介于 0 与 $x$ 之间，

当 $x<0$ 时，$x\leqslant\xi\leqslant 0$，因为 $f(x)$ 单调不增，所以 $F'(x)\geqslant 0$，

当 $x\geqslant 0$ 时，$0\leqslant\xi\leqslant x$，因为 $f(x)$ 单调不增，所以 $F'(x)\geqslant 0$，

从而 $F(x)$ 单调不减.

26.【解】$\int_{-2}^2(3x+1)\max\{2,x^2\}dx=\int_{-2}^2\max\{2,x^2\}dx=2\int_0^2\max\{2,x^2\}dx$，

由 $\max\{2,x^2\}=\begin{cases}2, & 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2},\\ x^2, & \sqrt{2}<x\leqslant 2\end{cases}$ 得

$\int_{-2}^2(3x+1)\max\{2,x^2\}dx=2\int_0^{\sqrt{2}}2dx+2\int_{\sqrt{2}}^2 x^2dx=4\sqrt{2}+\frac{2(8-2\sqrt{2})}{3}=\frac{8(2+\sqrt{2})}{3}.$

27.【解】由定积分的奇偶性得

$\int_{-1}^1(|x|+x)e^{-|x|}dx=\int_{-1}^1|x|e^{-|x|}dx=2\int_0^1 xe^{-x}dx$

$=-2\int_0^1 x\,d(e^{-x})=-2xe^{-x}\Big|_0^1+2\int_0^1 e^{-x}dx$

$=-2e^{-1}-2e^{-x}\Big|_0^1=2-\frac{4}{e}.$

28.【解】$\int_0^{2\pi}f(x-\pi)dx=\int_0^{2\pi}f(x-\pi)d(x-\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$

$=\int_{-\pi}^0\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_0^{\pi}x\sin^2 x\,dx=-\arctan(\cos x)\Big|_{-\pi}^0+\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$

$=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\times 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\times 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}.$

29.【解】(1) 方法一

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{2+\sin x}+x^2\sin x\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2+\sin x}dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(2+\sin x)}{2+\sin x}=\ln(2+\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln 3.$$

**方法二**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{2+\sin x}+x^2\sin x\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2+\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{2+\sin x}+\frac{\cos x}{2-\sin x}\right)dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{4-\sin^2 x}dx$$

$$=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x-4}=-\ln\left|\frac{\sin x-2}{\sin x+2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\ln 3.$$

(2) 令$\sqrt{e^x-1}=t$，则 $x=\ln(1+t^2)$，

于是$\int_0^{\ln 5}\sqrt{e^x-1}\,dx=\int_0^2 t\cdot\frac{2t}{1+t^2}dt=2\int_0^2\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=4-2\arctan 2.$

(3) **方法一**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin x+\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{\sin x+\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

**方法二**

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}dx\overset{x+t=\frac{\pi}{2}}{=}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos t-\sin t}{1+\sin 2t}(-dt)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t-\sin t}{1+\sin 2t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}dx=-I,$$

则$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}dx=0.$

(4)$\int_{-2}^2\left(x^3\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

$$=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx\overset{x=2\sin t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t\,dt=4\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\pi.$$

(5)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}dx$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-1+\frac{2}{1+\cos x}\right)dx=-\pi+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}$$

$$=-\pi+4\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4-\pi.$$

(6)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(\cos x+2\sin x)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 x\,dx}{(1+2\tan x)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1+2\tan x)}{(1+2\tan x)^2}$

$$=-\frac{1}{2(1+2\tan x)}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.$$

(7)$\int_{-1}^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx\overset{x=\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{1+\cos t}\cdot\cos t\,dt$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 t-\frac{\sin^2 t}{1+\cos t}\right)dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos^2 t}{1+\cos t}dt$$

$$=\frac{\pi}{2}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos t)dt=\frac{\pi}{2}-\pi+2=2-\frac{\pi}{2}.$$

(8) $\int_0^{\pi}\frac{x\,|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}dx$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin^2 x)}{1+\sin^4 x}$$

$$=\frac{\pi}{2}\arctan(\sin^2 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}.$$

**30.【解】** $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{|\ln x|}{x}dx=\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,d(\ln x)\overset{t=\ln x}{=}\int_{-1}^{1}|t|\,dt=2\int_0^1 t\,dt=1.$

**31.【解】** $\int_0^{n\pi}x\,|\cos x|\,dx=\int_0^{\pi}x\,|\cos x|\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}x\,|\cos x|\,dx+\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\,|\cos x|\,dx,$

$\int_0^{\pi}x\,|\cos x|\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\pi,$

$\int_{\pi}^{2\pi}x\,|\cos x|\,dx\overset{x-\pi=t}{=\!=}\int_0^{\pi}(t+\pi)\,|\cos t|\,dt=\int_0^{\pi}t\,|\cos t|\,dt+\pi\int_0^{\pi}|\cos t|\,dt=\pi+2\pi=3\pi,$

$\int_{2\pi}^{3\pi}x\,|\cos x|\,dx\overset{x-2\pi=t}{=\!=}\int_0^{\pi}(t+2\pi)\,|\cos t|\,dt=\int_0^{\pi}t\,|\cos t|\,dt+2\pi\int_0^{\pi}|\cos t|\,dt=5\pi,$

则 $\int_0^{n\pi}x\,|\cos x|\,dx=\pi+3\pi+\cdots+(2n-1)\pi=n^2\pi.$

**32.【解】** $\int_0^1\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}\overset{x=\tan t}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t}{(1+\tan t)\cdot\sec t}dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\sin t+\cos t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\csc\left(t+\frac{\pi}{4}\right)d\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\cot\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\ln(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}=\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

**33.【解】** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+e^{\sin^2 x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\sin^2 x)}{1+e^{\sin^2 x}}=\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}$

$$=\int_0^1\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}=-\int_0^1\frac{d(e^{-x}+1)}{e^{-x}+1}=-\ln(e^{-x}+1)\Big|_0^1=\ln\frac{2e}{e+1}.$$

**34.【解】** 令 $\int_{-\pi}^{\pi}xf(x)dx=A$，则 $f(x)=\sin^3 x+A$，

$xf(x)=x\sin^3 x+Ax$ 两边积分得 $\int_{-\pi}^{\pi}xf(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3 x\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}Ax\,dx,$

即 $A=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^3 x\,dx=2\int_0^{\pi}x\sin^3 x\,dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^3 x\,dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\frac{4\pi}{3},$

从而 $f(x)=\sin^3 x+\frac{4\pi}{3},$

故 $\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}\left(\sin^3 x+\frac{4\pi}{3}\right)dx=\int_0^{\pi}\sin^3 x\,dx+\frac{4\pi}{3}\int_0^{\pi}dx=\frac{4}{3}(1+\pi^2).$

35.【解】令$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x = A$，则 $f(x) = \dfrac{x}{1+\cos^2 x} + A$，

于是 $f(x)\sin x = \dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x} + A\sin x$，两边从 $-\pi$ 到 $\pi$ 积分得

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= -\pi\arctan\cos x\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2},$$

则 $f(x) = \dfrac{x}{1+\cos^2 x} + \dfrac{\pi^2}{2}$.

36.【解】$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x^3) = \dfrac{1}{3}x^3 f(x)\Big|_0^1 - \dfrac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{6}\left(t\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{6}(2\mathrm{e}^{-1} - 1).$$

37.【证明】显然 $f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$，

则 $$f^2(x) = \left[\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2 = \left[\int_0^x 1\cdot f'(t)\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \int_0^x 1^2\mathrm{d}t\cdot\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t$$

$$x\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t \leqslant x\int_0^1 f'^2(t)\mathrm{d}t = x\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

故 $$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

38.【解】$\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2+3x^4}} \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t^4}}} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+3}}$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}(t^2)}{\sqrt{t^4+t^2+3}} \overset{t^2=u}{=} \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+u+3}} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{u^2+u+3}\right]\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{11}{2\sqrt{5}+3} = \frac{1}{2}\ln(2\sqrt{5}-3).$$

39.【解】$\displaystyle\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \overset{x=\sin t}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t = I_4 - I_6$

$$= \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{1}{6}\times\frac{3}{16}\pi = \frac{\pi}{32}.$$

40.【解】$\displaystyle\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^1 (2x)^2 f''(2x)\mathrm{d}(2x) = \frac{1}{8}\int_0^2 x^2 f''(x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{8}\int_0^2 x^2\mathrm{d}[f'(x)] = \frac{1}{8}\left[x^2 f'(x)\Big|_0^2 - 2\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x\right] = -\frac{1}{4}\int_0^2 x\mathrm{d}f(x)$$

$$=-\frac{1}{4}\left[xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right]=-\frac{1}{4}[2f(2)-1]=0.$$

41.【解】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+f^2(x)}\mathrm{d}f(x)=\arctan f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\arctan f\left(\frac{\pi}{2}\right)$,

因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t=\arctan\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$,所以原式等于 $\arctan\frac{\pi}{4}$.

42.【解】$\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=xy(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\arctan(x-1)^2\mathrm{d}x$

$$=y(1)-\int_0^1(x-1)\arctan(x-1)^2\mathrm{d}(x-1)-\int_0^1\arctan(x-1)^2\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\arctan(x-1)^2\mathrm{d}(x-1)^2=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(t\arctan t\Big|_0^1-\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$$

43.【解】$\int_0^1 t^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}(t^3)=\frac{t^3}{3}f(t)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 t^3\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$,

因为 $f(1)=0$,所以

$$\int_0^1 t^2 f(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{3}\int_0^1 t^3\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{6}\int_0^1 t^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}(t^2)$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}(x-1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1=-\frac{1}{6}.$$

44.【解】$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}(\sin x)=f(x)\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\sin x\mathrm{d}x$

$$=-\int_0^\pi f'(x)\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^\pi \mathrm{e}^{\cos x}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi\mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=\mathrm{e}^{\cos x}\Big|_0^\pi=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}.$$

45.【解】因为 $f(x)$ 为偶函数,所以只研究 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 内的最大值与最小值即可.

令 $f'(x)=2x(2-x^2)\mathrm{e}^{-x^2}=0$,得 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内的唯一驻点为 $x=\sqrt{2}$,

当 $x\in(0,\sqrt{2})$ 时,$f'(x)>0$,当 $x\in(\sqrt{2},+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,注意到驻点的唯一性,

则 $x=\sqrt{2}$ 及 $x=-\sqrt{2}$ 时函数 $f(x)$ 取最大值,最大值为 $f(\sqrt{2})=f(-\sqrt{2})=1+\frac{1}{\mathrm{e}^2}$,

因为 $f(+\infty)=f(-\infty)=\int_0^{+\infty}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1$ 及 $f(0)=0$,所以最小值为 0.

46.【解】$\int_{-1}^1\frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^1 x(\sqrt{x^2+1}-x)\mathrm{d}x=-2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}.$$

47.【解】$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}=\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}}$

$$\xlongequal{x-1=\sec t}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec^4 t\tan t}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\cos t\mathrm{d}t=\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

48.【解】$\int_{-1}^{1}(2+\sin x)\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=4\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$\overset{x=\sin t}{=}4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\cos t\,dt=4\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\pi.$$

49.【解】$x=1$ 为被积函数的无穷间断点,则

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}=\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2-x}\right|\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}=\ln(2+\sqrt{3}),$$

原式 $=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$.

50.【证明】令 $g(x)=\int_{a}^{x}f(t)dt-\int_{x}^{b}f(t)dt$,

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$,

所以 $g(a)=-\int_{a}^{b}f(t)dt<0$, $g(b)=\int_{a}^{b}f(t)dt>0$,

由零点定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $g(\xi)=0$,即 $\int_{a}^{\xi}f(x)dx=\int_{\xi}^{b}f(x)dx$.

51.(1)【证明】令 $I=\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx$,则

$$I=\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx\overset{\pi-x=t}{=\!=\!=}\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)(-dt)=\int_{0}^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=\int_{0}^{\pi}(\pi-x)f(\sin x)dx=\pi\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx-\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx$$

$$=\pi\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx-I,$$

则 $I=\int_{0}^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$.

(2)【证明】$\int_{0}^{2\pi}f(|\sin x|)dx=\int_{-\pi}^{\pi}f(|\sin x|)dx=2\int_{0}^{\pi}f(|\sin x|)dx$

$$=2\int_{0}^{\pi}f(\sin x)dx=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx.$$

(3)【解】$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{3\sin^2x+4\cos^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin x}{3\sin^2x+4\cos^2x}dx$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{3\sin^2x+4\cos^2x}dx=-\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos x)}{3+\cos^2x}$$

$$=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}.$$

52.【证明】$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n x\,dx = 2^{-n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n 2x\,d(2x) = 2^{-n-1}\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx = 2^{-n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

53.【证明】由 $|f(x)| = |f(x)-f(1)| \leqslant |\arctan x - \arctan 1| = \left|\arctan x - \frac{\pi}{4}\right|$ 得

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\,dx \leqslant \int_0^1 \left|\arctan x - \frac{\pi}{4}\right| dx = \int_0^1\left(\frac{\pi}{4} - \arctan x\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \arctan x\,dx = \frac{\pi}{4} - x\arctan x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

54. (1)【解】$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b x\,df^2(x) = \frac{x}{2}f^2(x)\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx = -\frac{1}{2}$.

(2)【证明】$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\int_a^b xf(x)f'(x)dx\right)^2 = \frac{1}{4} \leqslant \int_a^b f'^2(x)dx\int_a^b x^2f^2(x)dx$.

55.【证明】令 $\varphi(x) = x^2 f(x)$，

由积分中值定理得 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)dx = c^2 f(c)$，其中 $c \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$，即 $\varphi(c) = \varphi(1)$，

显然 $\varphi(x)$ 在区间$[0,1]$上可导，由罗尔中值定理，存在 $\xi \in (c,1) \subset (0,1)$，使得 $\varphi'(\xi) = 0$.

而 $\varphi'(x) = 2xf(x) + x^2f'(x)$，所以 $2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 0$，注意到 $\xi \neq 0$，故 $2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$.

56.【分析】由 $f(x)\int_x^b g(t)dt = g(x)\int_a^x f(t)dt$ 得 $g(x)\int_a^x f(t)dt + f(x)\int_b^x g(t)dt = 0$，即 $\left(\int_a^x f(t)dt\int_b^x g(t)dt\right)' = 0$，则辅助函数为 $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt\int_b^x g(t)dt$.

【证明】令 $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt\int_b^x g(t)dt$，显然 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上可导，又 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$，

由罗尔定理，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\varphi'(\xi) = 0$，而 $\varphi'(x) = f(x)\int_b^x g(t)dt + g(x)\int_a^x f(t)dt$，

所以 $f(\xi)\int_b^\xi g(x)dx + g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx = 0$，即 $f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx = g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx$.

57.【证明】令 $F(x) = \int_0^x f(t)\sin t\,dt$，因为 $F(0) = F(\pi) = 0$，所以存在 $x_1 \in (0,\pi)$，使得 $F'(x_1) = 0$，即 $f(x_1)\sin x_1 = 0$，又因为 $\sin x_1 \neq 0$，所以 $f(x_1) = 0$.

设 $x_1$ 是 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内唯一的零点，则当 $x \in (0,\pi)$ 且 $x \neq x_1$ 时，有 $\sin(x-x_1)f(x)$ 恒正或恒负，于是 $\int_0^\pi \sin(x-x_1)f(x)dx \neq 0$.

而 $\int_0^\pi \sin(x-x_1)f(x)dx = \cos x_1\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx - \sin x_1\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = 0$，矛盾，所以 $f(x)$ 在$(0,\pi)$内至少有两个零点. 不妨设 $f(x_1) = f(x_2) = 0$，$x_1, x_2 \in (0,\pi)$ 且 $x_1 < x_2$，由罗尔中值定理，存在 $\xi \in (x_1,x_2) \subset (0,\pi)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

58.【证明】由微分中值定理得 $f(x) - f(0) = f'(\xi_1)x$，其中 $0 < \xi_1 < x$，

$f(x) - f(2) = f'(\xi_2)(x-2)$，其中 $x < \xi_2 < 2$，于是 $\begin{cases} |f(x)| \leqslant 2x, \\ |f(x)| \leqslant 2(2-x), \end{cases}$

从而 $\left|\int_0^2 f(x)dx\right| \leqslant \int_0^2 |f(x)|\,dx = \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_1^2 |f(x)|\,dx$

$$\leqslant \int_0^1 2x\mathrm{d}x + \int_1^2 2(2-x)\mathrm{d}x = 2.$$

**59.**【证明】令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 在$[a,b]$上三阶连续可导，取 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$，由泰勒公式得

$F(a)=F(x_0)+F'(x_0)(a-x_0)+\dfrac{F''(x_0)}{2!}(a-x_0)^2+\dfrac{F'''(\xi_1)}{3!}(a-x_0)^3,\xi_1\in(a,x_0)$，

$F(b)=F(x_0)+F'(x_0)(b-x_0)+\dfrac{F''(x_0)}{2!}(b-x_0)^2+\dfrac{F'''(\xi_2)}{3!}(b-x_0)^3,\xi_2\in(x_0,b)$，

两式相减得 $F(b)-F(a)=F'(x_0)(b-a)+\dfrac{(b-a)^3}{48}[F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)]$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)],$$

因为 $f''(x)$ 在$[a,b]$上连续，所以存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$，使得

$f''(\xi)=\dfrac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$，从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

**60.**【证明】(1)$S_1(c)=cf(c)$，$S_2(c)=\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t=-\int_1^c f(t)\mathrm{d}t$，即证明 $S_1(c)=S_2(c)$，或 $cf(c)+\int_1^c f(t)\mathrm{d}t=0$. 令 $\varphi(x)=x\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，$\varphi(0)=\varphi(1)=0$，根据罗尔定理，存在 $c\in(0,1)$，使得 $\varphi'(c)=0$，即 $cf(c)+\int_1^c f(t)\mathrm{d}t=0$，所以 $S_1(c)=S_2(c)$，命题得证.

(2) 令 $h(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$，因为 $h'(x)=2f(x)+xf'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在$[0,1]$上为单调函数，所以(1) 中的 $c$ 是唯一的.

**61.**【解】$V_x=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\mathrm{d}x=2\pi\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi^2}{2}$.

取$[x,x+\mathrm{d}x]\subset\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，则 $\mathrm{d}V_y=2\pi x\cos x\mathrm{d}x$，

故 $V_y=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\mathrm{d}x$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}(\sin x)=2\pi\left(x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x\right)=2\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

**62.**【解】(1) $S_1(t)=\int_0^t(\sin t-\sin x)\mathrm{d}x=t\sin t+\cos t-1$，

$$S_2(t)=\int_t^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\sin t)\mathrm{d}x=\cos t-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin t,$$

则 $S(t)=S_1(t)+S_2(t)=2\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin t+2\cos t-1$.

(2) 由 $S'(t)=2\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos t=0$ 得 $t=\dfrac{\pi}{4}$.

当 $0<t<\dfrac{\pi}{4}$ 时，$S'(t)<0$；当$\dfrac{\pi}{4}<t<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$S'(t)>0$，

故当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，$S(t)$ 取最小值，且最小值为 $S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$；

因为 $S(0)=1>S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1$，所以 $t=0$ 时，$S(t)$ 最大，且最大值为 $S(0)=1$.

*63*.【解】当 $-1<x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}(t+1)\mathrm{d}t$

$$=\frac{(t+1)^2}{2}\bigg|_{-1}^{x}=\frac{(x+1)^2}{2};$$

当 $x>0$ 时，$f(x)=\int_{-1}^{0}(t+1)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}$，

即 $f(x)=\begin{cases}\frac{(x+1)^2}{2}, & -1<x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}, & x>0.\end{cases}$

由 $\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}=0$ 得 $x=1+\sqrt{2}$，

故所求的面积为 $A=\int_{-1}^{0}\frac{(x+1)^2}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{6}+\frac{5+4\sqrt{2}}{6}=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

*64*.【解】由题设 $C:y=x^2$，$C_1:y=\frac{1}{2}x^2$，令 $C_2:x=f(y)$，$P$ 点坐标为 $(x,y)$，

则 $S_A=\int_{0}^{x}\left(x^2-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3$，　$S_B=\int_{0}^{y}[\sqrt{y}-f(y)]\mathrm{d}y=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\int_{0}^{y}f(y)\mathrm{d}y$，

所以 $\frac{1}{6}x^3=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\int_{0}^{y}f(y)\mathrm{d}y$，因为 $P\in C$，所以有 $\int_{0}^{y}f(y)\mathrm{d}y=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{6}x^3=\frac{1}{2}x^3$，即

$\int_{0}^{x^2}f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x^3$，两边对 $x$ 求导，得 $2x\cdot f(x^2)=\frac{3}{2}x^2$，即 $f(x^2)=\frac{3}{4}x$.

从而 $C_2$ 的方程为 $x=f(y)=\frac{3}{4}\sqrt{y}$，即 $y=\frac{16}{9}x^2$.

*65*.【解】设曲线 $y=a+x-x^3$ 与 $x$ 轴正半轴的交点横坐标为 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$，由条件得

$-\int_{0}^{\alpha}(a+x-x^3)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}(a+x-x^3)\mathrm{d}x$，移项得

$\int_{0}^{\alpha}(a+x-x^3)\mathrm{d}x+\int_{\alpha}^{\beta}(a+x-x^3)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\beta}(a+x-x^3)\mathrm{d}x=0\Rightarrow\beta(4a+2\beta-\beta^3)=0$，

因为 $\beta>0$，所以 $4a+2\beta-\beta^3=0$.

又因为 $(\beta,0)$ 为曲线 $y=a+x-x^3$ 与 $x$ 轴的交点，所以有 $a+\beta-\beta^3=0$，

从而有 $\beta=-3a\Rightarrow a-3a+27a^3=0\Rightarrow a=-\frac{\sqrt{6}}{9}$.

*66*.【解】区域面积为 $S=\int_{1}^{3}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}(2x-x^2)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}(x^2-2x)\mathrm{d}x$

$$=\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\bigg|_{1}^{2}+\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\bigg|_{2}^{3}=2;$$

$$V_y=2\pi\int_1^3 x\mid f(x)\mid \mathrm{d}x=2\pi\left[\int_1^2 x(2x-x^2)\mathrm{d}x+\int_2^3 x(x^2-2x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=2\pi\left[\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_1^2+\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_2^3\right]=9\pi.$$

*67*.【解】取$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,1]$,则 $\mathrm{d}V=2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\mathrm{d}x$,

$$V=2\pi\int_0^1(2-x)[\sqrt{2x-x^2}-x]\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1(2-x)[\sqrt{1-(x-1)^2}-x]\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x-1=\sin t}2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(1-\sin t)(\cos t-1-\sin t)\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}.$$

*68*.【解】(1)$V(a)=\pi\int_0^a \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2a})$.

(2) 由 $V(c)=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2c})$, $\lim\limits_{a\to+\infty}V(a)=\frac{\pi}{2}$ 得$\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2c})=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$,解得 $c=\frac{1}{2}\ln 2$.

*69*.【解】**方法一** 取$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[-2,2]$,则 $\mathrm{d}V=2\pi(3-x)(4-x^2)\mathrm{d}x$,

$$V=2\pi\int_{-2}^2(3-x)(4-x^2)\mathrm{d}x=6\pi\int_{-2}^2(4-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=12\pi\int_0^2(4-x^2)\mathrm{d}x=12\pi\times\frac{16}{3}=64\pi.$$

**方法二** 取$[y,y+\mathrm{d}y]\subset[0,4]$,

则 $\mathrm{d}V=[\pi(3+\sqrt{4-y})^2-\pi(3-\sqrt{4-y})^2]\mathrm{d}y=12\pi\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y$,

$$V=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y=-12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}(4-y)$$

$$=-12\pi\times\frac{2}{3}(4-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=64\pi.$$

*70*.【解】设切点坐标为$(a,a^2)(a>0)$,则切线方程为

$$y-a^2=2a(x-a),\text{即 } y=2ax-a^2,$$

由题意得 $S=\int_0^{a^2}\left(\frac{y+a^2}{2a}-\sqrt{y}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{12}a^3=\frac{1}{12}$,解得 $a=1$,

则切线方程为 $y=2x-1$,旋转体的体积为 $V=\pi\int_0^1 x^4\mathrm{d}x-\pi\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}$.

*71*.【解】曲线与 $x$ 轴和 $y$ 轴的交点坐标分别为$(a,0)$,$(0,b)$,其中 $b=4-a$. 曲线可化为

$y=\frac{b}{a}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$,对任意的$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,a]$,$\mathrm{d}V_2=2\pi x\cdot y\mathrm{d}x=2\pi x\cdot\frac{b}{a}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2\mathrm{d}x$

于是 $V_2=2\pi\int_0^a x\cdot\frac{b}{a}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{15}a^2b$,同理,有 $V_1=\frac{\pi}{15}ab^2$.

于是 $V(a)=V_1(a)+V_2(a)=\frac{4\pi}{15}a(4-a)$.

令 $V'(a)=\frac{4\pi}{15}(4-2a)=0\Rightarrow a=2$,又 $V''(2)<0$,所以 $a=2$ 时,两体积之和最大,且最大

值为 $V(2)=\frac{16}{15}\pi$.

*72*.【解】因为曲线过原点,所以 $c=0$,又曲线过点$(1,2)$,所以 $a+b=2$,$b=2-a$.

因为 $a<0$，所以 $b>0$，抛物线与 $x$ 轴的两个交点为 $0,-\frac{b}{a}$，所以

$$S(a)=\int_0^{-\frac{b}{a}}(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{b^3}{6a^2}=\frac{(2-a)^3}{6a^2}.$$

令 $S'(a)=0$，得 $a=-4$，从而 $b=6$，所以当 $a=-4,b=6,c=0$ 时，抛物线与 $x$ 轴所围成的面积最小.

**73.【解】**(1) 由方程组 $\begin{cases}y=kx,\\ y=\sqrt{x},\end{cases}$ 得直线与曲线交点为 $\left(\frac{1}{k^2},\frac{1}{k}\right)$，$\frac{1}{k^2}\leqslant 1,\frac{1}{k}>0\Rightarrow k\geqslant 1$.

$V_1(k)=\pi\int_0^{\frac{1}{k^2}}[(\sqrt{x})^2-(kx)^2]\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6k^4}$，

$V_2(k)=\pi\int_{\frac{1}{k^2}}^1[(kx)^2-(\sqrt{x})^2]\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{k^2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6k^4}\right)$，则

$V(k)=\pi\left(\frac{k^2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3k^4}\right)$，令 $V'(k)=\pi\left(\frac{2k}{3}-\frac{4}{3k^5}\right)=0\Rightarrow k=\sqrt[6]{2}$，因为 $V''(k)>0$，所以函数 $V(k)$ 当 $k=\sqrt[6]{2}$ 时取最小值，且最小值为 $V(\sqrt[6]{2})=\pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-\frac{1}{2}\right)$.

(2) 因为 $S_{D_1}+S_{D_2}=\int_0^{\frac{1}{k^2}}(\sqrt{x}-kx)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{k^2}}^1(kx-\sqrt{x})\mathrm{d}x=\frac{k}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3k^3}$，所以(1) 中条件成立时 $S_{D_1}+S_{D_2}=\frac{\sqrt[6]{2}}{2}-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}$.

**74.【解】**$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t=2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$，则 $s=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)=4\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=8$.

**75.【解】**设切点为 $(a,\sqrt{a-1})$，则过原点的切线方程为 $y=\frac{1}{2\sqrt{a-1}}x$，

将 $(a,\sqrt{a-1})$ 代入切线方程，得 $a=2,\sqrt{a-1}=1$，故切线方程为 $y=\frac{1}{2}x$，

由曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 在区间 $[1,2]$ 上的一段绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转曲面的面积为

$$S_1=2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1),$$

切线 $y=\frac{1}{2}x$ 在区间 $[0,2]$ 上一段绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转曲面面积为

$$S_2=\pi\int_0^2x\sqrt{1+\frac{1}{4}}\mathrm{d}x=\sqrt{5}\pi,$$

所求旋转曲面的表面积为 $S=S_1+S_2=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1)$.

**76.【解】**以球顶部与水面相切的点为坐标原点，$x$ 轴铅直向下，取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,2R]$，由于球的密度与水的密度相同，所以水面以下不做功，

$\mathrm{d}W=(2R-x)\times\pi[R^2-(R-x)^2]\times 1\times g\mathrm{d}x=\pi x(2R-x)^2g\mathrm{d}x$，

$W=\frac{4\pi R^4}{3}g$.

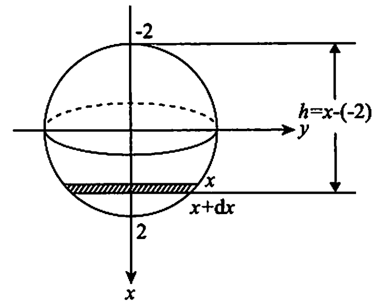
77.【解】建立如图所示的坐标系：

取$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[-2,2]$，

$$\mathrm{d}W=\rho g\cdot \mathrm{d}v\cdot[x-(-2)]=\rho g(x+2)\cdot \pi y^2\mathrm{d}x$$
$$=\pi\rho g(x+2)\cdot(4-x^2)\mathrm{d}x,$$

则 $W=\pi\rho g\int_{-2}^{2}(x+2)\cdot(4-x^2)\mathrm{d}x$

$$=4\pi\rho g\int_0^2(4-x^2)\mathrm{d}x=4\pi\rho g\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{64}{3}\pi\rho g.$$




第 77 题图

# 六、向量代数与空间解析几何

## Ⅰ 入门练习

### ◇ 填空题

1.【解】$\lim\limits_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|^2-1}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+1)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})-1}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.【解】所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{1,2,-1\}\times\{1,-1,-1\}=\{-3,0,-3\}=-3\{1,0,1\},$$

则所求的平面为 $\pi:(x-1)+0(y+1)+(z-2)=0$，即 $\pi:x+z-3=0$.

3.【解】设 $M(x,y,z)$ 为曲面上的任一点，其所在的圆对应的直线 $L$ 上的点为 $M_0(x_0,y_0,z)$，所在圆的圆心为 $T(0,0,z)$，

由 $|MT|=|M_0T|$ 得 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$，

由 $\frac{x_0-1}{2}=\frac{y_0-2}{-1}=\frac{z}{1}$ 得 $\begin{cases}x_0=1+2z,\\ y_0=2-z,\end{cases}$

故所求的曲面为 $\Sigma:x^2+y^2=(1+2z)^2+(2-z)^2$，即 $\Sigma:x^2+y^2=5(1+z^2)$.

4.【解】$M_0(1,1,0)$ 为直线上一点，$\overrightarrow{M_0M}=\{1,0,1\}$，直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{1,0,-1\}$，

$\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}=\{0,2,0\}$，

由 $|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|=|\boldsymbol{s}|\cdot d$ 得距离为 $d=\sqrt{2}$.

5.【解】所求的曲面为 $\Sigma:\frac{x^2}{4}-y^2+\frac{z^2}{4}=1$.

6.【解】两平面之间的距离为

$$d=\frac{|4-(-2)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=2.$$

7.【解】过点 $M(1,-1,2)$ 且与平面垂直的直线为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}=t,\text{即}\begin{cases}x=1+t,\\ y=-1+t,\\ z=2-2t\end{cases}\text{代入平面得 } t=2,$$

该直线与平面的交点为 $T(3,1,-2)$.

设对称点为 $N(a,b,c)$,

由 $\frac{1+a}{2}=3,\frac{-1+b}{2}=1,\frac{2+c}{2}=-2$ 得对称点为 $N(5,3,-6)$.

8.【解】$\overrightarrow{AB}=\{1,1,1\},\overrightarrow{AC}=\{-1,1,2\}$,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{1,1,1\}\times\{-1,1,2\}=\{1,-3,2\},$$

则所求的三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{1+9+4}=\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

9.【解】所求平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{1,-1,1\}\times\{2,1,-1\}=\{0,3,3\},$$

所求的平面方程为 $\pi:0(x-1)+3(y+1)+3(z-2)=0$,

即
$$\pi:y+z-1=0.$$

10.【解】过直线 $L$ 的平面束为

$\pi_0:(2x-y+2)+\lambda(x+y-z-1)=0$,即 $\pi_0:(\lambda+2)x+(\lambda-1)y-\lambda z+2-\lambda=0$,

由 $\{\lambda+2,\lambda-1,-\lambda\}\cdot\{1,1,1\}=0$ 得 $\lambda=-1$,

故所求的投影直线为

$$L_0:\begin{cases}x-2y+z+3=0,\\ x+y+z-4=0.\end{cases}$$

## ◇ 解答题

11.【解】由 $\begin{cases}x+2z=0,\\ y+z+1=0,\\ x+y+z+1=0\end{cases}$ 得交点为 $(0,-1,0)$;

直线 $L$ 的方向向量为 $\{1,0,2\}\times\{0,1,1\}=\{-2,-1,1\}$,

所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{-2,-1,1\}\times\{1,1,1\}=\{-2,3,-1\}$,

所求直线为 $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{1}$.

12.【解】过直线 $L$ 的平面束为 $L':x-y+z-2+\lambda(x+y-z)=0$,

即 $L':(\lambda+1)x+(\lambda-1)y+(1-\lambda)z-2=0$,

由 $\{\lambda+1,\lambda-1,1-\lambda\}\cdot\{1,-1,-1\}=0$ 得 $\lambda=-1$,

投影直线为 $L_0:\begin{cases}x-y-z-1=0,\\ y-z+1=0.\end{cases}$

13.【解】直线 $L$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{1,-1,-2\}\times\{2,1,1\}=\{1,-5,3\}$,

$M_0(1,-1,0)$ 为直线 $L$ 上一点,也是所求平面上的点,

所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,-5,3\}\times\{1,2,-1\}=\{-1,4,7\}$，

所求平面为 $\pi:-(x-1)+4(y+1)+7(z-0)=0$，即 $\pi:x-4y-7z-5=0$.

*14*.【解】过点 $M$ 且垂直于平面 $\pi$ 的直线为 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$，

参数形式为 $L:\begin{cases}x=1+t,\\y=-1-2t,\\z=2-t\end{cases}$ 代入平面 $\pi$ 得直线 $L$ 与 $\pi$ 的交点为 $T(2,-3,1)$，

设对称点为 $N(a,b,c)$，由 $\dfrac{a+1}{2}=2,\dfrac{b-1}{2}=-3,\dfrac{c+2}{2}=1$ 得对称点为 $N(3,-5,0)$.

*15*.【解】$M_1(0,0,0)$，　$\boldsymbol{s}_1=\{1,0,-1\}$，　$M_2(1,0,1)$，　$\boldsymbol{s}_2=\{2,-1,1\}$，

$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1,0,1\}$，　$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\{-1,-3,-1\}$，

因为 $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=-2\neq 0$，所以两直线异面.

过 $M_1$ 作直线 $L'_2/\!/L_2$，$L_1$ 与 $L'_2$ 所成的平面为 $\pi:-(x-0)-3(y-0)-(z-0)=0$，

即 $\pi:x+3y+z=0$，

所求的距离为 $d=\dfrac{|1+3\times 0+1|}{\sqrt{1+9+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{11}}$.

## Ⅱ 基础练习

### ◇ 填空题

*1*.【解】由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{ab}=13+19+2\boldsymbol{ab}=24$，

得 $\boldsymbol{ab}=-4$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{ab}=13+19+8=40$.

则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

*2*.【解】$\boldsymbol{s}_1=\{1,-2,4\}$，$\boldsymbol{s}_2=\{3,5,-2\}$，所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\{-16,14,11\}$，则所求平面方程为 $-16x+14y+11z+65=0$.

*3*.【解】设所求平面为 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$，因为 $\pi$ 经过原点，所以 $D=0$，

即 $\pi:Ax+By+Cz=0$，

又因为 $\pi$ 经过点 $(6,-3,2)$ 且与 $4x-y+2z=8$ 垂直，所以

$\begin{cases}6A-3B+2C=0,\\4A-B+2C=0,\end{cases}$ 解得 $A=B=-\dfrac{2}{3}C$，所求平面为 $\pi:2x+2y-3z=0$.

*4*.【解】因为所求平面 $\pi$ 经过 $L_1$，所以点 $M(1,2,3)$ 在平面 $\pi$ 上，因为 $\pi$ 与 $L_1,L_2$ 都平行，所以所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,0,-1\}\times\{2,1,1\}=\{1,-3,1\}$，

所求平面为 $\pi:(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0$ 或 $\pi:x-3y+z+2=0$.

*5*.【解】直线 $L_1,L_2$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=\{1,-2,1\}$，$\boldsymbol{s}_2=\{2,1,0\}$，

所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\{-1,2,5\}$，则所求平面为

$\pi:-(x-3)+2(y-2)+5(z-1)=0$，或 $\pi:x-2y-5z+6=0$.

*6*.【解】$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1,3,-4\}$，因为所求平面平行于向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 且与平面 $3x-y+6z-6=0$ 垂

直，所求平面的法向量为$\boldsymbol{n}=\{1,3,-4\}\times\{3,-1,6\}=\{14,-18,-10\}$，

所求的平面方程为 $14(x-2)-18(y-1)-10(z-3)=0$，即 $7x-9y-5z+10=0$.

7.【解】$\boldsymbol{n}=\{2x,4y,6z\}_{(1,-2,2)}=\{2,-8,12\}$，法线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$.

8.【解】$d=\dfrac{|2\times1-1\times(-1)+5\times2-12|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+5^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{30}}$.

9.【解】$d=\dfrac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=2$.

10.【解】点 $M_0(4,5,2)$ 在直线上，$\boldsymbol{s}=\{2,-2,1\}$ 为直线的方向向量.

$\overrightarrow{M_0M}=\{-1,-9,2\}$，$\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}=\{-5,5,20\}$，

则点 $M(3,-4,4)$ 到直线$\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=5\sqrt{2}$.

11.【解】曲线 $L$ 绕 $y$ 轴旋转一周所得的旋转曲面为$\Sigma:3x^2+2y^2+3z^2-12=0$，

曲面过点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 的法向量为$\boldsymbol{n}=\{6x,4y,6z\}_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=\{0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\}$，

指向外侧的单位法向量为$\boldsymbol{n}^0=\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

12.【解】曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点$(1,2,0)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{2y,2x,1-e^z\}_{(1,2,0)}=\{4,2,0\},$$

则切平面方程为 $\pi:4(x-1)+2(y-2)=0$，即 $\pi:2x+y-4=0$.

## ◆ 选择题

13.【解】直线 $L$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{1,3,2\}\times\{2,-1,-10\}=\{-28,14,-7\}$，

因为 $\boldsymbol{s}\,/\!/\,\boldsymbol{n}$，所以直线 $L$ 与平面 $\pi$ 垂直，正确答案为(C).

14.【解】$\boldsymbol{s}_1=\{1,-2,1\}$，$\boldsymbol{s}_2=\{1,-1,0\}\times\{0,2,1\}=\{-1,-1,2\}$，

设直线 $L_1,L_2$ 的夹角为 $\theta$，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1|\cdot|\boldsymbol{s}_2|}=\dfrac{1}{2}$，从而 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，正确答案为(C).

15.【解】在 $t=t_0$ 处曲线的切向量为 $\boldsymbol{T}=\{1,-2t_0,3t_0^2\}$，切线与平面 $x+2y+z=4$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}=0$，即 $1-4t_0+3t_0^2=0$，解得 $t_0=\dfrac{1}{3}$ 或 $t_0=1$，选(B).

## ◆ 解答题

16.【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}=\dfrac{1}{2|\boldsymbol{a}|}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{x}$

$$=|\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

17.【解】$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\{-2,-1,-3\}\times\{-1,4,2\}=\{10,7,-9\}$，

则 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{10^2+7^2+(-9)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{230}$.

18.【解】$\overrightarrow{AB}=\{-4,3,-2\}$，$\overrightarrow{AC}=\{4,4,-3\}$，因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不平行，所以三点不共线.

过三点的平面的法向量为

$$n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{-4,3,-2\}\times\{4,4,-3\}=\{-1,-20,-28\},$$

所求的平面方程为

$$\pi:-(x-1)-20(y+1)-28(z-1)=0,\text{即}\ \pi:x+20y+28z-9=0.$$

*19.*【解】设经过两平面 $\pi_1,\pi_2$ 交线的平面方程为

$\pi:x+y+1+\lambda(x+2y+2z)=0$,即 $\pi:(1+\lambda)x+(1+2\lambda)y+2\lambda z+1=0$,

因为平面 $\pi$ 与平面 $\pi_3:2x-y-z=0$ 垂直,所以有

$\{1+\lambda,1+2\lambda,2\lambda\}\cdot\{2,-1,-1\}=0$,即 $2+2\lambda-1-2\lambda-2\lambda=0$,解得 $\lambda=\frac{1}{2}$,

所求平面方程为 $\pi:\frac{3}{2}x+2y+z+1=0$.

*20.*【解】$s_1=\{1,-1,2\}$, $s_2=\{-1,2,1\}$, $n=s_1\times s_2=\{-5,-3,1\}$,

所求平面方程为 $\pi:-5(x-2)-3(y+2)+(z-3)=0$,即 $\pi:-5x-3y+z+1=0$.

*21.*【解】令 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-3}=t$ 得 $x=2+t,y=1-t,z=-3t$,代入 $x-y+z=0$ 中得 $t=1$,则直线 $L:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-3}$ 与平面 $\pi:x-y+z=0$ 交点为 $M(3,0,-3)$,

$\overrightarrow{P_1M}=\{-2,4,-6\}$,$\overrightarrow{P_2M}=\{5,-1,-11\}$,$n=\overrightarrow{P_1M}\times\overrightarrow{P_2M}=\{-50,-52,-18\}$,所求平面方程为 $-50(x-5)-52(y+4)-18(z-3)=0$,即 $25x+26y+9z-48=0$.

*22.*【解】所求平面的法向量为 $n=s_1\times s_2=\{2,1,-1\}\times\{0,1,-1\}=\{0,2,2\}$,

于是所求平面方程为 $\pi:2(y+2)+2(z-2)=0$,即 $\pi:y+z=0$.

*23.*【解】直线 $L:\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ 的方向向量为 $s=\{4,5,6\}$,

平面 $\pi:7x+8y+9z+10=0$ 的法向量为 $n_0=\{7,8,9\}$,

因为所求直线与已知直线垂直且与已知平面平行,所以所求直线与 $s=\{4,5,6\}$ 及 $n_0=\{7,8,9\}$ 都垂直,于是所求直线的方向向量为 $T=s\times n_0=\{-3,6,-3\}$,

所求直线为 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

*24.*【解】直线 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{1}$ 可改写为 $L:\begin{cases}\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1},\\ \frac{y}{-1}=\frac{z-3}{1},\end{cases}$ 或者 $L:\begin{cases}x+2y-1=0,\\ y+z-3=0,\end{cases}$

过直线 $L$ 的平面束为 $\pi':x+2y-1+\lambda(y+z-3)=0$,

或 $\pi':x+(2+\lambda)y+\lambda z-1-3\lambda=0$,

由 $\{1,2+\lambda,\lambda\}\cdot\{1,-3,2\}=0$ 得 $\lambda=-5$,所以过 $L$ 且垂直于 $\pi$ 的平面方程为

$\pi':x-3y-5z+14=0$,投影直线为 $\begin{cases}x-3y-5z+14=0,\\ x-3y+2z-5=0.\end{cases}$

*25.*【解】$s_1=\{1,-1,2\}$,$s_2=\{1,0,-2\}\times\{1,3,1\}=\{6,-3,3\}=3\{2,-1,1\}$,设两直线的夹角为 $\theta$,则 $\cos\theta=\frac{|s_1\cdot s_2|}{|s_1|\cdot|s_2|}=\frac{5}{6}$,于是 $\theta=\arccos\frac{5}{6}$.

26.【解】(1) 由于 $L_1: x-1=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{\lambda}$ 与 $L_2: x+1=y-1=z$ 垂直,则

$\{1,2,\lambda\} \perp \{1,1,1\}$ 或 $1+2+\lambda=0$,解得 $\lambda=-3$.

(2)$s_1=\{1,2,\lambda\}, s_2=\{1,1,1\}, s_1\times s_2=\{1,2,\lambda\}\times\{1,1,1\}=\{2-\lambda,\lambda-1,-1\}$,

$M_1(1,1,1)\in L_1$, $M_2(-1,1,0)\in L_2$, $\overrightarrow{M_2M_1}=\{2,0,1\}$,

$L_1, L_2$ 共面的充分必要条件是 $(s_1\times s_2)\cdot\overrightarrow{M_2M_1}=0$,解得 $\lambda=\frac{3}{2}$.

27.【解】(1) 设 $M(x,y,z)\in\Sigma$, $M$ 所在的圆与 $L$ 的交点为 $M_0(x_0,y,z_0)$,圆心为 $T(0,y,0)$,

由 $|MT|=|M_0T|$ 得 $x^2+z^2=x_0^2+z_0^2$,

由 $\frac{x_0-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z_0}{-1}$ 得 $\begin{cases}x_0=1+2y,\\ z_0=-y\end{cases}$ 代入得 $\Sigma: x^2+z^2=1+4y+5y^2$,

所求的几何体体积为 $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^2\mathrm{d}y\iint\limits_{x^2+z^2\leqslant 1+4y+5y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=\pi\int_0^2(1+4y+5y^2)\mathrm{d}y=\frac{70}{3}\pi$.

(2) 设质心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,由对称性得 $\bar{x}=0, \bar{z}=0$,

$$\bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v},$$

由 $\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}v=\int_0^2 y\,\mathrm{d}y\iint\limits_{x^2+z^2\leqslant 1+4y+5y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z=\pi\int_0^2(y+4y^2+5y^3)\mathrm{d}y=\frac{98}{3}\pi$,得 $\bar{y}=\frac{7}{5}$,

故质心坐标为 $\left(0,\frac{7}{5},0\right)$.

# 七、多元函数微分学

## ① 入门练习

### ◆ 填空题

1.【解】(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+y\sin x^2)^{\frac{1}{x\ln(1+2x)}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left[(1+y\sin x^2)^{\frac{1}{y\sin x^2}}\right]^{\frac{y\sin x^2}{x\ln(1+2x)}}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{y\sin x^2}{x\ln(1+2x)}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{x^2y}{2x^2}}=\mathrm{e}.$$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(\cos xy)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left\{\left[1+(\cos xy-1)\right]^{\frac{1}{\cos xy-1}}\right\}^{\frac{\cos xy-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{\cos xy-1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{-\frac{1}{2}(xy)^2}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

2.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}+y^x\ln y$.

3.【解】由 $z=(x^2+y^2)^{xy}$，得 $z=e^{xy\ln(x^2+y^2)}$，

则$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy\ln(x^2+y^2)}\cdot\left[y\ln(x^2+y^2)+xy\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}\right]$

$=(x^2+y^2)^{xy}\cdot\left[y\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right]$.

4.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2)$，则

$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y\cdot 2xf'(x^2+y^2)-x\cdot 2yf'(x^2+y^2)=0.$

5.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy)$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f(xy)-\frac{y}{x}f'(xy)+\frac{2y}{x}f'(xy)+y^2f''(xy)$

$=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y^2f''(xy).$

6.【解】$\frac{dz}{dt}=2tf'_1+\cos t\cdot f'_2$，

$\frac{d^2z}{dt^2}=2f'_1+2t(2tf''_{11}+\cos t\cdot f''_{12})-\sin t\cdot f'_2+\cos t\cdot(2tf''_{21}+\cos t\cdot f''_{22})$

$=2f'_1-\sin t\cdot f'_2+4t^2f''_{11}+4t\cos t\cdot f''_{12}+\cos^2 t\cdot f''_{22}.$

7.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+f'_2$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y(xf''_{11}+f''_{12})+xf''_{21}+f''_{22}=f'_1+xyf''_{11}+(x+y)f''_{12}+f''_{22}.$

8.【解】$x^3y^2z=x^2+y^2+\cos z$ 两边对 $x$ 求偏导得

$$3x^2y^2z+x^3y^2\frac{\partial z}{\partial x}=2x-\sin z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}，解得\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-3x^2y^2z}{x^3y^2+\sin z}.$$

9.【解】$\begin{cases}z=f(x,y),\\F(x,y,z)=0\end{cases}$确定 $y=y(x),z=z(x)$，则

$\begin{cases}\frac{dz}{dx}=f'_1+f'_2\frac{dy}{dx},\\F'_1+F'_2\frac{dy}{dx}+F'_3\frac{dz}{dx}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}f'_2\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}=-f'_1,\\F'_2\frac{dy}{dx}+F'_3\frac{dz}{dx}=-F'_1,\end{cases}$ 解得$\frac{dz}{dx}=\frac{f'_1F'_2-f'_2F'_1}{f'_2F'_3+F'_2}$.

10.【解】令 $\rho=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，由$\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{f(x,y)-2x+y}{(x-1)^2+y^2}=0$ 得 $f(1,0)=2$，且

$f(x,y)-2x+y=o(\rho)$，或 $\Delta z=f(x,y)-f(1,0)=2(x-1)-(y-0)+o(\rho)$，
由可微的定义得 $dz|_{(1,0)}=2dx-dy$.

11.【解】与射线方向相同的向量为$\{1,\frac{\pi}{4}\}$，

方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{16}}}=\frac{4}{\sqrt{\pi^2+16}}$，$\cos\beta=\frac{\frac{\pi}{4}}{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{16}}}=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$，

$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos y$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-x^2\sin y$， $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}$， $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\frac{\pi}{4})}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故所求的方向导数为$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,\frac{\pi}{4})}=\frac{4\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi}{\sqrt{\pi^2+16}}$.

12.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+h(x)$，

由 $f'_x(x,0)=2\cos x$ 得 $h(x)=2\cos x$，即$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy+2\cos x$，

从而 $z=x^2y+2\sin x+g(y)$，

再由 $f(0,y)=e^y+1$ 得 $g(y)=e^y+1$，故 $f(x,y)=x^2y+2\sin x+e^y+1$.

## ◇ 解答题

13.【解】$\frac{dz}{dt}=2tf'_1+2e^{2t}f'_2$，

$$\frac{d^2z}{dt^2}=2f'_1+2t(2tf''_{11}+2e^{2t}f''_{12})+4e^{2t}f'_2+2e^{2t}(2tf''_{21}+2e^{2t}f''_{22})$$
$$=2f'_1+4t^2f''_{11}+8te^{2t}f''_{12}+4e^{2t}f'_2+4e^{4t}f''_{22}.$$

14.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin y\cdot f'_1+y\cdot f'_2$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x\cos y\cdot f'_1+e^x\sin y\cdot(e^x\cos y\cdot f''_{11}+xf''_{12})+f'_2+y(e^x\cos y\cdot f''_{21}+xf''_{22})$$
$$=e^x\cos y\cdot f'_1+e^{2x}\sin y\cos y\cdot f''_{11}+e^x(x\sin y+y\cos y)f''_{12}+f'_2+xyf''_{22}.$$

15.【解】$\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'_1+yf'_2+y^2zf'_3$， $\frac{\partial u}{\partial y}=xf'_2+2xyzf'_3$， $\frac{\partial u}{\partial z}=xy^2f'_3$.

16.【解】由$\frac{du}{dx}=f'_1[x,f(x,x)]+f'_2[x,f(x,x)]\cdot[f'_1(x,x)+f'_2(x,x)]$，得

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1}=f'_1[1,f(1,1)]+f'_2[1,f(1,1)]\cdot[f'_1(1,1)+f'_2(1,1)]$$
$$=a+b(a+b)=a+ab+b^2.$$

17.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{-x^2y^2}-e^{-(x+y)^2}$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-x^2y^2}-2x^2y^2e^{-x^2y^2}+2(x+y)e^{-(x+y)^2}.$$

18.【解】$\begin{cases}x^2+y^2=2z,\\x+y-z+1=0\end{cases}$两边对 $x$ 求导，得$\begin{cases}2x+2y\frac{dy}{dx}=2\frac{dz}{dx},\\1+\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}=0,\end{cases}$解得$\frac{dz}{dx}=\frac{x-y}{1-y}$.

19.【解】$F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 两边对 $x$ 求偏导得

$$(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x})F'_1+\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}F'_2=0，解得\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yzF'_2-x^2yF'_1}{x(xF'_1+yF'_2)}；$$

$F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 两边对 $y$ 求偏导得

$\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2}F'_1+(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y})F'_2=0$，解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xzF'_1-xy^2F'_2}{y(xF'_1+yF'_2)}$，

故 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yzF'_2-x^2yF'_1+xzF'_1-xy^2F'_2}{xF'_1+yF'_2}=z-xy.$

**20.【解】** 令 $F=x^2+2y^2+z^2-3,\quad G=2x-y+z-1$，

切向量为 $\boldsymbol{s}=\{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\}_{(1,1,0)}=2\{2,-1,-5\}$，

所求的切线为 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-0}{-5}$，

法平面为 $\pi:2(x-1)-(y-1)-5z=0$，即 $\pi:2x-y-5z-1=0$.

**21.【解】** 设切点坐标为 $(x,y,z)$，法向量为 $\boldsymbol{n}=\{2x,-2y,4z\}=2\{x,-y,2z\}$，

由 $\frac{x}{1}=\frac{-y}{-1}=\frac{2z}{2}=t$ 得 $x=t,y=t,z=t$，代入曲面得 $t=\pm2$，

切点为 $M_1(-2,-2,-2)$ 及 $M_2(2,2,2)$，所求的切平面为

$\pi_1:(x+2)-(y+2)+2(z+2)=0$，即 $\pi_1:x-y+2z+4=0$，

$\pi_2:(x-2)-(y-2)+2(z-2)=0$，即 $\pi_2:x-y+2z-4=0$.

**22.【解】** 由 $\begin{cases}3x^2-6x-9=0,\\2y-2=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\y=1,\end{cases}\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-6,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$，

当 $(x,y)=(-1,1)$ 时，$A=-12,B=0,C=2$，

因为 $AC-B^2=-24<0$，所以 $(-1,1)$ 不是极值点；

当 $(x,y)=(3,1)$ 时，$A=12,B=0,C=2$，

因为 $AC-B^2=24>0$ 且 $A>0$，所以 $(3,1)$ 为极小值点，极小值为 $f(3,1)=-26$.

**23.【解】**(1) 由 $dz=2x\,dx-4y\,dy$ 得 $dz=d(x^2-2y^2)$，

从而 $f(x,y)=x^2-2y^2+C$，再由 $f(0,0)=5$ 得 $f(x,y)=x^2-2y^2+5$.

(2) 当 $x^2+4y^2<4$ 时，由 $\begin{cases}f'_x=2x=0,\\f'_y=-4y=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=0,\end{cases}$ $f(0,0)=5$；

当 $x^2+4y^2=4$ 时，令 $\begin{cases}x=2\cos t,\\y=\sin t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，

则 $z=4\cos^2 t-2\sin^2 t+5=6\cos^2 t+3$，

当 $\cos t=0$ 时，$f_{\min}=3$；当 $\cos t=\pm1$ 时，$f_{\max}=9$，

故最小值为 $m=3$，最大值 $M=9$.

## Ⅱ 基础练习

### ◆ 填空题

**1.【解】** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$，

由对称性得$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$，故$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

**2.【解】**

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^{\sin^2 y}\cdot\ln x\cdot\sin 2y+\frac{1}{x}e^{\tan\frac{y}{x}}\cdot\sec^2\frac{y}{x}.$$

**3.【解】** $\frac{dz}{dt}=2e^{2t}f'_1+\sin 2t\cdot f'_2$，

$$\frac{d^2z}{dt^2}=4e^{2t}f'_1+2e^{2t}(2e^{2t}f''_{11}+\sin 2t\cdot f''_{12})+2\cos 2t\cdot f'_2+\sin 2t\cdot(2e^{2t}f''_{21}+\sin 2t\cdot f''_{22})$$

$$=4e^{2t}f'_1+2\cos 2t\cdot f'_2+4e^{4t}f''_{11}+4e^{2t}\sin 2t\cdot f''_{12}+\sin^2 2t\cdot f''_{22}.$$

**4.【解】** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{y^2}{x^2}}{1+\frac{y^4}{x^2}}=-\frac{y^2}{x^2+y^4}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{2y}{x}}{1+\frac{y^4}{x^2}}=\frac{2xy}{x^2+y^4}$，则

$$dz=-\frac{y^2}{x^2+y^4}dx+\frac{2xy}{x^2+y^4}dy.$$

**5.【解】** 将 $x=e,y=0$ 代入得 $z=1$，

$x=ze^{y+z}$ 两边对 $x$ 求偏导得 $1=\frac{\partial z}{\partial x}e^{y+z}+ze^{y+z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$，解得$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(e,0)}=\frac{1}{2e}$；

$x=ze^{y+z}$ 两边对 $y$ 求偏导得 $0=\frac{\partial z}{\partial y}e^{y+z}+ze^{y+z}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)$，解得$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(e,0)}=-\frac{1}{2}$，

故 $dz\big|_{(e,0)}=\frac{1}{2e}dx-\frac{1}{2}dy$.

**6.【解】**

$e^{x^2+yz}=x^2+y^2+z$ 两边对 $x$ 求偏导得 $e^{x^2+yz}\cdot\left(2x+y\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2x+\frac{\partial z}{\partial x}$，解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-2xe^{x^2+yz}}{ye^{x^2+yz}-1};$$

$e^{x^2+yz}=x^2+y^2+z$ 两边对 $y$ 求偏导得 $e^{x^2+yz}\cdot\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)=2y+\frac{\partial z}{\partial y}$，解得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-ze^{x^2+yz}}{ye^{x^2+yz}-1},$$

故

$$dz=\frac{2x-2xe^{x^2+yz}}{ye^{x^2+yz}-1}dx+\frac{2y-ze^{x^2+yz}}{ye^{x^2+yz}-1}dy.$$

7.【解】由$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$得$\frac{\partial f}{\partial y}=2y+\varphi_1(x)$,

因为$f'_y(x,0)=x$,所以$\varphi_1(x)=x$,则$\frac{\partial f}{\partial y}=2y+x$,

再由$\frac{\partial f}{\partial y}=2y+x$得$f(x,y)=y^2+xy+\varphi_2(x)$,

因为$f(x,0)=1$,所以$\varphi_2(x)=1$,故$f(x,y)=y^2+xy+1$.

8.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy)+2xyg'(x^2+y^2)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y^2f''(xy)+2xg'(x^2+y^2)+4xy^2g''(x^2+y^2)$.

9.【解】$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x yz^2+2e^x yz\frac{\partial z}{\partial x}$,

$x+y+z+xyz=0$两边关于$x$求偏导得$1+\frac{\partial z}{\partial x}+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$,

将$x=0,y=1,z=-1$代入得$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=0$,故$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,1,-1)}=1$.

10.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$,

则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}$.

11.【解】$\int_1^{x+y+z}e^{-t^2}dt=x^2+y^2+z$两边分别对$x$和$y$求偏导得

$e^{-(x+y+z)^2}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2x+\frac{\partial z}{\partial x}$, $e^{-(x+y+z)^2}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=2y+\frac{\partial z}{\partial y}$,

解得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-e^{-(x+y+z)^2}}{e^{-(x+y+z)^2}-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y-e^{-(x+y+z)^2}}{e^{-(x+y+z)^2}-1}$,

故$dz=\frac{2x-e^{-(x+y+z)^2}}{e^{-(x+y+z)^2}-1}dx+\frac{2y-e^{-(x+y+z)^2}}{e^{-(x+y+z)^2}-1}dy$.

12.【解】将$x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$代入$e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$中得$z=0$,

$e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$两边求微分得$2e^{2yz}(zdy+ydz)+dx+2ydy+dz=0$,

将$x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2},z=0$代入得$\left.dz\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\frac{1}{2}dx-\frac{1}{2}dy$.

13.【解】当$x=0$时,$y=1$,$x-\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=0$两边对$x$求导,得

$1-e^{-(x+y)^2}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=0$,将$x=0,y=1$代入得$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=e-1$.

14.【解】$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$两边求微分得

$$yzdx+xzdy+xydz+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(xdx+ydy+zdz)=0,$$

将(1,0,−1)代入上式得 $dz = dx - \sqrt{2}dy$.

**15.**【解】曲线 $L:\begin{cases}4x^2+9y^2=25,\\ z=0\end{cases}$ 绕 $y$ 轴旋转一周所得的旋转曲面为 $4x^2+9y^2+4z^2=25$,

$\boldsymbol{n}=\{8x,18y,8z\}_{(0,-1,2)}=\{0,-18,16\}$,所求的单位法向量为 $\boldsymbol{e}=\left\{0,-\frac{9}{\sqrt{145}},\frac{8}{\sqrt{145}}\right\}$.

**16.**【解】设切点坐标为 $(x_0,y_0,1-x_0^2-y_0^2)$,则 $\boldsymbol{n}=\pm\{2x_0,2y_0,1\}\ /\!/\ \{1,1,-1\}$,

解得切点坐标为 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,切平面方程为

$\pi:-\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(y+\frac{1}{2}\right)+\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$,即 $\pi:2x+2y-2z+3=0$.

**17.**【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=2f'_1(2x-y,\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}f'_2(2x-y,\frac{y}{x})$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'_1(2x-y,\frac{y}{x})+\frac{1}{x}f'_2(2x-y,\frac{y}{x})$,

则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,3)}=2f'_1(-1,3)-3f'_2(-1,3)=-7$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,3)}=-f'_1(-1,3)+f'_2(-1,3)=3$,

则 $\left.dz\right|_{(1,3)}=-7dx+3dy$.

## ◇ 选择题

**18.**【解】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在,所以 $f(x,y)$ 在(0,0)处对 $x$ 不可偏导;

因为 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y^2}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y^2}{y}=0$,所以 $f'_y(0,0)=0$,即 $f(x,y)$ 在(0,0)处对 $y$ 可偏导,应选(B).

**19.**【解】因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{|x|+y^2}=-3$,所以由极限的保号性,存在 $\delta>0$,当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,$\frac{f(x,y)-f(0,0)}{|x|+y^2}<0$. 因为当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,$|x|+y^2>0$,所以当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,有 $f(x,y)<f(0,0)$,即 $f(x,y)$ 在(0,0)处取极大值,选(A).

**20.**【解】$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+zf'_2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=xf''_{12}+f'_2+xzf''_{22}$,选(C).

**21.**【解】多元函数在一点可偏导不一定在该点连续,(A)不对;

函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0),\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在(0,0)处可偏导,但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在,(B)不对;

$f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处可偏导是可微的必要而非充分条件,(C)不对.

应选(D),事实上由 $f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ 存在

得 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$.

22.【解】可微函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处取得极小值，则有 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$，于是 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数为零，选(A).

23.【解】由 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2},\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$，得 $\mathbf{grad} f\Big|_{(0,1)}=\{1,0\}=\boldsymbol{i}$，选(A).

## ◇ 解答题

24.【解】$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}=\dfrac{u}{x}y^z$,

由 $u=e^{y^z\ln x}$ 得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{y^z\ln x}\cdot zy^{z-1}\ln x=\dfrac{u}{y}zy^z\ln x$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{y^z\ln x}\cdot y^z\ln x\ln y=uy^z\ln x\ln y,$$

故 $du=uy^z\left(\dfrac{1}{x}dx+\dfrac{z}{y}\ln x\,dy+\ln x\ln y\,dz\right)$.

25.【解】$\dfrac{1}{2}x^2+yz$ 的梯度为 $\boldsymbol{l}=\{x,z,y\}$,

梯度的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

又 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

故所求的方向导数为 $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\dfrac{x^2+2yz}{x^2+y^2+z^2}$.

26.【解】设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，显然 $f(x,y)$ 在点(0,0)处连续，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，所以 $f(x,y)$ 在点(0,0)处对 $x$ 不可偏导，由对称性，$f(x,y)$ 在点(0,0)处对 $y$ 也不可偏导.

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},&(x,y)\neq(0,0),\\ 0,&(x,y)=(0,0),\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x}=0,\quad \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0-0}{y}=0$,

所以 $f(x,y)$ 在点(0,0)处可偏导，且 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$.

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=x}}f(x,y)=\dfrac{1}{2},\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=2x}}f(x,y)=\dfrac{2}{5}$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在，而 $f(0,0)=0$，故 $f(x,y)$ 在点(0,0)处不连续.

27.【解】因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=x^2}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}f(x,x^2)=\dfrac{1}{2},\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=-x^2}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}f(x,-x^2)=-\dfrac{1}{2}$，所以

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在，故函数 $f(x,y)$ 在点(0,0) 处不连续.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$，所以函数 $f(x,y)$ 在点(0,0) 处对 $x,y$ 都可偏导.

28.【解】因为 $0\leqslant\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$，即函数 $f(x,y)$ 在点(0,0) 处连续.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，所以 $f'_x(0,0)=0$，根据对称性得 $f'_y(0,0)=0$，即函数 $f(x,y)$ 在(0,0) 处可偏导.

$\Delta z-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=f(x,y)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

因为 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，所以函数 $f(x,y)$ 在(0,0) 处不可微.

29.【解】由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$ 得 $f(x,y)$ 在(0,0) 处连续.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ 得 $f'_x(0,0)=0$，

由 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\arctan\dfrac{1}{|y|}=\dfrac{\pi}{2}$ 得 $f'_y(0,0)=\dfrac{\pi}{2}$，$f(x,y)$ 在(0,0) 可偏导.

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，　$\Delta z=f(x,y)-f(0,0)=y\arctan\dfrac{1}{\rho}$，

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{y\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2}y}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{y}{\rho}\cdot\left(\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2}\right),$$

因为 $\left|\dfrac{y}{\rho}\right|\leqslant 1$ 且 $\lim\limits_{\rho\to 0}\arctan\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{y}{\rho}\cdot\left(\arctan\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，

即 $f(x,y)$ 在(0,0) 处可微.

30.【证明】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xyf'(x^2-y^2)$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x^2-y^2)-2y^2f'(x^2-y^2)$，则

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'(x^2-y^2)+\frac{1}{y}f(x^2-y^2)-2yf'(x^2-y^2)$$

$$=\frac{1}{y}f(x^2-y^2)=\frac{z}{y^2}.$$

31.【解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2}\sin xy+ye^{x^2+y^2}\cos xy$，　$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2}\sin xy+xe^{x^2+y^2}\cos xy$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xye^{x^2+y^2}\sin xy+2x^2e^{x^2+y^2}\cos xy+e^{x^2+y^2}\cos xy+2y^2e^{x^2+y^2}\cos xy-xye^{x^2+y^2}\sin xy$$

$$=e^{x^2+y^2}[3xy\sin xy+(2x^2+2y^2+1)\cos xy].$$

32.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf(x^2y,e^{x^2y})$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf(x^2y,e^{x^2y})+2xy[x^2f'_1(x^2y,e^{x^2y})+x^2e^{x^2y}f'_2(x^2y,e^{x^2y})]$.

33.【解】$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+2xf'_2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=f'_1+2yf'_2$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+2xf''_{12}+2f'_2+2x(f''_{21}+2xf''_{22})=f''_{11}+4xf''_{12}+4x^2f''_{22}+2f'_2$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''_{11}+2yf''_{12}+2f'_2+2y(f''_{21}+2yf''_{22})=f''_{11}+4yf''_{12}+4y^2f''_{22}+2f'_2$,

则$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2f''_{11}+4(x+y)f''_{12}+4(x^2+y^2)f''_{22}+4f'_2$.

34.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=g(y)f'_1+f'_2$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=g'(y)f'_1+g(y)[xg'(y)f''_{11}-f''_{12}]+xg'(y)f''_{21}-f''_{22}$

$=g'(y)f'_1+xg'(y)g(y)f''_{11}+[xg'(y)-g(y)]f''_{12}-f''_{22}$.

35.【解】当$x=0,y=0$时,$z=1$.

$z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt=1$两边分别对$x$和$y$求偏导得

$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-e^{-x^2}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+e^{-y^2}=0$, $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{2}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-e^{-x^2}=0$两边对$y$求偏导得$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$,

故$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}=-\frac{1}{8}$.

36.【解】$z=f[x+\varphi(x-y),y]$两边关于$y$求偏导得$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'_1\cdot\varphi'+f'_2$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-(-f''_{11}\varphi'+f''_{12})\varphi'+f'_1\varphi''-f''_{21}\varphi'+f''_{22}=f''_{11}(\varphi')^2-2\varphi'f''_{12}+f'_1\varphi''+f''_{22}$.

37.【证明】$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$,$z=y+x\varphi(z)$两边对$x$求偏导得$\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi(z)+x\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x}$,

解得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\varphi(z)}{1-x\varphi'(z)}$,则$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\varphi(z)f'(z)}{1-x\varphi'(z)}$.

$\frac{\partial u}{\partial y}=f'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$,$z=y+x\varphi(z)$两边对$y$求偏导得$\frac{\partial z}{\partial y}=1+x\varphi'(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$,

解得$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1-x\varphi'(z)}$,则$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{f'(z)}{1-x\varphi'(z)}$,所以$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial y}$.

38.【证明】$xy=xf(z)+yg(z)$两边分别对$x,y$求偏导,得

$y=f(z)+xf'(z)\frac{\partial z}{\partial x}+yg'(z)\frac{\partial z}{\partial x}$及$x=xf'(z)\frac{\partial z}{\partial y}+g(z)+yg'(z)\frac{\partial z}{\partial y}$,解得

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y-f(z)}{xf'(z)+yg'(z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-g(z)}{xf'(z)+yg'(z)}$,于是

$$[x-g(z)]\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{[x-g(z)][y-f(z)]}{xf'(z)+yg'(z)}=[y-f(z)]\frac{\partial z}{\partial y}.$$

**39.【解】** 对 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 两边求微分，得

$$dz-dy-dx+e^{z-y-x}dx+xe^{z-y-x}(dz-dy-dx)=0,$$

解得 $dz=\frac{1+(x-1)e^{z-y-x}}{1+xe^{z-y-x}}dx+dy.$

**40.【解】** $\frac{du}{dx}=f'_1+f'_2\frac{dy}{dx}+f'_3\frac{dz}{dx}$，

方程 $e^{xy}-y=0$ 两边对 $x$ 求导得 $e^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)-\frac{dy}{dx}=0$，解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-xy}$；

方程 $e^z-xz=0$ 两边对 $x$ 求导得 $e^z\frac{dz}{dx}-z-x\frac{dz}{dx}=0$，解得 $\frac{dz}{dx}=\frac{z}{xz-x}$，

则 $\frac{du}{dx}=f'_1+\frac{y^2}{1-xy}f'_2+\frac{z}{xz-x}f'_3.$

**41.【解】** 令 $\begin{cases}x+y=u,\\x-y=v,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(u+v),\\y=\frac{1}{2}(u-v),\end{cases}$ 代入题中式子得

$$f(u,v)=\frac{(u+v)^2-(u-v)^2-(u+v)(u-v)}{4}=uv-\frac{1}{4}u^2+\frac{1}{4}v^2,$$

从而 $z=f(x,y)=xy-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2$，

由 $\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{1}{2}x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x+\frac{1}{2}y$ 得 $dz=(y-\frac{1}{2}x)dx+(x+\frac{1}{2}y)dy.$

**42.【解】** 将 $y=f(x,t)$ 与 $G(x,y,t)=0$ 两边对 $x$ 求导得 $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f'_1+f'_2\frac{dt}{dx},\\G'_1+G'_2\frac{dy}{dx}+G'_3\frac{dt}{dx}=0,\end{cases}$ 解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'_1G'_3-f'_2G'_1}{G'_3+f'_2G'_2}.$$

**43.【解】** 将 $u,v$ 作为中间变量，则函数关系为 $z=f(u,v)$，$\begin{cases}u=x-2y,\\v=x+ay,\end{cases}$ 则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

将上述式子代入方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 得 $(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$,

根据题意得 $\begin{cases}10+5a\neq 0,\\6+a-a^2=0,\end{cases}$ 解得 $a=3$.

**44.【解】**(1) 二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$,

由 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2x(2+y^2)=0\\\frac{\partial z}{\partial y}=2x^2y+\ln y+1=0\end{cases}$ 得 $(x,y)=(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2(2+y^2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^2+\frac{1}{y}$,

则 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=2(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2})$, $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=0$, $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,\frac{1}{e})}=\mathrm{e}$,

因为 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$,所以 $\begin{cases}x=0\\y=\frac{1}{\mathrm{e}}\end{cases}$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点,极小值为 $f(0,\frac{1}{\mathrm{e}})=-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(2) 由 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=(2x+2)\mathrm{e}^y=0,\\\frac{\partial f}{\partial y}=(x^2+2x+y+1)\mathrm{e}^y=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\y=0.\end{cases}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\mathrm{e}^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(2x+2)\mathrm{e}^y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(x^2+2x+y+2)\mathrm{e}^y$,

$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(-1,0)}=2$, $B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(-1,0)}=0$, $C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(-1,0)}=1$,

由 $AC-B^2=2>0$ 及 $A=2>0$ 得 $(x,y)=(-1,0)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点,
极小值为 $f(-1,0)=-1$.

**45.【解】**当 $(x,y)$ 在区域 $D$ 内时,由 $\begin{cases}z'_x=3x^2-3y=0,\\z'_y=3y^2-3x=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$ $f(1,1)=-1$;

在 $L_1:y=-1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 上,$z=x^3+3x-1$,

因为 $z'=3x^2+3>0$,所以最小值为 $z(0)=-1$,最大值为 $z(2)=13$;

在 $L_2:y=2(0\leqslant x\leqslant 2)$ 上,$z=x^3-6x+8$,

由 $z'=3x^2-6=0$ 得 $x=\sqrt{2}$,$z(0)=8$,$z(\sqrt{2})=8-4\sqrt{2}$,$z(2)=4$;

在 $L_3:x=0(-1\leqslant y\leqslant 2)$ 上,$z=y^3$,

由 $z'=3y^2=0$ 得 $y=0$,$z(-1)=-1$,$z(0)=0$,$z(2)=8$;

在 $L_4:x=2(-1\leqslant y\leqslant 2)$ 上,$z=y^3-6y+8$,

由 $z'=3y^2-6=0$ 得 $y=\sqrt{2}$,$z(-1)=13$,$z(\sqrt{2})=8-4\sqrt{2}$,$z(2)=4$,

故 $z=x^3+y^3-3xy$ 在 $D$ 上的最小值为 $-1$,最大值为 13.

**46.【解】**令 $F=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)$,

由$\begin{cases} F'_x = 2x + \dfrac{\lambda}{a} = 0 \\ F'_y = 2y + \dfrac{\lambda}{b} = 0 \\ F'_z = 2z + \dfrac{\lambda}{c} = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} - 1 = 0 \end{cases}$ 得$\begin{cases} x = -\dfrac{\lambda}{2a} \\ y = -\dfrac{\lambda}{2b} \\ z = -\dfrac{\lambda}{2c} \end{cases}$，代入$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} - 1 = 0$ 得 $\lambda = -\dfrac{2}{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}$，

从而 $x = \dfrac{1}{a\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)}$， $y = \dfrac{1}{b\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)}$， $z = \dfrac{1}{c\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)}$，

则 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ 上的最小值为

$$u_{\min} = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}.$$

# 八、重积分

## ① 入门练习

### ◆ 填空题

1.【解】$\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{mn}{(m^2 + i^2)(n^2 + j^2)} = \lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \dfrac{1}{mn} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{\left[1 + \left(\dfrac{i}{m}\right)^2\right]\left[1 + \left(\dfrac{j}{n}\right)^2\right]}$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \frac{\pi^2}{16}.$$

2.【解】$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{n}{(n + i)(n^2 + j^2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{i}{n}\right)\left[1 + \left(\dfrac{j}{n}\right)^2\right]}$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \frac{\pi}{4}\ln 2.$$

3.【解】由积分中值定理，存在$(\xi, \eta) \in D$，使得

$$\iint_D \mathrm{e}^{-x^2} \cos xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\xi^2} \cos \xi\eta \cdot \pi t^2,$$

于是$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2} \cos xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-\xi^2} \cos \xi\eta \cdot \pi t^2}{t^2} = \pi \lim\limits_{t\to 0} \mathrm{e}^{-\xi^2} \cos \xi\eta = \pi.$

4.【解】$\iint\limits_D (x + 2y)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D (x^2 + 4y^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，

因为$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

所以$\iint\limits_D (x+2y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=5\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{5}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=20\pi.$$

5.【解】令 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant x\}$，则

$$\iint\limits_D(\sin^2x+xy^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sin^2x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\sin^2x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^x\sin^2x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\pi}x\sin^2x\,\mathrm{d}x$$
$$=2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^2x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}.$$

6.【解】由$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r=2\pi\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r$ 得

$$\lim_{t\to0}\frac{\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\tan t-t}=2\pi\lim_{t\to0}\frac{\int_0^t rf(r)\mathrm{d}r}{\tan t-t}=2\pi\lim_{t\to0}\frac{tf(t)}{\sec^2t-1}$$
$$=2\pi\lim_{t\to0}\frac{tf(t)}{t^2}=2\pi\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=2\pi.$$

7.【解】由对称性得

$$I=\iint\limits_D(x^2+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

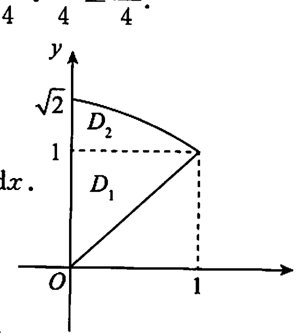
令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta\end{cases}\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta\right)$，则

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}r=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta\,\mathrm{d}\theta=8\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}.$$

8.【解】如图，令 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant 1\}$，

$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2-y^2},1\leqslant y\leqslant\sqrt{2}\}$，则

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$



第 8 题图

9.【解】$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1=\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}.$

10.【解】令 $A=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $f(x,y)=xy-A$，两边积分得

$$A=\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-A\cdot\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r-\frac{\pi}{2}A$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\mathrm{d}r-\frac{\pi}{2}A=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{2}A=\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}A,$$

解得 $A=\dfrac{4}{3(2+\pi)}$，故 $f(x,y)=xy-\dfrac{4}{3(2+\pi)}$.

*11.*【解】设质心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性得$\bar{x}=\bar{y}=0$，

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\,dv}{\iiint\limits_{\Omega}dv},$$

而$\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_0^1dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2}dx\,dy=\int_0^1\pi z^2dz=\frac{\pi}{3}$，$\iiint\limits_{\Omega}z\,dv=\int_0^1z\,dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2}dx\,dy=\int_0^1\pi z^3dz=\frac{\pi}{4}$，

故质心坐标为$(0,0,\frac{3}{4})$.

*12.*【解】曲面$\Sigma:z=x^2+y^2$，

$\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,1\leqslant z\leqslant 2\}$，其中$D_z=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant z\}$，则

$$V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\int_1^2dz\iint\limits_{D_z}dx\,dy=\int_1^2\pi z\,dz=\frac{3}{2}\pi.$$

◇ **解答题**

*13.*【解】(1) 令$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2\}$，

$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\}$，则

$$\iint\limits_{D}\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,dx\,dy,$$

而$\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,dx\,dy=\int_0^1dx\int_0^{x^2}(x^2-y)^{\frac{1}{2}}dy=-\frac{2}{3}\int_0^1(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x^2}dx=\frac{2}{3}\int_0^1x^3dx=\frac{1}{6}$，

$$\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,dx\,dy=\int_0^1dx\int_{x^2}^1(y-x^2)^{\frac{1}{2}}dy=\frac{2}{3}\int_0^1(y-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x^2}^1dx=\frac{2}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$\xlongequal{x=\sin t}\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\,dt=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8},$$

故$\iint\limits_{D}\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy=\frac{1}{6}+\frac{\pi}{8}$.

(2) 令$D_0=\{(x,y)\mid\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 2\}$，则

$$I=\iint\limits_{D}\max\{xy,1\}\,dx\,dy=\iint\limits_{D\setminus D_0}dx\,dy+\iint\limits_{D_0}xy\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{D\setminus D_0}dx\,dy=4-\int_{\frac{1}{2}}^2dx\int_{\frac{1}{x}}^2dy=4-\int_{\frac{1}{2}}^2(2-\frac{1}{x})dx=1+2\ln 2,$$

$\iint\limits_{D_0}xy\,dx\,dy=\int_{\frac{1}{2}}^2x\,dx\int_{\frac{1}{x}}^2y\,dy=\frac{15}{4}-\ln 2$，故$\iint\limits_{D}\max\{xy,1\}\,dx\,dy=\frac{19}{4}+\ln 2$.

*14.*【解】令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\end{cases}$则

$$I=\iint\limits_{D}|x-y|\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1r^2(\cos\theta-\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1r^2(\sin\theta-\cos\theta)dr$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})d\theta+\frac{\sqrt{2}}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})d\theta=\frac{2\sqrt{2}-2}{3}.$$

*15*.【解】由奇偶性得$\iint\limits_D (xy^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta)$，则

$$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r=4\int_0^{\pi}\sin^4\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=8(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}.$$

*16*.【解】设曲线 $L$ 的直角坐标形式为 $y=y(x)$，则

$$I=\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y}y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi a}y^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3\mathrm{d}t$$

$$=8a^3\int_0^{\pi}\sin^6 t\mathrm{d}t=16a^3\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi a^3}{2}.$$

*17*.【解】由对称性得 $I=\iint\limits_D\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_D\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\left(1-\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}(2-\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{4}.$$

*18*.【解】由奇偶性得 $I=\iiint\limits_{\Omega}(\sqrt{x^2+y^2}+xy)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v$，

则 $I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}z$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r$$

$$\overset{r=\sin t}{=}2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\mathrm{d}t=2\pi(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{8}.$$

*19*.【解】$\iiint\limits_{\Omega}x^2z\mathrm{d}v=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 z^5\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{24}.$$

## Ⅱ 基础练习

### ◇ 填空题

*1*.【解】改变积分次序得

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-y)\sin y\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 (y-1)\mathrm{d}(\cos y)=(y-1)\cos y\Big|_0^1-\int_0^1\cos y\,\mathrm{d}y=1-\sin 1.$$

2.【解】改变积分次序得

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\Big|_{x^2}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\mathrm{e}x\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}}{2}-(x-1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}}{2}-1.$$

3.【解】令$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2\}$，

$D_2=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant\sqrt{2},0\leqslant y\leqslant\sqrt{2-x^2}\}$，

则

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

4.【解】改变积分次序得

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y}\cos x^2\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{1}\cos x^2\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2x}\cos x^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\cos x^2\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\sin x^2\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\sin 1.$$

5.【解】$\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{y}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^2}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1+y^3)}{2\sqrt{1+y^3}}=\frac{1}{3}\sqrt{1+y^3}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}-1}{3}.$$

6.【解】令 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，$D_{11}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$，

则

$$\iint\limits_D\sqrt{||x|-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{||x|-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_{11}}\sqrt{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{x-y}\,\mathrm{d}y=-4\cdot\frac{2}{3}\int_0^1(x-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{16}{15}.$$

7.【解】设区域 $D$ 位于第一象限的部分为 $D_1$，

令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant 2\sqrt{\cos 2\theta}\right)$，则

区域 $D$ 的面积 $\displaystyle A=4\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{\cos 2\theta}}r\,\mathrm{d}r=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,\mathrm{d}(2\theta)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t=4.$$

8.【解】令 $D_t=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$，由积分中值定理，存在$(\xi,\eta)\in D_t$，使得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\cdot\pi t^2,$$

故$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{t^2}=\pi\lim\limits_{t\to 0}f(\xi,\eta)=\pi f(0,0)=2\pi$.

*9.*【解】$f(y)f(x+y)=\begin{cases}y(x+y),0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x+y\leqslant 1,\\0, \quad 其他.\end{cases}$

则$\iint\limits_D f(y)f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_{-y}^{1-y}(x+y)\mathrm{d}x=\int_0^1 y\left(\dfrac{x^2}{2}\Big|_{-y}^{1-y}+y\right)\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\int_0^1 y\mathrm{d}y=\dfrac{1}{4}$.

## ◇ 选择题

*10.*【解】$\iint\limits_D |x^2+y^2-4|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4|r^2-4|r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^4|r^2-4|r\mathrm{d}r$

$$=2\pi\left[\int_0^2(4-r^2)r\mathrm{d}r+\int_2^4(r^2-4)r\mathrm{d}r\right]=80\pi,$$

选(B).

*11.*【解】由$\dfrac{1}{2}\leqslant x+y\leqslant 1$得$[\ln(x+y)]^3\leqslant 0$,于是$I_1=\iint\limits_D[\ln(x+y)]^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 0$;

当$\dfrac{1}{2}\leqslant x+y\leqslant 1$时,由$(x+y)^3\geqslant\sin^3(x+y)\geqslant 0$得$I_2\geqslant I_3\geqslant 0$,

故$I_2\geqslant I_3\geqslant I_1$,应选(B).

*12.*【解】$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 rf(r)\mathrm{d}r=2\pi\int_1^2 rf(r)\mathrm{d}r$,选(A).

*13.*【解】令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\end{cases}$其中$0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant 2a\sin\theta$,

则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$,选(B).

*14.*【解】累次积分所对应的二重积分的积分区域为$D:x^2+y^2\leqslant 2x(y\geqslant 0)$,

则$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}\}$,选(D).

## ◇ 解答题

*15.*【解】$D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},x^2\leqslant y\leqslant x\right\}$,则

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

*16.*【解】改变积分次序得

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y,$$

原式$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\dfrac{3\mathrm{e}}{8}-\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$.

*17.*【解】令$D_1=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,\sqrt{x}\leqslant y\leqslant x\}$,$D_2=\{(x,y)\mid 2\leqslant x\leqslant 4,\sqrt{x}\leqslant y\leqslant 2\}$,

$D_1+D_2=D=\{(x,y)\mid 1\leqslant y\leqslant 2,y\leqslant x\leqslant y^2\}$,

则$\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi}{2}y\,dy$

$$=-\frac{8}{\pi^3}\int_1^2\frac{\pi}{2}y\cos\frac{\pi}{2}y\,d\left(\frac{\pi}{2}y\right)=-\frac{8}{\pi^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t\cos t\,dt$$

$$=-\frac{8}{\pi^3}\left(t\sin t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin t\,dt\right)=\frac{4}{\pi^3}(\pi+2).$$

*18*.【解】令$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,a-x\leqslant y\leqslant b-x\}$,

$D_2=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant b-x\}$,则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^a e^{-x}dx\int_{a-x}^{b-x}e^{-y}dy+\int_a^b e^{-x}dx\int_0^{b-x}e^{-y}dy$$

$$=\int_0^a e^{-x}(e^{x-a}-e^{x-b})dx+\int_a^b e^{-x}(1-e^{x-b})dx$$

$$=(a+1)(e^{-a}-e^{-b})-(b-a)e^{-b}.$$

*19*.【解】$D_1=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\leqslant r\leqslant\sec\theta\right\}$,

$D_2=\left\{(x,y)\mid \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\leqslant r\leqslant\csc\theta\right\}$,

则$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\sec\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\csc\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,dr.$

*20*.【解】$D=\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant\sec\theta\right\}$,则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)dr.$$

*21*.【解】令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,则$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t rf(r^2)dr=2\pi\int_0^t rf(r^2)dr$,

因为$f(x)$连续,所以$F'(t)=2\pi tf(t^2)$且$F'(0)=0$,于是

$$F''(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{F'(t)-F'(0)}{t}=\lim_{t\to0^+}2\pi f(t^2)=2\pi f(0)=2\pi.$$

*22*.【解】由$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$得$y=b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2$,

因此$I=\iint_D y\,dxdy=\int_0^a dx\int_0^{b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2}y\,dy=\frac{b^2}{2}\int_0^a\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^4dx$,

令$t=1-\sqrt{\frac{x}{a}}$,则$x=a(1-t)^2,dx=-2a(1-t)dt$,

于是$I=\frac{b^2}{2}\int_0^a\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^4dx=ab^2\int_0^1(t^4-t^5)dt=\frac{ab^2}{30}.$

*23*.【解】将区域向$x$轴投影,

令$D_1=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant 2x\right\}$,$D_2=\left\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant 3-x\right\}$,

则$\iint_D x\,dxdy=\int_0^1 x\,dx\int_{\frac{x}{2}}^{2x}dy+\int_1^2 x\,dx\int_{\frac{x}{2}}^{3-x}dy=\int_0^1\frac{3x^2}{2}dx+\int_1^2\left(3x-\frac{3x^2}{2}\right)dx=\frac{3}{2}.$

**24.【解】方法一**

由对称性得 $I=\iint\limits_D \frac{x\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{(x+y)\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sin r^2\mathrm{d}r=-\frac{1}{2}\cos r^2\Big|_0^1=\frac{1-\cos 1}{2}.$$

**方法二**

$$I=\iint\limits_D \frac{x\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sin r^2\mathrm{d}r=\int_0^1 r\sin r^2\mathrm{d}r=\frac{1-\cos 1}{2}.$$

**25.【解】** 直线 $x+y=\frac{\pi}{2}$ 将区域 $D$ 分为 $D_1,D_2$,

其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}-x\}$,

$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}-x\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\}$,

则 $I=\iint\limits_D|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

其中 $\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-1$,

$\iint\limits_{D_2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-1)\mathrm{d}x=1-\frac{\pi}{2}$,

故 $I=\iint\limits_D|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi-2$.

**26.【解】** 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\pi)$,则

$$\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}r\cos r\,\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\pi}r\,\mathrm{d}(\sin r)$$

$$=2\pi\left(r\sin r\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin r\,\mathrm{d}r\right)=-4\pi.$$

**27.【解】** 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 2a\cos\theta)$,则

$$\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x+y)^2\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3(\sin\theta+\cos\theta)^2\mathrm{d}r$$

$$=4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin\theta\cos\theta)\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta+8a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4a^4\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}a^4\cos^6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{4}{3}\right)a^4.$$

**28.【解】方法一** $I=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}}y^2\mathrm{d}x=\int_0^2 y^2(2-\sqrt{2y-y^2})\mathrm{d}y$

$$=2\int_0^2 y^2\mathrm{d}y-\int_0^2 y^2\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{16}{3}-\int_{-1}^1(t+1)^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{16}{3}-2\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{16}{3}-\frac{\pi}{2}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}-\frac{5\pi}{8}.$$

**方法二** 设由 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 及 $y$ 轴围成的区域为 $D_1$，则 $I=\left(\iint\limits_{D+D_1}-\iint\limits_{D_1}\right)y^2\mathrm{d}\sigma=I_1-I_2$，

而 $I_1=\iint\limits_{D+D_1}y^2\mathrm{d}\sigma=\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_0^2 y^2\mathrm{d}y=\frac{16}{3}$，

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}r=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{5\pi}{8},$$

所以 $I=\frac{16}{3}-\frac{5\pi}{8}$.

**29.【解】** $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}y\,\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}y(2\sqrt{1-y^2}-1)\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}2y\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}y\,\mathrm{d}y=\frac{7}{24}-\frac{3}{16}=\frac{5}{48}.$$

**30.【解】** 由对称性得 $I=\iint\limits_D\sin x^2\cos y^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sin y^2\cos x^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，

则 $2I=\iint\limits_D\sin x^2\cos y^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D\sin y^2\cos x^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\sin r^2\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{4}\cos r^2\Big|_0^a=\frac{\pi}{4}(1-\cos a^2),$$

故 $\iint\limits_D\sin x^2\cos y^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{8}(1-\cos a^2)$.

**31.【解】** 由极坐标法得

$$\iint\limits_D\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r(1-r^2)}{1+r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1-r^2}{1+r^2}\mathrm{d}(r^2)$$

$$\overset{r^2=t}{=}\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1-t}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\int_0^1\left(-1+\frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\ln\frac{4}{\mathrm{e}}.$$

**32.【解】** 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant4\cos\theta\right)$，

则 $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{4\cos\theta}r^3\mathrm{d}r=64\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2\theta)^2\mathrm{d}\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)^2\mathrm{d}t$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos t+\cos^2t)\mathrm{d}t=8\left(\frac{\pi}{2}+2+\frac{\pi}{4}\right)=6\pi+16.$$

**33.【解】** 由 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 得 $\Omega$ 在平面 $xOy$ 上的投影区域为

$D:x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}$,则

$\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}\}$,

于是
$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz&=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dz\\&=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2})dx\,dy\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r^2(\sqrt{1-r^2}-r)dr\\&=2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r^2\sqrt{1-r^2}\,dr-2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r^3dr\\&=2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r^2\sqrt{1-r^2}\,dr-\frac{\pi}{8},\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}r^2\sqrt{1-r^2}\,dr&\overset{r=\sin t}{=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2t\cos^2t\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\,dt\\&=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\,d(2t)=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{1}{8}I_2=\frac{\pi}{32},\end{aligned}$$

所以原式$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{8}$.

**34.【解】**$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant z^2,0\leqslant z\leqslant a\}$,则
$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dx\,dy\,dz=\int_0^a dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z r^3dr=\frac{\pi}{2}\int_0^a z^4dz=\frac{\pi a^5}{10}.$$

**35.【解】**曲线$\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$绕$z$轴一周所成的曲面为$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$,

则$\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,2\leqslant z\leqslant 8\}$,其中$D_z:x^2+y^2\leqslant 2z$,于是
$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dx\,dy\,dz=\int_2^8dz\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)dx\,dy=\int_2^8dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}r^3dr=2\pi\int_2^8z^2dz=336\pi$$

**36.【解】**由$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\x^2+y^2=3z\end{cases}$得$z=1$,故$\Omega$在$xOy$平面上的投影区域为$D:x^2+y^2\leqslant 3$,

于是
$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}z\,dx\,dy\,dz&=\iint\limits_{D}dx\,dy\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}z\,dz\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}\left[4-x^2-y^2-\frac{1}{9}(x^2+y^2)^2\right]dx\,dy\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\left(4-r^2-\frac{1}{9}r^4\right)r\,dr=\pi\times\left(6-\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{13\pi}{4}.\end{aligned}$$

**37.【解】**令$\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi,\\y=r\sin\theta\sin\varphi,\\z=r\cos\varphi\end{cases}\left(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant t\right)$,
$$\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^t f(r^2)r^2dr=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^t f(r^2)r^2dr,$$

$$\text{则}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^5}\iiint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{t^5}=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\lim_{t\to 0}\frac{t^2 f(t^2)}{5t^4}$$

$$=\frac{2\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\lim_{t\to 0}\frac{f(t^2)-f(0)}{t^2}=\frac{2\pi}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)f'(0).$$

*38*.【解】令$\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi,\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=r\cos\varphi\end{cases}\left(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant t\right)$，

$$\text{则}\iiint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r,$$

$$\text{则}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^3}\iiint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\pi(2-\sqrt{2})\lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{t^3}=\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}f(0).$$

# 九、曲线积分与曲面积分

## Ⅰ 入门练习

### ◇ 填空题

*1*.【解】$\int_L xy\,\mathrm{d}s=\int_0^1 x^3\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{32}\int_0^1[(1+4x^2)-1]\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}(1+4x^2)\overset{1+4x^2=t}{=}\frac{1}{32}\int_1^5(t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{32}\int_1^5\left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{32}\left[\frac{2}{5}(25\sqrt{5}-1)-\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)\right]=\frac{25\sqrt{5}+1}{120}.$$

2.【解】由奇偶性得$\oint_L(x^2+xy^2)\mathrm{d}s=\oint_L x^2\mathrm{d}s$，

再由对称性得$\oint_L x^2\mathrm{d}s=\oint_L y^2\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=2\oint_L\mathrm{d}s=2\times 2\pi\times 2=8\pi.$

3.【解】曲线 $L:y=x^2$（起点 $x=0$，终点 $x=1$），则

$$\int_L y\,\mathrm{d}x+(2x+1)\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+(2x+1)\times 2x\,\mathrm{d}x=\int_0^1(5x^2+2x)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}.$$

*4*.【解】方法一

曲线 $L$ 可表示为 $L:(x-1)^2+y^2=1(y\geqslant 0)$，

其参数形式为 $L:\begin{cases}x=1+\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$（起点 $t=\pi$，终点 $t=0$），则

$$\int_L 2y\,\mathrm{d}x-(x+1)\mathrm{d}y=\int_\pi^0 2\sin t\cdot(-\sin t)\mathrm{d}t-(2+\cos t)\cdot\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\pi(2\sin^2 t+\cos^2 t+2\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi(1+2\cos t+\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=\pi+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\pi+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}.$$

**方法二**

$I=\int_L 2y\,\mathrm{d}x-(x+1)\mathrm{d}y=\oint_{L+\overline{AO}}2y\,\mathrm{d}x-(x+1)\mathrm{d}y+\int_{\overline{OA}}2y\,\mathrm{d}x-(x+1)\mathrm{d}y$,

而$\oint_{L+\overline{AO}}2y\,\mathrm{d}x-(x+1)\mathrm{d}y=-\iint_D(-1-2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\pi$,

$\int_{\overline{OA}}2y\,\mathrm{d}x-(x+1)\mathrm{d}y=\int_0^2 2\times 0\,\mathrm{d}x=0$,

故$\int_L 2y\,\mathrm{d}x-(x+1)\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\pi$.

5.**【解】**因为曲线积分$\int_L xy^2\mathrm{d}x+\varphi(x)y\,\mathrm{d}y$与路径无关,

所以$\varphi'(x)y=2xy$,即$\varphi'(x)=2x$,解得$\varphi(x)=x^2+C$,

由$\varphi(0)=2$,得$\varphi(x)=x^2+2$,

故$\int_{(1,2)}^{(2,3)}xy^2\mathrm{d}x+\varphi(x)y\,\mathrm{d}y=\int_1^2 4x\,\mathrm{d}x+\int_2^3 6y\,\mathrm{d}y=2x^2\Big|_1^2+3y^2\Big|_2^3=21$.

6.**【解】**显然$\iint_\Sigma\left(\frac{x}{2}+y-\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint_\Sigma(x+2y-z)\mathrm{d}S=\iint_\Sigma\mathrm{d}S$,

$\Sigma:z=x+2y-2((x,y)\in D$,其中$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\})$,则

$$\iint_\Sigma(\frac{x}{2}+y-\frac{z}{2})\mathrm{d}S=\iint_\Sigma\mathrm{d}S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\sqrt{1+1+4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{6}\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\sqrt{6}\pi.$$

7.**【解】**所做的功为$W=\int_L(2x-y)\mathrm{d}x+(x+2y)\mathrm{d}y$,

曲线段$L$的参数形式为$L:\begin{cases}x=\cos t,\\y=\sin t\end{cases}$(起点$t=\pi$,终点$t=0$),则

$W=\int_\pi^0(2\cos t-\sin t)(-\sin t)\mathrm{d}t+(\cos t+2\sin t)\cos t\,\mathrm{d}t=\int_\pi^0\mathrm{d}t=-\pi$.

8.**【解】**$\iint_\Sigma(x^2+2y+z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D(x^2+2y+\sqrt{4-x^2-y^2})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint_D(x^2+\sqrt{4-x^2-y^2})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r(r^2\cos^2\theta+\sqrt{4-r^2})\mathrm{d}r$$

$$=4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta+2\pi\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta-\pi\int_0^2(4-r^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(4-r^2)$$

$$=16\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\pi\times\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=4\pi+\frac{16\pi}{3}=\frac{28\pi}{3}.$$

9.**【解】**$\mathbf{grad}f=\{2x,-2y,4z\}$,

则$\mathrm{div}(\mathbf{grad}f)=\frac{\partial(2x)}{\partial x}+\frac{\partial(-2y)}{\partial y}+\frac{\partial(4z)}{\partial z}=2-2+4=4$.

10.**【解】**取曲线$L$的截口圆为$\Sigma$,方向向上,

法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,1,1\}$，法向量的方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，由斯托克斯公式得

$$\oint_L y\,dx-(2z+1)dy+2x\,dz=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma\begin{vmatrix}1&1&1\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ y&-2z-1&2x\end{vmatrix}dS=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma dS,$$

原点到截口平面的距离为 $d=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=3$，则截口圆的半径为 $r=\sqrt{25-3^2}=4$，

故 $\displaystyle\oint_L y\,dx-(2z+1)dy+2x\,dz=-\frac{16\pi}{\sqrt{3}}$.

## ◇ 解答题

**11.【解】** $\displaystyle I=\int_L x^3dy-(\sqrt{x^2+y^2}+y)dx=\int_L x^3dy-(y+1)dx$

$$=\oint_{L+\overline{AB}}x^3dy-(y+1)dx+\int_{\overline{BA}}x^3dy-(y+1)dx,$$

而 $\displaystyle\oint_{L+\overline{AB}}x^3dy-(y+1)dx=-\iint_D(3x^2+1)dx\,dy=-\int_0^\pi d\theta\int_0^1(3r^3\cos^2\theta+r)dr$

$$=-\int_0^\pi\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\right)d\theta=-\frac{7\pi}{8},$$

$\displaystyle\int_{\overline{BA}}x^3dy-(y+1)dx=\int_{-1}^1-dx=-2$，故

$$\int_L x^3dy-(\sqrt{x^2+y^2}+y)dx=-\frac{7\pi}{8}-2.$$

**12.【解】** $P=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，　$Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}((x,y)\neq(0,0))$.

令 $L_0:x^2+y^2=r^2(r>0,L_0$ 在 $L$ 内，$L_0$ 取逆时针)，

设 $L_0$ 与 $L$ 所围成的多连通区域为 $D_1$，$L_0$ 所围成的单连通区域为 $D_2$，

由 $\displaystyle\oint_{L+L_0^-}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\iint_{D_1}0\,dx\,dy=0$ 得

$$I=\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\oint_{L_0}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{r^2}\int_{L_0}x\,dy-y\,dx$$

$$=\frac{2}{r^2}\iint_{D_2}dx\,dy=\frac{2}{r^2}\cdot\pi r^2=2\pi.$$

**13.【解】** 由奇偶性得 $\displaystyle I=\iint_\Sigma(xy+x^2z)dS=\iint_\Sigma x^2z\,dS$，

$\Sigma:z=\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2\leqslant1)$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则

$$I=\iint_\Sigma x^2z\,dS=\sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant1}x^2\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant1}y^2\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2}\pi}{5}.$$

**14.【解】** 曲面 $\Sigma$ 在 $xOy$ 平面上的投影区域为 $D:x^2+y^2\leqslant 1, z'_x=2x, z'_y=2y$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r=\pi\int_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}(r^2)=\pi\int_0^1 r\sqrt{1+4r}\,\mathrm{d}r$$

$$\overset{1+4r=t}{=}\frac{\pi}{16}\int_1^5(t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{(25\sqrt{5}+1)\pi}{60}.$$

**15.【解】方法一** $I=\iint\limits_{\Sigma}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

$$\iint\limits_{\Sigma}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=-2\pi\int_0^1(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-r^2)=-\frac{4\pi}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{4\pi}{3};$$

令 $\Sigma_1:x=\sqrt{1-y^2-z^2}$，取前侧，其在 $yOz$ 平面上的投影区域为 $D_{yz}:y^2+z^2\leqslant 1(z\geqslant 0)$，

则 $\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint\limits_{\Sigma_1}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint\limits_{D_{yz}}z\sqrt{1-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\sin\theta\,\mathrm{d}r=4\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$\overset{r=\sin t}{=}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\,\mathrm{d}t=4(I_2-I_4)=\frac{\pi}{4},$$

故 $\iint\limits_{\Sigma}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{19\pi}{12}$.

**方法二** 令 $\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant 1)$，取下侧，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint\limits_{\Sigma_0})2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

而 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}(z+2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r\cos\varphi+2)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{4}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{2}{3}\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=2\pi(\frac{1}{8}+\frac{2}{3})=\frac{19\pi}{12};$$

$\iint\limits_{\Sigma_0}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，故 $\iint\limits_{\Sigma}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{19\pi}{12}$.

**16.【解】** 令 $P(x,y)=\frac{y}{x^2+4y^2}$， $Q(x,y)=-\frac{x}{x^2+4y^2}$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{x^2+4y^2-2x^2}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2+4y^2-8y^2}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2},$$

因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以 $\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分；

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\int_1^x\frac{0\mathrm{d}x}{x^2}+\int_0^y\frac{-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$$

$$=-\frac{x}{2}\int_0^y \frac{d(2y)}{x^2+(2y)^2}=-\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x}\arctan\frac{2y}{x}\Big|_0^y$$

$$=-\frac{1}{2}\arctan\frac{2y}{x}.$$

## Ⅱ 基础练习

### ◇ 填空题

**1.【解】** $I=\iint\limits_D(1-2ye^{y^2})dxdy$，由二重积分的对称性得 $I=\iint\limits_D dxdy=\frac{\pi}{2}$.

**2.【解】** $ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$，

$$\int_L(x^2+2xy)ds=\int_{-1}^1(x^2+2x\sqrt{1-x^2})\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=2\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=2I_2=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

**3.【解】** 由对称性得 $\oint_L(9x^2+72xy+4y^2)ds=\oint_L(9x^2+4y^2)ds$，

于是原式 $=36\oint_L\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)ds=36\oint_L ds=36l$.

**4.【解】** $\oint_\Gamma x^2ds=\frac{1}{3}\oint_\Gamma(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{4}{3}\oint_\Gamma ds$，

原点到平面 $x+y+z=1$ 的距离为 $d=\frac{1}{\sqrt{3}}$，则圆 $\Gamma$ 的半径为 $r=\sqrt{4-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{33}}{3}$，

则 $\oint_\Gamma x^2ds=\frac{4}{3}\oint_\Gamma ds=\frac{4}{3}\times2\pi\times\frac{\sqrt{33}}{3}=\frac{8\pi\sqrt{33}}{9}$.

**5.【解】** 令 $L_1: y=1-x$（起点 $x=1$，终点 $x=0$），

$L_2: y=1+x$（起点 $x=0$，终点 $x=-1$），

$L_3: y=-1-x$（起点 $x=-1$，终点 $x=0$），

$L_4: y=-1+x$（起点 $x=0$，终点 $x=1$），

则 $\oint_L x^2ydx+xy^2dy=\int_{L_1}+\int_{L_2}+\int_{L_3}+\int_{L_4}$

$$=\int_1^0[x^2(1-x)-x(1-x)^2]dx+\int_0^{-1}[x^2(1+x)+x(1+x)^2]dx+$$

$$\int_{-1}^0[-x^2(1+x)-x(1+x)^2]dx+\int_0^1[x^2(x-1)+x(x-1)^2]dx$$

$$=0.$$

6.【解】因为 $xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)$,

所以$\int_{(1,1)}^{(2,2)}xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{(1,1)}^{(2,2)}=\frac{1}{2}(16-1)=\frac{15}{2}$.

7.【解】$S:z=1-x+2y$,$S$ 在 $xOy$ 平面上的投影区域为

$$D_{xy}=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 1,\frac{x-1}{2}\leqslant y\leqslant 0\right\},$$

$\mathrm{d}S=\sqrt{1+1+4}\,\mathrm{d}\sigma=\sqrt{6}\,\mathrm{d}\sigma$,则

$$\iint_S\mathrm{d}S=\sqrt{6}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{6}\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{x-1}{2}}^0\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{6}}{2}\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

## ◆ 选择题

8.【解】$P(x,y)=\frac{x+ay}{(x+y)^2}$,$Q(x,y)=\frac{y}{(x+y)^2}$,由$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$得 $a=2$,选(D).

9.【解】取 $C_r:x^2+y^2=r^2$(其中 $r>0$,$C_r$ 在 $L$ 内,取逆时针),

$$P(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

设由 $L$ 及 $C_r^-$ 所围成的区域为 $D_r$,由 $C_r$ 围成的区域为 $D_0$,由格林公式得

$$\oint_{L+C_r^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_r}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=0,$$

从而$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_{C_r}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$.

而$\oint_{C_r}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_{C_r}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$,再由格林公式得

$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_{C_r}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{2}{r^2}\iint_{D_0}\mathrm{d}\sigma=2\pi$,选(B).

10.【解】因为曲面关于平面 $xOz$、$yOz$ 对称,所以$\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}S=\iint_\Sigma y\mathrm{d}S=\iint_\Sigma xyz\,\mathrm{d}S=0$,

注意到$\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}S>0$,$\iint_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}S>0$,$\iint_\Sigma z\mathrm{d}S>0$,故选(C).

11.【解】$\mathrm{d}S=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则

$$\iint_\Sigma\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{e}^{r^2}\mathrm{d}r=\pi(\mathrm{e}^4-1),\text{选(B)}.$$

## ◆ 解答题

12.【解】令 $L_1:y=0(0\leqslant x\leqslant 2)$,$L_2:\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=2\sin t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$,$L_3:y=x(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$,

则$\int_L\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_{L_1}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{L_2}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{L_3}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$,

而$\int_{L_1}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^2-1$,

$$\int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2e^2\,dt=\frac{\pi e^2}{2},$$

$$\int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds=\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}x}\,dx=e^{\sqrt{2}x}\Big|_0^{\sqrt{2}}=e^2-1,$$

所以原式 $=e^2-1+\dfrac{\pi e^2}{2}+e^2-1=\left(2+\dfrac{\pi}{2}\right)e^2-2.$

**13.【解】**(1) $\int_L x\,dy-(2y+1)\,dx=\int_0^2 x\,dx-(2x+1)\,dx=-\int_0^2(x+1)\,dx=-4.$

(2) $\int_L x\,dy-(2y+1)\,dx=\int_0^2 x\times x\,dx-(x^2+1)\,dx=-2.$

**14.【解】**(1) $\int_L (xy^2+y)\,dx+(x^2y+x)\,dy=\int_0^1 (x^3+x)\,dx+(x^3+x)\,dx$

$$=\int_0^1(2x^3+2x)\,dx=\frac{3}{2}.$$

(2) $\int_L (xy^2+y)\,dx+(x^2y+x)\,dy=\int_0^1 (x^5+x^2)\,dx+(x^4+x)\times 2x\,dx$

$$=\int_0^1(3x^5+3x^2)\,dx=\frac{3}{2}.$$

**15.【解】**令 $\begin{cases}x=2\cos t,\\ y=2\sin t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right),$

则 $\int_L (3x+2y+1)\,dx+x e^{x^2+y^2}\,dy$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(6\cos t+4\sin t+1)(-2\sin t)+4e^4\cos^2 t]\,dt$

$=-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt-8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt+4e^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$

$=(e^4-2)\pi-8.$

**16.【解】**$I=\int_L (e^x\sin y+x-y)\,dx+(e^x\cos y+y)\,dy$

$$=\left(\oint_{L+\overline{OA}}-\int_{\overline{OA}}\right)(e^x\sin y+x-y)\,dx+(e^x\cos y+y)\,dy$$

而 $\oint_{L+\overline{OA}}(e^x\sin y+x-y)\,dx+(e^x\cos y+y)\,dy=\iint_D d\sigma=\dfrac{\pi a^2}{2},$

$\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y+x-y)\,dx+(e^x\cos y+y)\,dy=\int_0^{2a}x\,dx=2a^2,$

所以 $\int_L (e^x\sin y+x-y)\,dx+(e^x\cos y+y)\,dy=\left(\dfrac{\pi}{2}-2\right)a^2.$

**17.【解】**取 $L_0:y=0$(起点 $x=-a$,终点 $x=a$),

$I=\left(\oint_{L+L_0}-\int_{L_0}\right)\dfrac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}\,dx+[4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2})]\,dy,$

而 $\oint_{L+L_0}\dfrac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}\,dx+[4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2})]\,dy=\iint_D 4\,d\sigma=2\pi a^2,$

$\int_{L_0}\dfrac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}\,dx+[4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2})]\,dy=0,$

则 $I=\int_L \frac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}dx+[4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2})]dy=2\pi a^2$.

**18.【解】** 令 $L_1: y=0$(起点 $x=0$,终点 $x=2$),则

$$I=\left(\oint_{L+L_1}-\int_{L_1}\right)(e^x+1)\cos y dx-[(e^x+x)\sin y-x]dy,$$

其中 $\oint_{L+L_1}(e^x+1)\cos y dx-[(e^x+x)\sin y-x]dy=\iint_D d\sigma$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi(1+\cos\theta)^2d\theta=4\int_0^\pi\cos^4\frac{\theta}{2}d\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{3\pi}{4},$$

$\int_{L_1}(e^x+1)\cos y dx-[(e^x+x)\sin y-x]dy=\int_0^2(e^x+1)dx=e^2+1$,

所以原式 $=\frac{3\pi}{4}-e^2-1$.

**19.【解】** $I=I(a)=\int_0^\pi[(1+a^3\sin^3x)+(2x+a\sin x)\cdot a\cos x]dx=\pi-4a+\frac{4a^3}{3}$.

由 $I'(a)=4(a^2-1)=0$,得 $a=1$,

$I''(a)=8a$,由 $I''(1)=8>0$ 得 $a=1$ 为 $I(a)$ 的极小值点,

因为 $a=1$ 是 $I(a)$ 的唯一驻点,所以 $a=1$ 为 $I(a)$ 的最小值点,所求的曲线为 $y=\sin x$.

**20.【解】** 因为曲线积分与路径无关,所以 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,即 $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$,于是 $Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$.

由 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy$,得

$t^2+\int_0^1\varphi(y)dy=t+\int_0^t\varphi(y)dy$,两边对 $t$ 求导数得 $1+\varphi(t)=2t$,$\varphi(t)=2t-1$,

所以 $Q(x,y)=x^2+2y-1$.

**21.【解】** $P(x,y)=[f'(x)+2f(x)+e^x]y$,  $Q(x,y)=f'(x)-x$,

$\frac{\partial Q}{\partial x}=f''(x)-1$,  $\frac{\partial P}{\partial y}=f'(x)+2f(x)+e^x$,

因为曲线积分与路径无关,所以 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,整理得 $f''(x)-f'(x)-2f(x)=e^x+1$,

特征方程为 $\lambda^2-\lambda-2=0$,特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2$,

方程 $f''(x)-f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$;

令方程 $f''(x)-f'(x)-2f(x)=e^x$ 的特解为 $f_1(x)=ae^x$,代入得

$a=-\frac{1}{2}$,即 $f_1(x)=-\frac{1}{2}e^x$;

方程 $f''(x)-f'(x)-2f(x)=1$ 的特解为 $f_2(x)=-\frac{1}{2}$,

方程 $f''(x)-f'(x)-2f(x)=e^x+1$ 的特解为 $f_0(x)=-\frac{1}{2}(e^x+1)$,

方程 $f''(x)-f'(x)-2f(x)=e^x+1$ 的通解为 $f(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-\frac{1}{2}(e^x+1)$,

由 $f(0)=0, f'(0)=\frac{1}{2}$ 得 $\begin{cases} C_1+C_2-1=0, \\ -C_1+2C_2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \end{cases}$ 解得 $C_1=\frac{1}{3}, C_2=\frac{2}{3}$,

故 $f(x)=\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{2}{3}e^{2x}-\frac{1}{2}(e^x+1)$.

22.【解】设 $L$ 所围成的区域为 $D$,令 $P(x,y)=-\frac{y}{x^2+4y^2}, Q(x,y)=\frac{x}{x^2+4y^2}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

(1) 当 $O(0,0)$ 在 $L$ 所围成区域的外部时,由格林公式

$$\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0.$$

(2) 当 $O(0,0)$ 在 $L$ 所围成的区域内部时,作 $C_r: x^2+4y^2=r^2$(其中 $r>0$, $C_r$ 在 $L$ 内部,方向为逆时针方向),再令由 $L$ 和 $C_r^-$ 所围成的区域为 $D_r$,由格林公式

$$\oint_{L+C_r^-}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}=\iint_{D_r}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0,$$

从而有
$$\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}=\oint_{C_r}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}.$$

令 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=\frac{r}{2}\sin\theta, \end{cases}$ 则有

$$\oint_{C_r}\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r\cos\theta\times\frac{r}{2}\cos\theta-\frac{r}{2}\sin\theta\times(-r\sin\theta)}{r^2}d\theta=\pi.$$

23.【解】$P(x,y)=\frac{y}{x^2+4y^2},\quad Q(x,y)=-\frac{x}{x^2+4y^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,

作上半椭圆 $C_0: x^2+4y^2=1$,方向取逆时针,$L$ 与 $C_0^-$ 围成的区域为 $D_1$,$C_0$ 与 $x$ 轴围成的区域为 $D_2$,由格林公式得

$$\oint_{L+C_0^-}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+4y^2}=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=0,$$

从而有

$$\int_L\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+4y^2}=\int_{C_0}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+4y^2},\quad \int_{C_0}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+4y^2}=\int_{C_0}y\,dx-x\,dy,$$

原式 $=\oint_{C_0+\overline{CA}}-\int_{\overline{CA}}=-2\iint_{D_2}d\sigma-0=-2\times\frac{1}{4}\pi=-\frac{1}{2}\pi$.

24.【解】$I=\iint_S\left(2x+\frac{4y}{3}+z\right)dS=4\iint_S\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\right)dS=4\iint_S dS$,

而 $S: z=4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$, $D_{xy}$ 为由 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 及 $x$ 轴,$y$ 轴围成的部分,

$dS=\sqrt{1+4+\frac{16}{9}}\,d\sigma=\frac{\sqrt{61}}{3}d\sigma$,

于是 $I=4\iint\limits_S dS=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint\limits_{D_{xy}}d\sigma=\frac{4\sqrt{61}}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times3=4\sqrt{61}.$

**25.【解】**曲面 $\Sigma$ 在 $xOy$ 平面上的投影区域为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant4$,

$dS=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dx\,dy=\sqrt{2}\,dx\,dy$,

则 $\iint\limits_\Sigma z^2dS=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dx\,dy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr=8\sqrt{2}\pi.$

**26.【解】**由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$ 得曲面 $\Sigma$ 在 $xOy$ 平面上的投影区域为 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}$,

由曲面 $\Sigma:z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 得

$$dS=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,d\sigma=\frac{d\sigma}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

所以 $I=\iint\limits_\Sigma z\,dS=\iint\limits_{D_{xy}}d\sigma=\frac{\pi}{2}.$

**27.【解】**曲面 $S:z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $xOy$ 平面上的投影为 $D:x^2+y^2\leqslant1$,

$dS=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,d\sigma=\sqrt{2}\,d\sigma$,

则 $I=\iint\limits_S(x^2+y^2+z)dS=\sqrt{2}\iint\limits_D(x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$

$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(r^2+r)dr=2\sqrt{2}\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{7\sqrt{2}\pi}{6}.$

**28.【解】**令 $S_1:z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}$,$S_2:z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$,$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant1$,

$dS=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,d\sigma=\frac{d\sigma}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$,

$\iint\limits_S(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{S_1}(x^2+y^2)dS+\iint\limits_{S_2}(x^2+y^2)dS$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}d\sigma=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}dr=\frac{8\pi}{3}.$$

**29.【解】**平面 $\pi$ 的方程为 $\frac{x}{2}X+\frac{y}{2}Y+zZ-1=0$,$d(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2}}$,

由 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}$,得 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}d\sigma$,

所以 $\iint\limits_\Sigma\frac{z}{d(x,y,z)}dS=\frac{1}{4}\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dx\,dy=\frac{3\pi}{2}.$

**30.【解】**由高斯公式得

$$\oiint\limits_\Sigma xz^2dy\,dz+(x^2y-z^3)dz\,dx+(2xy+y^2z)dx\,dy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{5}a^5.$$

**31.【解】** 由两类曲面积分之间的关系得

$$\oiint\limits_S(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\mathrm{d}S=\oiint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而 $\oiint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{12\pi R^5}{5},$$

所以 $\oiint\limits_S(x^3\cos x+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\mathrm{d}S=\frac{12\pi R^5}{5}.$

**32.【解】** 设 $\Omega$ 是 $\Sigma$ 所围成的区域，它在 $xOz$ 平面上的投影区域为 $x^2+z^2\leqslant 1$，由高斯公式得

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+1\right]\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{r^2+6}^{8-r^2}\mathrm{d}y=\pi.$$

**33.【解】** 由对称性得 $\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，所以 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

曲面 $\Sigma$ 在平面 $yOz$ 上的投影区域为 $D:y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$，

$$I=\iint\limits_D(z-y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+r\sin\theta-r^2\cos^2\theta\right)r\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{24}\sin\theta-\frac{1}{64}\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{16}I_2\right)=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{16}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{7\pi}{64}.$$

**34.【解】** 令 $\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant 4)$，取上侧，则

$$I=\left(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint\limits_{\Sigma_0}\right)(x+3z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^3z^2+yz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}(x+3z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^3z^2+yz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega}(1+z)\mathrm{d}v$$

$$=-\int_0^2(1+z)\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant(2-z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\pi,$$

又 $\iint\limits_{\Sigma_0}(x+3z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^3z^2+yz)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{\Sigma_0}-3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=-\frac{3}{2}\times 2\pi\times 4=-12\pi,$$

所以原式 $=8\pi.$

**35.【解】** 补充 $\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$，取下侧，

原式 $=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_0}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

而 $\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_0} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$

$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\mathrm{d}r=\frac{6}{5}\pi a^5$,

$\iint_{\Sigma_0}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_0}(z^3+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi a^2$,

故原式 $=\frac{6}{5}\pi a^5+\pi a^2$.

**36.【解】方法一**

$D_{xz}=\{(x,z)\mid 0\leqslant z\leqslant\sqrt{4-x^2}\}$, $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$,则

$\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\iint_{D_{xz}}z\sqrt{4-x^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\sqrt{4-r^2}\,r^2\sin\theta\mathrm{d}r$

$=2\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^2\sqrt{4-r^2}\,r^2\mathrm{d}r=4\int_0^2\sqrt{4-r^2}\,r^2\mathrm{d}r$

$\xlongequal{r=2\sin t}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\times 4\sin^2 t\times 2\cos t\mathrm{d}t=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}(2t)$

$=8\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=16\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=4\pi$,

$\iint_{\Sigma}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\times 4\pi=8\pi$,所以$\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi+8\pi=12\pi$.

**方法二** 补充曲面 $\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant 4)$,取下侧,则

$$\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma+\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由高斯公式得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^2 z\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant 4-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 z\times\pi(4-z^2)\mathrm{d}z=4\pi,$$

而$\iint_{\Sigma_0}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_0}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\times 4\pi=-8\pi$,所以原式 $=12\pi$.

**37.【解】**将曲面 $S$ 向 $xOz$ 面投影得 $D_{xz}=\{(x,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant z\leqslant 1\}$,

$\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{xz}}z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 z^2\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$,

$\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{6}$,

故$\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}-\frac{\pi}{6}$.

**38.【解】方法一** 令 $\Sigma_0:y=1\left(D_{xz}:(x-1)^2+\frac{z^2}{4}\leqslant 1\right)$,取左侧,

则原式 $=\oint\!\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_0}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_0}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1-I_2$,

$$I_1=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}v$$

令$\begin{cases}x-1=r\cos\theta\sin\varphi,\\ y-1=r\sin\theta\sin\varphi,\\ \dfrac{z}{2}=r\cos\varphi\end{cases}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant 1)$，$\mathrm{d}v=2r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，则

$$I_1=4\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\left(\frac{1}{4}\cos\theta\sin^2\varphi+\frac{1}{4}\sin\theta\sin^2\varphi+\frac{2}{3}\sin\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=4\int_0^\pi\left(\frac{\pi}{8}\cos\theta+\frac{\pi}{8}\sin\theta+\frac{4}{3}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{19}{3}\pi,$$

$$I_2=\iint\limits_{\Sigma_0}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_0}y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint\limits_{D_{xz}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-2\pi,$$

故原式$=\dfrac{19}{3}\pi+2\pi=\dfrac{25}{3}\pi$.

**方法二**　设 $\Sigma_0:y=1$，取左侧，$D:(x-1)^2+\dfrac{z^2}{4}\leqslant 1$，

则原式$=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_0}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$\oiint\limits_{\Sigma_0}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-2\pi,$$

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v,$$

故原式$=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v+2\pi$.

$$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=\int_0^2x\mathrm{d}x\iint\limits_{D_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_0^2x(2x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi,\quad D_x:(y-1)^2+\frac{z^2}{4}\leqslant 2x-x^2,y\geqslant 1;$$

$$\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}v=\int_1^2y\mathrm{d}y\iint\limits_{D_y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pi\int_1^2y\cdot 2\cdot(2y-y^2)\mathrm{d}y=\frac{11}{6}\pi,\quad D_y:(x-1)^2+\frac{z^2}{4}\leqslant 2y-y^2.$$

所以原式$=\dfrac{8}{3}\pi+\dfrac{11}{3}\pi+2\pi=\dfrac{25}{3}\pi$.

**39.【解】**$\Sigma$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,1\}$，方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，根据两类曲面积分之间的关系有

$$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}\{[f(x,y,z)+x]-[2f(x,y,z)+y]+[f(x,y,z)+z]\}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

**40.【解】**补充曲面 $\Sigma_0:z=4(x^2+4y^2\leqslant 4)$，取该曲面的下侧，

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{\Sigma_0} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_0} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -3\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v = -3\int_0^4 \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+4y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -3\int_0^4 \pi \times \sqrt{z} \times \frac{\sqrt{z}}{2}\mathrm{d}z = -12\pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_0} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_0} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -4\iint\limits_{x^2+4y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -4\times\pi\times 2\times 1 = -8\pi,$$

所以原式 $= -12\pi + 8\pi = -4\pi$.

**41.【解】** 令 $I_1 = \iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，$I_2 = \iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

令 $\Sigma_1: z = 1(x^2+y^2\leqslant 1)$，取下侧；$\Sigma_2: z = 2(x^2+y^2\leqslant 4)$，取上侧，三个曲面所围成的几何体为 $\Omega$，令 $D = \{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$，则

$$I_1 = \iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \iint\limits_{\Sigma_1}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \iint\limits_{\Sigma_2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

因为 $\iint\limits_{\Sigma_1}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$，$\iint\limits_{\Sigma_2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$，

所以 $I_1 = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iiint\limits_{\Omega}(0+0)\mathrm{d}v = 0$，

$$I_2 = \iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\frac{r\mathrm{e}^r}{r}\mathrm{d}r = -2\pi(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}),$$

故原式 $= -2\pi(\mathrm{e}^2-\mathrm{e})$.

**42.【解】** 令 $\Sigma_1: z = 0\left(\frac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1\right)$ 取下侧，$\Sigma_2: z = 3\left(\frac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1\right)$ 取上侧，

$$I = \iint\limits_{\Sigma}(z-y)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \left(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} - \iint\limits_{\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_2}\right)(z-y)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

而 $\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}(z-y)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}(z-y)\mathrm{d}v$

$$= \int_0^3\mathrm{d}z\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1}(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^3 z\mathrm{d}z\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9\pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(z-y)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma_2}(z-y)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

所以原式 $= 9\pi$.

**43.【解】** 令 $F(x,y,z) = x^2 - 4x + y^2 + z^2$，曲面的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \{F_x, F_y, F_z\} = \{2x-4, 2y, 2z\},$$

法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2x-4}{\sqrt{(2x-4)^2+(2y)^2+(2z)^2}}=\frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}}=\frac{x-2}{2},$$

$$\cos\beta=\frac{2y}{\sqrt{(2x-4)^2+(2y)^2+(2z)^2}}=\frac{y}{2},\cos\gamma=\frac{2z}{\sqrt{(2x-4)^2+(2y)^2+(2z)^2}}=\frac{z}{2},$$

则 $$I=\frac{1}{2}\iint_\Sigma[yz(y-z)\cdot(x-2)+zx(z-x)\cdot y+xy(x-y)\cdot z]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{2}\iint_\Sigma[y^2z\cdot(x-2)-xy^2z]\mathrm{d}S=-\iint_\Sigma y^2z\mathrm{d}S,$$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2-x}{\sqrt{4x-x^2-y^2}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{4x-x^2-y^2}}$,则

$$I=-\iint_D y^2\cdot\sqrt{4x-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{(x-2)^2+y^2}{4x-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta\right)$,则

$$I=-2\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\sin^2\theta\mathrm{d}r=-8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=-16(I_4-I_6)$$

$$=-16\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

**44.【解】**$\Sigma_1:z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$ 取下侧,$\Sigma_2:z=2(x^2+y^2\leqslant 4)$ 取上侧,

$$I=\iint_\Sigma y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}\right)y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

而 $$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega(x+y)\mathrm{d}v=0,$$

$$\iint_{\Sigma_1}y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}x(1-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\iint_{\Sigma_2}y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_2}x(2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

所以原式$=0$.

**45.【解】**$\displaystyle\iint_\Sigma\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{a}\iint_\Sigma ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

补充曲面 $\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$,取下侧,则

$$\iint_\Sigma ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma-\Sigma_0}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_0}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由高斯公式得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_0}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint_\Omega(3a+2z)\mathrm{d}v$$

$$=-\int_{-a}^{0}(3a+2z)\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2-z^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\int_{-a}^{0}(3a+2z)\times\pi(a^2-z^2)\mathrm{d}z=-\frac{3\pi a^4}{2},$$

又$\iint\limits_{\Sigma_0}ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_0}(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi a^4$,

所以原式$=\frac{1}{a}\left(-\frac{3\pi a^4}{2}+\pi a^4\right)=-\frac{\pi a^3}{2}$.

*46*.【解】由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma}xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iiint\limits_{\Omega}[xf'(x)+(1-x)f(x)-\mathrm{e}^{2x}]\mathrm{d}v=0,$$

当曲面 Σ 法向量指向外侧时取正号，当曲面 Σ 的法向量指向内侧时取负号.

由 Σ 的任意性得

$xf'(x)+(1-x)f(x)-\mathrm{e}^{2x}=0(x>0)$，或者 $f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$,

则

$$f(x)=\left[\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\mathrm{e}^{\int(\frac{1}{x}-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int(\frac{1}{x}-1)\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}(\mathrm{e}^{x}+C),$$

因为$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^{x}}{x}=1$，所以$\lim\limits_{x\to0^+}(\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^{x})=0$，从而 $C=-1$,

于是 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}(\mathrm{e}^{x}-1)$.

*47*.【解】

$$\mathbf{rot\,A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\xz^2+y^2&x^2y+z^2&y^2z+x^2\end{vmatrix}=\{2yz-2z,2xz-2x,2xy-2y\},$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=x^2+y^2+z^2.$$

# 十、无穷级数

## Ⅰ 入门练习

### ◇ 填空题

*1*.【解】$S_n=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$,

由$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$，得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$.

2.【解】令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$，显然该级数的收敛半径为 $R=1$；当 $x=\pm1$ 时，级数发散，故该幂

级数的收敛域为(−1,1).

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=2.$

3.【解】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\right),$$

因为 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$,其中 $-1<x\leqslant 1$,

所以当 $x=1$ 时,$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$,

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}=2\ln 2.$

4.【解】$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}=\frac{1}{n^p(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}}$,

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 收敛的充分必要条件是 $p+\frac{1}{2}>1$,即 $p>\frac{1}{2}$.

5.【解】$f(x)=\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$,

而 $\frac{1}{x-1}=\frac{1}{-2+(x+1)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+1}{2}}=-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(x+1)^n,\text{其中}-3<x<1;$$

$\frac{1}{x}=\frac{1}{-1+(x+1)}=-\frac{1}{1-(x+1)}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$,其中 $-2<x<0$,

故 $f(x)=\frac{1}{x^2-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x+1)^n$,收敛域为(−2,0).

6.【解】显然幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^2x^n$ 的收敛半径为 $R=1$,当 $x=\pm 1$ 时级数发散,故级数的收敛域为(−1,1).

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)''+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$$

$$=x^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}.$$

7.【解】显然幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $R=+\infty$,收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$=2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+e^x=2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+e^x=(2x+1)e^x.$$

*8.*【解】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n=\left(\frac{1}{1}x+\frac{3^2}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{3^4}{4}x^4+\cdots\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{2n}x^{2n}$,

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\Big/\frac{1}{2n-1}=1$ 得幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛半径为 $R_1=1$，

当 $x=\pm1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域为 $(-1,1)$；

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{2n+2}}{2n+2}\Big/\frac{3^{2n}}{2n}=9$ 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{2n}x^{2n}$ 的收敛半径为 $R_2=\frac{1}{3}$，

当 $x=\pm\frac{1}{3}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{2n}\left(\pm\frac{1}{3}\right)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{2n}x^{2n}$ 的收敛域为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，

故原级数的收敛域为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

*9.*【解】设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(2x-1)^n$ 的收敛半径为 $R$，

显然 $|2\times(-2)-1|\leqslant R$，$|2\times3-1|\geqslant R$，得 $R=5$，

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{5}$.

*10.*【解】$S(9)=S(1+2\times4)=S(1)=\frac{f(1-0)+f(1+0)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$.

## ◇ 解答题

*11.*【解】由 $\ln(1+x)<x\ (x>0)$ 得 $\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，则原级数为正项级数，

由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

由正项级数比较审敛法得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$ 收敛.

*12.*【解】$\sin\pi\sqrt{n^2+1}=\sin[n\pi+\pi(\sqrt{n^2+1}-n)]=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$，

因为 $\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}>0$，所以原级数为交错级数.

由 $\left\{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}$ 单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$ 收敛，

因为 $\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{2n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$ 条件收敛.

13.【解】$f(x)=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$，

$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1+(x-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n, 1<x<3$；

$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3+(x-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-2)^n, -1<x<5$，

故 $f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n-\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right](x-2)^n, 1<x<3.$

14.【解】由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得收敛半径为 $R=1$，

又当 $x=\pm 1$ 时，级数发散，得收敛域为 $(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n+\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+n]x^n+\frac{x}{1-x}$$
$$=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}+\frac{x}{1-x}$$
$$=x^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)''+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'+\frac{x}{1-x}$$
$$=x^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+x\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\frac{x}{1-x}=\frac{2x-x^2+x^3}{(1-x)^3}.$$

15.【解】由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm 1$ 时级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，

故级数的收敛域为 $[-1,1]$.

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{2n+1}$，

$S(0)=1$；

当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{x}\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}\right]dx=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx$

$=\frac{\arctan x}{x}$，

故 $S(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \frac{\arctan x}{x}, & 0<|x|\leqslant 1.\end{cases}$

16.【解】由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得 $R=1$，

当 $x=\pm 1$ 时，因为 $\left|\frac{(\pm 1)^n}{n(n+1)}\right|\sim\frac{1}{n^2}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $x=\pm 1$ 时，原级数收敛，

故收敛域为 $[-1,1]$.

$S(0)=0$；

当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x\right)$$

$$=\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)+1(-1\leqslant x<1 \text{ 且 } x\neq 0);$$

当 $x=1$ 时，$S(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$，

$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$，

由 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$ 得 $S(1)=1$，

$$\text{故 } S(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)+1, & -1\leqslant x<1 \text{ 且 } x\neq 0,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

*17.*【解】由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得收敛半径为 $R=1$，

当 $x=\pm 1$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+3}{2n+1}(\pm 1)^{2n}\neq 0$，所以当 $x=\pm 1$ 时，级数发散，

故幂级数的收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+6n+3}{2n+1}x^{2n}$，

$S(0)=3$；

当 $x\neq 0$ 时，$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+6n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+(2n+1)+1}{2n+1}x^{2n}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}+\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'+\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'+\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

$$\text{故 } S(x)=\begin{cases}3, & x=0,\\ \frac{2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1.\end{cases}$$

## Ⅱ 基础练习

### ◆ 填空题

*1.*【解】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[2a_{2n-1}-(-1)^{n-1}a_n]=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=8$.

**2.**【解】由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$，得收敛半径为 $R=2$，当 $x=-2$ 时级数收敛，当 $x=2$ 时级数发散，

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$的收敛域为$[-2,2)$. 令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$,

则$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n}=-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)(-2\leqslant x<2)$.

3.【解】$f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3-x}\right)$,

而$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(-1<x<1)$,

$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}x^n(-3<x<3)$,

则$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3-x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n(-1<x<1)$,

又$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$,所以$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$,因此$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$.

4.【解】由$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(-1<x<1)$,得$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}(-1<x<1)$,

则$f(x)=\frac{x^3}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+2}(-1<x<1)$.

5.【解】$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{n+1}=x^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n}-x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1}$,

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n}=-\ln(1-x^2)(-1<x<1)$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n}-x^2=-\ln(1-x^2)-x^2(-1<x<1)$,

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{n(n+1)}=x\ln(1-x^2)+x^3-x^3\ln(1-x^2)(-1<x<1)$.

6.【解】由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}}{\frac{n}{2^n+(-3)^n}}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\left|\frac{2^n+(-3)^n}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}\right|=\frac{1}{3},$$

得$R=\sqrt{3}$.

7.【解】令$x-2=t$,对级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n\times 4^n}$,因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{4}$,所以收敛半径为$R=2$,

当$t=\pm 2$时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 2)^{2n}}{n\times 4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n\times 4^n}$的收敛域为$(-2,2)$,于是原级数的收敛域为$(0,4)$.

8.【解】令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+2n)x^n$,显然级数$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+2n)x^n$的收敛域为$(-1,1)$;

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+2n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}[n(n-1)+3n]x^n=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$=x^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)''+3x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+3x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{3x-x^2}{(1-x)^3},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=10.$

**9.【解】** $b_3=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin 3x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,dx$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi x\sin 3x\,dx=2\int_0^{\pi}x\sin 3x\,dx=\frac{2\pi}{3}.$$

**10.【解】** 因为 $f(x)$ 的间断点为 $x=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$,

所以 $S(11\pi)=\frac{f(11\pi-0)+f(11\pi+0)}{2}=\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{\pi}{2}.$

## ◇ 选择题

**11.【解】** 因为 $0\leqslant\frac{\sqrt{a_n}}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)$,而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛,

于是 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 绝对收敛,选(C).

**12.【解】** 因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,所以 $\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$,

令 $S'_n=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}$,

因为 $\lim_{n\to\infty}S'_n=\frac{1}{S_1}=\frac{1}{a_1}$,所以选(B).

**13.【解】** 因为 $n\to\infty$ 时,$1-\cos\frac{a}{n}\sim\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$,而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$ 收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$ 收敛,

即原级数绝对收敛,选(C).

**14.【解】** 令 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$,因为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,所以 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在且 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$,

令 $S'_n=(u_1+u_2)+(u_2+u_3)+\cdots+(u_n+u_{n+1})=2S_n-u_1+u_{n+1}$,

于是 $\lim_{n\to\infty}S'_n=2\lim_{n\to\infty}S_n-u_1$ 存在,选(C),(A)、(B)、(D) 都不对.

**15.【解】** (A) 不对,例如:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散;

(B) 不对,例如:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 也收敛;

(C) 不对,例如:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,选(D).

**16.【解】** 因为 $(-1)^n\frac{k+n}{n^2}=(-1)^n\frac{k}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}$,而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k}{n^2}$ 绝对收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件

收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$条件收敛，选(C).

**17.【解】**由交错级数审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而$n\to\infty$时，$u_n^2=\ln^2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\dfrac{1}{n}$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$发散，选(C).

**18.【解】**令$u_n=(-1)^n\left(n\tan\dfrac{k}{n}\right)a_{2n}$，因为$n\to\infty$时，$|u_n|=\left(n\tan\dfrac{k}{n}\right)a_{2n}\sim ka_{2n}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_{2n}$收敛，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，选(A).

**19.【解】**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛，因为$S_n=2(u_1+u_2+\cdots+u_n)-u_1+u_{n+1}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)$存在且$\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=0$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，由级数收敛的定义，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$收敛，选(D).

**20.【解】**令$u_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n}$，$v_n=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n}$，显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，(A)不对；

令$u_n=v_n=\dfrac{1}{n}$，显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都发散，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$收敛，(B)不对；

令$u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，(C)不对；

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$一定收敛，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，故若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$一个收敛另一个发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$一定发散，选(D).

**21.【解】**(A)正确，因为$0\leqslant(u_n\pm v_n)^2\leqslant2(u_n^2+v_n^2)$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$收敛，所以由正项级数的比较审敛法得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)^2$收敛；

(B)不对，例如：$u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$，$v_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$都发散；

(C)不对，例如：$u_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散；

(D)不对，例如：$u_n=-1$，$v_n=\dfrac{1}{n^2}$，显然$u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，选(A).

**22.【解】**因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$为正项级数，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$收敛，

因为$0\leqslant|u_n|\leqslant|u_n|+|v_n|$，$0\leqslant|v_n|\leqslant|u_n|+|v_n|$，根据正项级数的比较审敛法知，

$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$ 都收敛,即 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都绝对收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛,与已知矛盾,选(D).

23.【解】取 $u_n=\frac{1}{n^2},v_n=\frac{1}{n}$,显然 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散,但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 收敛,(A) 不对;

取 $u_n=\frac{1}{n},v_n=\frac{1}{n}$,显然 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散,但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,(B) 不对;

取 $u_n=v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,显然 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,(C) 不对;

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,所以 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$,从而存在 $M>0$,使得 $|u_n|\leqslant M$,于是 $|u_nv_n|\leqslant Mv_n$,因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,根据比较审敛法,$\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛,即 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 绝对收敛,选(D).

24.【解】因为 $\left|\frac{\sin an\pi}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin an\pi}{n^2}$ 绝对收敛,又因为 $\ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 单调减少且以零为极限,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)$ 收敛,而 $n\to\infty$ 时,$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)$ 条件收敛,于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin an\pi}{n^2}+(-1)^n\ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)\right]$ 条件收敛,选(B).

25.【解】(A) 不对,例如:$u_n=(-3)^{n-1}$,显然 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=-3<1$,但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散;

(B) 不对,例如:$u_n=\frac{(-1)^n}{n}$,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nu_n$ 发散;

(C) 正确,因为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,所以 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,$0\leqslant u_n<1$,从而 $0\leqslant u_n^2\leqslant u_n<1$,由比较审敛法得 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛;

(D) 不对,例如:$u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},v_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$,显然 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散,选(C).

26.【解】因为 $\sin\sqrt{n^2+1}\pi=\sin[n\pi+(\sqrt{n^2+1}-n)\pi]=(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi$

$$=(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

又 $\left\{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 单调减少且以零为极限,由莱布尼茨审敛法,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$ 收敛. 而 $n\to\infty$ 时,$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{2n}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ 发散,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$ 条件收敛,正确答

案为(B).

27.【解】因为$\left|(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+k}}\right|=\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+k}}\leqslant\dfrac{1}{2}\left(a_n^2+\dfrac{1}{n^2+k}\right)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+k}$都收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}\left(a_n^2+\dfrac{1}{n^2+k}\right)$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+k}}$绝对收敛，正确答案为(C).

28.【解】选(B).

29.【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_nx^{2n+1}}\right|=2|x|^2$，当$|x|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n+1}$绝对收敛；当$|x|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n+1}$发散，故其收敛半径为$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，选(D).

30.【解】因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(-2)^n$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$的收敛半径$R\geqslant2$，故当$x=2$时，$|2-1|<R$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=2$处绝对收敛，选(B).

31.【解】函数$f(x)$的傅里叶级数在$x=\pi$处收敛于$\dfrac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\dfrac{\pi^2}{2}$，选(D).

## ◆ 解答题

32.【解】$S_0=\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=\int_0^1 xe^{-x}dx+\int_1^2(2-x)e^{-x}dx=\left(1-\dfrac{1}{e}\right)^2$，

令$t=x-2$，则$S_1=e^{-2}\int_0^2 f(t)e^{-t}dt=e^{-2}S_0$，

令$t=x-2n$，则$S_n=e^{-2n}\int_0^2 f(t)e^{-t}dt=e^{-2n}S_0$，

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}S_n=S_0\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n}=S_0\frac{1}{1-e^{-2}}=\frac{e-1}{e+1}.$$

33.【解】因为$\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

$$S_n=\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$，所以根据级数收敛的定义知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$收敛.

34.【解】因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)$是正项级数，又$n\to\infty$时，$\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\sim\dfrac{2}{n^2}$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2}$收敛，根据比较审敛法的极限形式，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)$收敛.

35.【解】令$a_n=\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$，

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}}{\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{e}<1$,

根据比值审敛法,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$收敛.

*36.*【解】因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^{1+\frac{2}{n}}}}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}=1$,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,由比较审敛法的极限形式得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{2}{n}}}$发散.

*37.*【解】由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{2}{e}<1$,得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$收敛.

*38.*【解】因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}<1$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$收敛.

*39.*【解】因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)^{-(2n+1)}\right]^{-\frac{n}{2n+1}}=e^{-\frac{1}{2}}<1$,

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)^{n^2}$收敛.

*40.*【解】因为$n\to\infty$时,$\dfrac{1}{2n}\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}<\dfrac{1}{2n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$收敛,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n}\ln\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right)$收敛.

*41.*【解】$f(x)=x^{\frac{1}{x}}-1$,由$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0(x>e)$,得$\{n^{\frac{1}{n}}-1\}_{n=3}^{\infty}$为单调减少的数列,又$\lim\limits_{n\to\infty}(n^{\frac{1}{n}}-1)=0$,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$收敛.

因为$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)\Big/\dfrac{1}{x}=+\infty$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}(n^{\frac{1}{n}}-1)\Big/\dfrac{1}{n}=+\infty$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n}}-1)$发散,即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$条件收敛.

*42.*【解】$\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=\sin[n\pi+\pi(\sqrt{n^2+a^2}-n)]=(-1)^n\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\Big/\dfrac{1}{n}=\dfrac{\pi a^2}{2}$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})|$发散.

又当$n$充分大时,$\left\{\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right\}$单调减少,且$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}=0$,

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$条件收敛.

**43.【证明】**由 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$，得 $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant c_n - a_n$.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 收敛，

根据正项级数的比较审敛法得 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛，又 $b_n = (b_n - a_n) + a_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

**44.【证明】**因为 $0 \leqslant \sqrt{u_n u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$，

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$ 收敛. 所以根据正项级数的比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 收敛. 反之不一定成立，例如：级数 $1+0+1+0+\cdots$ 发散，因为 $u_n u_{n+1} = 0 (n = 1,2,\cdots)$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 收敛.

**45.【证明】**显然 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调增加，因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，所以 $\lim_{n \to \infty} S_n = +\infty$.

对交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{S_n}$，因为 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 单调减少，且 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{S_n} = 0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{S_n}$ 收敛.

**46.【证明】**(1) 因为 $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant 1$，又 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) - a_n = \frac{1 - a_n^2}{2a_n} \leqslant 0$，所以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调减少，而 $a_n \geqslant 0$，即 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调减少有下界的数列，根据极限存在准则，$\lim_{n \to \infty} a_n$ 存在.

(2) 由(1)得 $0 \leqslant \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leqslant a_n - a_{n+1}$，

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$，$S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = 2 - a_{n+1}$，

因为 $\lim_{n \to \infty} S_n = 2 - \lim_{n \to \infty} a_n$ 存在，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛，根据比较审敛法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ 收敛.

**47.【证明】**令 $S'_n = \frac{u_1}{S_1^2} + \frac{u_2}{S_2^2} + \cdots + \frac{u_n}{S_n^2}$，则

$$0 \leqslant S'_n = \frac{u_1}{S_1^2} + \frac{u_2}{S_2^2} + \cdots + \frac{u_n}{S_n^2} = \frac{S_1}{S_1^2} + \frac{S_2 - S_1}{S_2^2} + \cdots + \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{S_1} + \frac{S_2 - S_1}{S_1 S_2} + \cdots + \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1} S_n} = \frac{2}{S_1} - \frac{1}{S_n} \leqslant \frac{2}{u_1}$$

又 $\{S'_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调增加，所以 $\lim_{n \to \infty} S'_n$ 存在，于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n^2}$ 收敛.

**48.【证明】**(1) 因为 $0 \leqslant \sqrt{a_n b_n} \leqslant \frac{a_n + b_n}{2}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ 收敛.

(2) 因为 $0 \leqslant \frac{\sqrt{a_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛.

**49.【解】**级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{1}{\ln n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\ln n}$ 是交错级数，

因为$\left\{\sin\dfrac{1}{\ln n}\right\}$单调减少且$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{\ln n}=0$,所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)$收敛.

因为 $n\to\infty$ 时,$\left|\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)\right|=\sin\dfrac{1}{\ln n}\sim\dfrac{1}{\ln n}\geqslant\dfrac{1}{n}$,且$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)\right|$发散,即级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)$为条件收敛.

**50.**【证明】(1) 取$\varepsilon_0=1$,由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$,根据极限的定义,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,$\left|\dfrac{a_n}{b_n}-0\right|<1$,即$0\leqslant a_n<b_n$,由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛得$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}b_n$收敛(收敛级数去掉有限项不改变敛散性),由比较审敛法得$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n$收敛,从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛(收敛级数添加有限项不改变敛散性).

(2) 根据(1),当 $n>N$ 时,有$0\leqslant a_n<b_n$,因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散,所以$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n$发散,由比较审敛法,$\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}b_n$发散,进一步得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散.

**51.**【解】由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$得收敛半径为$R=1$,

当$x=-1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(-1)^n}{n}=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散;

当$x=1$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$收敛,故幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$的收敛域为$(-1,1]$.

**52.**【解】由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}\Big/\dfrac{2n-1}{2^n}=\dfrac{1}{2}$得收敛半径为$R=\sqrt{2}$,

当$x=\pm\sqrt{2}$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}(\pm\sqrt{2})^{2n-2}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)$发散,故级数的收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

**53.**【解】令$x-1=t$,显然级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{t^n}{n^2}$的收敛半径为$R=1$,又当$t=\pm1$时,

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\dfrac{(\pm1)^n}{n^2}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(\pm1)^n}{n^2}$绝对收敛,所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{t^n}{n^2}$的收敛区间为$[-1,1]$,故原级数的收敛域为$[0,2]$.

**54.**【解】由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=3$得收敛半径为$R=\dfrac{1}{3}$,

当$x=-\dfrac{1}{3}$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2^n+3^n)}{n}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]$收敛,

当$x=\dfrac{1}{3}$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2^n+3^n)}{n}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$收敛,而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散,所以级数的收敛域为$\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

**55.**【解】由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=4$,得幂级数的收敛半径为$R=\dfrac{1}{2}$,

当 $x=\pm\frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{2n-1}\left(\pm\frac{1}{2}\right)^{2n-1}=\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 收敛，故级数的收敛域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$，

则 $S'(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-4x^2)^{n-1}=\frac{2}{1+4x^2}$，又 $S(0)=0$，

所以 $S(x)=\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=\arctan 2x\left(x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$.

**56.【解】** 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{1}{4}$ 得收敛半径为 $R=4$，当 $x=\pm4$ 时，因为 $n\to\infty$ 时，$\frac{n}{4^n}(\pm4)^{n-1}\to\infty$，所以幂级数的收敛域为 $(-4,4)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}x^{n-1}=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}$，再令 $\frac{x}{4}=t$，

则 $S(x)=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=\frac{1}{4}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^n\right)'=\frac{1}{4(1-t)^2}$，

于是 $S(x)=\frac{4}{(4-x)^2}$，$x\in(-4,4)$.

**57.【解】** 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}$ 的收敛半径为 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}$，

则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}=x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x^2\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'$

$=x^2\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x^2}{(1-x)^2}(-1<x<1)$

**58.【解】** 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 的收敛半径为 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，

则 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)x^n\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}=\frac{x^2}{(1-x)^2}$，

从而 $S(x)=\left[\frac{x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2x}{(1-x)^3}(-1<x<1)$.

**59.【解】** 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $R=+\infty$，收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$，则

$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n+\mathrm{e}^x$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+e^x=(x+1)e^x(-\infty<x<+\infty).$$

**60.【解】** 令 $x+1=t$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 得收敛半径为 $R=1$，当 $t=\pm1$ 时，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}(\pm1)^n\neq0$，所以收敛区间为 $-1<t<1$，从而 $-2<x<0$.

令 $S(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}t^n$，则 $S(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{1+n}\right)t^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^n=\frac{t}{1-t}$，

令 $S_1(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+n}$，当 $t=0$ 时 $S_1(0)=0$，

当 $t\neq0$ 时 $S_1(t)=\frac{1}{t}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^{1+n}}{1+n}=\frac{1}{t}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n}=\frac{1}{t}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}-t\right)=-1-\frac{1}{t}\ln(1-t)$，

所以 $S(x)=\begin{cases}0, & x=-1,\\ -\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\ln(-x), & -2<x<-1 \text{ 或 } -1<x<0.\end{cases}$

**61.【解】** 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}=1$ 得该级数的收敛半径为 $R=1$，因为当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)(\pm1)^n$ 发散，所以级数的收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$，

因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2}$，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$，

将 $x^2$ 换成 $x$ 得 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\frac{1+x}{(1-x)^2}(-1<x<1)$.

**62.【解】** $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{2}$，则收敛半径为 $R=2$，

当 $x=-2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{2^n\cdot n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛；

当 $x=2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{2^n\cdot n}=\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故幂级数的收敛域为 $[-2,2)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}x^{n-1}$，当 $x=0$ 时，$S(0)=\frac{1}{2}$，

当 $x\neq0$ 时，$S(x)=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}x^n=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n}=-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$，

所以 $S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right), & -2\leqslant x<2 \text{ 且 } x\neq0,\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

**63.【解】** 令 $x^2+x+1=t$，则级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n(n+1)}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径为 $R=1$，注意到 $t=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，又 $t=1$ 时，级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n(n+1)}$ 的收敛域为 $\left[\frac{3}{4},1\right]$.

由 $x^2+x+1\leqslant 1$ 得 $-1\leqslant x\leqslant 0$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}$ 的收敛域为 $[-1,0]$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}$，$x=-1,0$ 时，$S(-1)=S(0)=1$，$x\in(-1,0)$ 时，

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{n+1}\\&=-\ln(-x-x^2)-\frac{1}{x^2+x+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^{n+1}}{n+1}\\&=-\ln(-x-x^2)-\frac{1}{x^2+x+1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{n}-(x^2+x+1)\right]\\&=-\ln(-x-x^2)+\frac{1}{x^2+x+1}\ln(-x-x^2)+1.\end{aligned}$$

**64.【解】**令 $S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$，

则 $S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n}$

$=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$（注意使用 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)(-1\leqslant x<1)$），

令 $S'(x)=-\frac{x}{1+x^2}=0$，得唯一驻点 $x=0$，当 $x<0$ 时，$S'(x)>0$，当 $x>0$ 时，$S'(x)<0$，

则 $x=0$ 时 $S(x)$ 取极大值，极大值为 $S(0)=1$.

**65.** (1)**【证明】**显然级数 $y=x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

$$y=x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}=x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2},$$

$$y'=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$(1-x)y'=1-x+(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=1-x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+1},$$

$$\begin{aligned}(1-x)y'+y&=1-x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+1}+x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\\&=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\\&=1+x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}=1+x,\end{aligned}$$

即级数 $y=x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ 满足微分方程 $(1-x)y'+y=1+x(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

(2)**【解】方法一**

由 $(1-x)y'+y=1+x$ 得 $\frac{(1-x)y'+y}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^2}$，即 $\left(\frac{y}{1-x}\right)'=\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}$，

解得 $\dfrac{y}{1-x}=\dfrac{2}{1-x}+\ln(1-x)+C$，或 $y=2+(1-x)\ln(1-x)+C(1-x)$，

由 $y(0)=0$ 得 $C=-2$，故 $y=2x+(1-x)\ln(1-x)(-1\leqslant x<1)$.

又 $y(1)=\lim\limits_{x\to1^-}y=\lim\limits_{x\to1^-}[2x+(1-x)\ln(1-x)]$

$$=2+\lim_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)\overset{1-x=t}{=}2+\lim_{t\to0^-}\frac{\ln t}{\dfrac{1}{t}}=2+\lim_{t\to0^+}\frac{\dfrac{1}{t}}{-\dfrac{1}{t^2}}=2,$$

故 $y=\begin{cases}2x+(1-x)\ln(1-x), & -1\leqslant x<1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$

**方法二**

由 $(1-x)y'+y=1+x$ 得 $y'+\dfrac{1}{1-x}y=\dfrac{1+x}{1-x}$，解得

$$y=\left[\int\frac{1+x}{1-x}\cdot e^{\int\frac{1}{1-x}dx}dx+C\right]e^{-\int\frac{1}{1-x}dx}=\left[\int\frac{1+x}{(1-x)^2}dx+C\right](1-x)$$

$$=\left[\frac{2}{1-x}+\ln(1-x)+C\right](1-x)$$

$$=2+(1-x)\ln(1-x)+C(1-x),$$

由 $y(0)=0$ 得 $C=-2$，故 $y=2x+(1-x)\ln(1-x)(-1\leqslant x<1)$.

又 $y(1)=\lim\limits_{x\to1^-}y=\lim\limits_{x\to1^-}[2x+(1-x)\ln(1-x)]$

$$=2+\lim_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)\overset{1-x=t}{=}2+\lim_{t\to0^+}\frac{\ln t}{\dfrac{1}{t}}=2+\lim_{t\to0^+}\frac{\dfrac{1}{t}}{-\dfrac{1}{t^2}}=2,$$

故 $y=\begin{cases}2x+(1-x)\ln(1-x), & -1\leqslant x<1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$

*66*.**【解】** 由 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}(-1<x<1)$，$f(0)=0$，得

$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}\right]dx$，由逐项可积性得

$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，显然 $x=\pm1$ 时级数收敛，所以

$\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(-1\leqslant x\leqslant1)$.

*67*.**【解】** $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2+(x-2)}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{x-2}{2}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n(0<x<4),$$

得 $-\dfrac{1}{x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^{n-1}$，

于是 $f(x)=\frac{1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}(x-2)^{n-1}(0<x<4)$.

68.【解】$f(x)=\ln[2\cdot(1+\frac{x-2}{2})]=\ln2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$

$$=\ln2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

$$=\ln2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x-2)^n\quad(0<x\leqslant4).$$

69.【解】$f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2(1+x^2)}-1=\frac{1}{1-x^4}-1$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\quad(|x|<1),$$

$f(0)=0$,

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\quad(|x|<1).$$

70.(1)【解】因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)!}\Big/\frac{1}{(2n)!}=0$,所以收敛半径为 $R=+\infty$,故幂级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2)【证明】令 $f(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

则 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$，　$f''(x)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=1+f(x)-2$,

故该幂级数满足微分方程 $y''-y=-1$.

(3)【解】由 $f''(x)-f(x)=-1$ 得 $f(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}+1$,

再由 $f(0)=2,f'(0)=0$ 得 $C_1=\frac{1}{2},C_2=\frac{1}{2}$,所以 $f(x)=\mathrm{ch}x+1$.

71.【解】$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

$b_n=0(n=1,2,\cdots)$,则 $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}(-\infty<x<+\infty)$.

令 $x=0$,则有 $0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$,

令 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S$,

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)$,即 $S=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S$,解得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

72.【解】函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足狄里克莱充分条件,将 $f(x)$ 进行周期延拓,

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$,

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\right)(n=1,2,\cdots)$,

$b_n=0(n=1,2,\cdots)$,

$x=\pm\frac{\pi}{2}$ 时,傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)\right]=\frac{\pi}{4}$,

则

$$f(x)=\frac{\pi}{8}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\right)\cos nx\left(-\pi\leqslant x\leqslant\pi\text{ 且 }x\neq\pm\frac{\pi}{2}\right).$$

# 十一、常微分方程

## Ⅰ 入门练习

### ◇ 填空题

1.【解】由 $\Delta y=y\Delta x+o(\Delta x)$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$,解得 $y=Ce^{-\int -\mathrm{d}x}=Ce^x$,

再由 $y(0)=1$ 得 $C=1$,故 $y(x)=e^x$.

2.【解】由题意得

$$y'=2xy,\text{即 }y'-2xy=0,$$

解得 $y=Ce^{-\int -2x\mathrm{d}x}=Ce^{x^2}$,

因为该曲线过点 $(0,2)$,所以 $C=2$,故 $f(x)=2e^{x^2}$.

3.【解】$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+y^2}{x^2}$ 化为 $\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$,积分得 $\arctan y=-\frac{1}{x}+C$,故通解为

$$\arctan y=-\frac{1}{x}+C\text{ 或 }y=\tan\left(-\frac{1}{x}+C\right).$$

4.【解】方法一

变量分离得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$,积分得 $\ln y=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln C$,即 $y=C\sqrt{1+x^2}$,

由 $y(0)=1$ 得 $C=1$,故特解为 $y=\sqrt{1+x^2}$.

方法二

由 $(1+x^2)y'=xy$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{x}{1+x^2}y=0$,解得

$$y=Ce^{-\int -\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x}=C\sqrt{1+x^2},$$

由 $y(0)=1$ 得 $C=1$,故特解为 $y=\sqrt{1+x^2}$.

5.【解】由线性微分方程解的结构得

$$\begin{cases}p-q=0,\\p+q=1,\end{cases}\text{解得 }p=\frac{1}{2},q=\frac{1}{2}.$$

6.【解】由 $yy'-y^2=1$ 得 $2yy'-2y^2=2$，即 $(y^2)'-2y^2=2$，解得

$$y^2=\left(\int 2e^{\int -2dx}dx+C\right)e^{-\int -2dx}=(C-e^{-2x})e^{2x}=Ce^{2x}-1,$$

由 $y(0)=0$ 得 $C=1$，故 $y^2=e^{2x}-1$.

7.【解】由 $\int_0^x f(x-t)dt \xlongequal{x-t=u} \int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du$ 得

$$f(x)-\int_0^x f(u)du=e^x,$$

两边求导得 $f'(x)-f(x)=e^x$，解得

$$f(x)=\left[\int e^x\cdot e^{\int -dx}dx+C\right]e^{-\int -dx}=(x+C)e^x,$$

由 $f(0)=1$ 得 $C=1$，故 $f(x)=(x+1)e^x$.

8.【解】因为 $y_0=2+e^{3x}$ 为方程 $y''+py'+qy=0$ 的特解，所以特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=3$，特征方程为 $\lambda^2-3\lambda=0$，故所求方程为 $y''-3y'=0$.

9.【解】因为 $y_0=e^x+2xe^x$ 为方程 $y''+py'+qy=0$ 的特解，所以特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$，故所求方程为 $y''-2y'+y=0$.

10.【解】由 $yy''-y'^2=y^2$ 得 $\dfrac{yy''-y'^2}{y^2}=1$，即 $\left(\dfrac{y'}{y}\right)'=1$，解得 $\dfrac{y'}{y}=x+C_1$，

由 $y(0)=1,y'(0)=0$ 得 $C_1=0$，从而有 $y'-xy=0$，解得

$$y=C_2e^{-\int -xdx}=C_2e^{\frac{x^2}{2}},$$

由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$，故 $y=e^{\frac{x^2}{2}}$.

## ◇ 解答题

11.【解】由一阶非齐次线性微分方程通解公式得

$$y=\left(\int e^{x^2}\cdot e^{\int -2xdx}dx+C\right)e^{-\int -2xdx}=(x+C)e^{x^2},$$

由 $y(0)=1$ 得 $C=1$，故 $y=(x+1)e^{x^2}$.

12.【解】切线为 $Y-y=y'(X-x)$，令 $Y=0$ 得 $X=x-\dfrac{y}{y'}$；

法线为 $Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)$，令 $X=0$ 得 $Y=y+\dfrac{x}{y'}$，

由题意得 $x-\dfrac{y}{y'}=-y-\dfrac{x}{y'}$，解得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$，

令 $u=\dfrac{y}{x}$，代入得 $u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u-1}{u+1}$，变量分离得 $\dfrac{u+1}{u^2+1}du=-\dfrac{dx}{x}$，积分得

$\dfrac{1}{2}\ln(u^2+1)+\arctan u=-\ln x+C$，

初始条件代入得 $C=0$，所求曲线为 $\ln(y^2+x^2)+2\arctan\dfrac{y}{x}=0$.

*13*.【解】令 $y'=p$,则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$,代入得 $p\dfrac{dp}{dy}+p^2=1$,整理得 $\dfrac{2p\,dp}{p^2-1}=-2dy$,

积分得 $\ln|p^2-1|=-2y+\ln C_1$,即 $p^2-1=C_1e^{-2y}$,

由初始条件得 $C_1=-1$,即 $\dfrac{dy}{dx}=\pm\sqrt{1-e^{-2y}}$,

变量分离得 $\dfrac{dy}{\sqrt{1-e^{-2y}}}=\pm dx$,或 $\dfrac{e^y dy}{\sqrt{e^{2y}-1}}=\pm dx$,

积分得 $\ln(e^y+\sqrt{e^{2y}-1})=\pm x+C_2$,

由初始条件得 $C_2=0$,从而 $e^y+\sqrt{e^{2y}-1}=e^{\pm x}$,解得 $y=\ln\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

*14*.【解】特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$,特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$,

令
$$y''+y'-2y=(2x+1)e^x \tag{1}$$
$$y''+y'-2y=-2 \tag{2}$$

令(1)的特解为 $y_1=(ax^2+bx)e^x$,代入(1)得 $a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{1}{9}$;

显然(2)的一个特解为 $y_2=1$,

故原方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\left(\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x}{9}\right)e^x+1$($C_1,C_2$ 为任意常数).

*15*.【解】$\int_0^x tf(x-t)dt\overset{x-t=u}{=}x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$,

原方程两边求导得 $f'(x)-4\int_0^x f(u)du=e^x$,

再求导得 $f''(x)-4f(x)=e^x$,

解方程得 $f(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\dfrac{1}{3}e^x$,

由 $f(0)=1,f'(0)=1$ 得 $C_1=\dfrac{1}{3},C_2=1$,故 $f(x)=\dfrac{1}{3}e^{-2x}+e^{2x}-\dfrac{1}{3}e^x$.

## Ⅱ 基础练习

### ◇ 填空题

*1*.【解】$y=\left[\int\cos x\,e^{\int\tan x dx}dx+C\right]e^{-\int\tan x dx}=(x+C)\cos x$($C$ 为任意常数).

2.【解】令 $x+y=u$,则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(u)e^{xy}+y\varphi(u)e^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(u)e^{xy}+x\varphi(u)e^{xy}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=2\varphi'(u)e^{xy}+u\varphi(u)e^{xy}$,

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 得 $2\varphi'(u)+u\varphi(u)=0$,或 $\varphi'(u)+\dfrac{u}{2}\varphi(u)=0$,

解得 $\varphi(u)=Ce^{-\int\frac{u}{2}du}=Ce^{-\frac{u^2}{4}}$,再由 $\varphi(0)=1$ 得 $C=1$,故 $\varphi(u)=e^{-\frac{u^2}{4}}$.

3.【解】由 $\Delta y=\dfrac{xy}{1+x^2}\Delta x+\alpha$，得 $y'=\dfrac{xy}{1+x^2}$，或者 $y'-\dfrac{x}{1+x^2}y=0$，解得

$y=Ce^{-\int-\frac{x}{1+x^2}dx}=C\sqrt{1+x^2}$，再由 $y(0)=2$，得 $C=2$，所以 $y=2\sqrt{1+x^2}$.

4.【解】由 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2x+y^2}$ 得 $\dfrac{dx}{dy}-2x=y^2$，则

$x=\left(\int y^2\cdot e^{\int-2dy}dy+C\right)e^{-\int-2dy}=\left(\int y^2\cdot e^{-2y}dy+C\right)e^{2y}=-\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{4}+Ce^{2y}$（$C$ 为任意常数）.

5.【解】令 $\dfrac{y}{x}=u$，则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，代入原方程得 $\dfrac{u-1}{u}du=\dfrac{dx}{x}$，两边积分得

$u-\ln|u|-\ln|x|-\ln C=0$，解得 $y=Ce^{\frac{y}{x}}$（$C$ 为任意常数）.

6.【解】由 $\int_0^x f(x-t)dt\overset{x-t=u}{=}\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du$ 得 $f(x)=3\int_0^x f(u)du+2$，

两边对 $x$ 求导得 $f'(x)-3f(x)=0$，解得 $f(x)=Ce^{-\int-3dx}=Ce^{3x}$，

取 $x=0$ 得 $f(0)=2$，则 $C=2$，故 $f(x)=2e^{3x}$.

7.【解】令 $y'=p$，则 $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{4}{2x+3}dx$，两边积分得

$\ln p=\ln(2x+3)^2+\ln C_1$，或 $y'=C_1(2x+3)^2$，

于是 $y=\dfrac{4}{3}C_1x^3+6C_1x^2+9C_1x+C_2$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

8.【解】令 $y'=p$，则 $yp\dfrac{dp}{dy}=1+p^2$，即 $\dfrac{2p\,dp}{1+p^2}=\dfrac{2dy}{y}$，解得 $\ln(1+p^2)=\ln y^2+\ln C_1$，

则 $1+p^2=C_1y^2$，由 $y(0)=1,y'(0)=0$ 得 $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$，

$\ln|y+\sqrt{y^2-1}|+C_2=\pm x$，由 $y(0)=1$ 得 $C_2=0$，所以特解为 $\ln|y+\sqrt{y^2-1}|=\pm x$.

9.【解】由题意得 $y(0)=0,y'(0)=2$，

$y''-6y'+9y=e^{3x}$ 的特征方程为 $\lambda^2-6\lambda+9=0$，特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3$，

令 $y''-6y'+9y=e^{3x}$ 的特解为 $y_0(x)=ax^2e^{3x}$，代入得 $a=\dfrac{1}{2}$，

故通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{3x}$.

由 $y(0)=0,y'(0)=2$ 得 $C_1=0,C_2=2$，则 $y(x)=2xe^{3x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{3x}$.

10.【解】令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，则原方程化为 $2p\dfrac{dp}{dy}=3y^2$，解得 $p^2=y^3+C_1$，

由 $y(-2)=1,y'(-2)=1$，得 $C_1=0$，所以 $y'=y^{\frac{3}{2}}$，从而有 $-2y^{-\frac{1}{2}}=x+C_2$，

再由 $y(-2)=1$，得 $C_2=0$，所求特解为 $x=-\dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

11.【解】由 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$，得 $y'=\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$，

令$\dfrac{y}{x}=u$，则$u+x\dfrac{du}{dx}=u\pm\sqrt{1-u^2}$，解得$\arcsin u=\pm\ln|x|+C$，则原方程通解为

$\arcsin\dfrac{y}{x}=\pm\ln|x|+C$($C$为任意常数).

*12.*【解】显然$\lambda=-4$是特征方程$\lambda^2+\lambda+q=0$的解，故$q=-12$，

即特征方程为$\lambda^2+\lambda-12=0$，特征值为$\lambda_1=-4,\lambda_2=3$.

因为$x^2+3x+2$为微分方程$y''+y'-12y=Q(x)$的一个特解，

所以$Q(x)=2+2x+3-12(x^2+3x+2)=-12x^2-34x-19$，

且通解为$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{3x}+x^2+3x+2$(其中$C_1,C_2$为任意常数).

*13.*【解】特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=1$，特征方程为$\lambda^2+\lambda-2=0$，

设所求的微分方程为$y''+y'-2y=Q(x)$，把$y=\cos x$代入原方程，得

$Q(x)=-\sin x-3\cos x$，所求微分方程为$y''+y'-2y=-\sin x-3\cos x$.

*14.*【解】因为方程有特解$Axe^{-x}$，所以$-1$为特征值，即$(-1)^2-3\times(-1)+a=0\Rightarrow a=-4$，

所以特征方程为$\lambda^2-3\lambda-4=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=4$，齐次方程$y''-3y'+ay=0$的通解为

$y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$，再把$Axe^{-x}$代入原方程得$A=1$，原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}+xe^{-x}\ (C_1,C_2\text{为任意常数}).$$

*15.*【解】由$\int_0^1[f(x)+xf(xt)]dt=1$得$\int_0^1 f(x)dt+\int_0^1 f(xt)d(xt)=1$，

整理得$f(x)+\int_0^x f(u)du=1$，两边对$x$求导得$f'(x)+f(x)=0$，

解得$f(x)=Ce^{-x}$，因为$f(0)=1$，所以$C=1$，故$f(x)=e^{-x}$.

## ◇ 选择题

*16.*【解】由$y_1=e^x,y_2=2xe^x,y_3=3e^{-x}$为三阶常系数齐次线性微分方程的特解可得其特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$，其特征方程为$(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，即$\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$，所求的微分方程为$y'''-y''-y'+y=0$，选(A).

*17.*【解】因为$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$为方程$y'+P(x)y=Q(x)$的两个线性无关解，所以$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$为方程$y'+P(x)y=0$的一个解，于是方程$y'+P(x)y=Q(x)$的通解为$C[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+\varphi_2(x)$，选(C).

*18.*【解】由$2xydx+(x^2-1)dy=0$得$\dfrac{2x}{x^2-1}dx+\dfrac{dy}{y}=0$，积分得

$\ln(x^2-1)+\ln y=\ln C$，从而$y=\dfrac{C}{x^2-1}$，

由$y(0)=1$得$C=-1$，于是$y=\dfrac{1}{1-x^2}$，

故$\int_0^{\frac{1}{2}}y(x)dx=-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\ln3$，选(D).

*19.*【解】$y''-4y=0$的特征方程为$\lambda^2-4=0$，特征值为$\lambda_1=-2,\lambda_2=2$.

$y''-4y=e^{2x}$的特解形式为$y_1=axe^{2x}$，

$y''-4y=x$的特解形式为$y_2=bx+c$，故原方程特解形式为$axe^{2x}+bx+c$，应选(D).

20.【解】微分方程 $y''-4y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-4=0$，特征值为 $-2,2$，则方程 $y''-4y=0$ 的通解为 $C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$，显然方程 $y''-4y=x+2$ 有特解 $-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$，选(D).

## ◇ 解答题

21.【解】$xy'=y\ln\frac{y}{x}$ 可写为 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$，令 $u=\frac{y}{x}$，原方程化为 $u+x\frac{du}{dx}=u\ln u$，

变量分离得 $\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}$，

积分得 $\ln(\ln u-1)=\ln x+\ln C$，即 $\ln u-1=Cx$，或 $u=e^{Cx+1}$，

故原方程的通解为　$y=xe^{Cx+1}$（$C$ 为任意常数）.

22.【解】方法一　令 $y'=p$，则原方程化为 $\frac{dp}{dx}+\frac{2}{x}p=\frac{e^x}{x}$，

解得 $p=\left(\int\frac{e^x}{x}\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C_1\right)e^{-\int\frac{2}{x}dx}=\frac{(x-1)e^x+C_1}{x^2}$，

故 $y=\int\frac{(x-1)e^x+C_1}{x^2}dx=\frac{e^x-C_1}{x}+C_2$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

方法二　$xy''+2y'=e^x$ 两边乘以 $x$ 得 $x^2y''+2xy'=xe^x$，即 $(x^2y')'=xe^x$，

积分得 $x^2y'=(x-1)e^x+C_1$，即 $y'=\frac{(x-1)e^x+C_1}{x^2}$，

再积分得原方程通解为 $y=\int\frac{(x-1)e^x+C_1}{x^2}dx=\frac{e^x-C_1}{x}+C_2$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

23.【解】原方程化为 $y'+\left(\frac{1}{x}-1\right)y=\frac{e^{2x}}{x}$，

通解为 $y=[\int\frac{e^{2x}}{x}\cdot e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx}dx+C]e^{-\int(\frac{1}{x}-1)dx}=\frac{Ce^x+e^{2x}}{x}$.

由 $\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=1$ 得 $C=-1$，故特解为 $y=\frac{e^{2x}-e^x}{x}$.

24.【解】由 $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0$，得 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$.

令 $u=\frac{y}{x}$，则原方程化为 $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}$，积分得 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln x+\ln C$，

即 $u+\sqrt{1+u^2}=Cx$，将初始条件 $y(1)=0$ 代入得 $C=1$.

由 $\begin{cases}\sqrt{1+u^2}+u=x,\\ \sqrt{1+u^2}-u=\frac{1}{x},\end{cases}$ 得 $u=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$，即满足初始条件的特解为 $y=\frac{x^2-1}{2}$.

25.【解】由 $(y-x^3)dx-2xdy=0$，得 $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{2x}y=-\frac{1}{2}x^2$，

则 $y=\left[\int\left(-\frac{1}{2}x^2\right)e^{\int-\frac{1}{2x}dx}dx+C\right]e^{-\int-\frac{1}{2x}dx}=\begin{cases}-\frac{1}{5}x^3+C\sqrt{x}, & x\geqslant0,\\ -\frac{1}{5}x^3+C\sqrt{-x}, & x<0,\end{cases}$

即原方程的通解为 $y=-\frac{1}{5}x^3+C\sqrt{|x|}$(其中 $C$ 为任意常数).

26.【解】由 $y^2\mathrm{d}x+(2xy+y^2)\mathrm{d}y=0$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y^2}{2xy+y^2}$,

令 $u=\frac{y}{x}$,则 $\frac{(2+u)\mathrm{d}u}{u^2+3u}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$,解得 $u^2(u+3)=\frac{C}{x^3}$,

所以原方程的通解为 $y^2(y+3x)=C$($C$ 为任意常数).

27.【解】由 $\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\cos x\sin^2y=\sin y$ 得 $\frac{\mathrm{d}(\sin y)}{\mathrm{d}x}-\cos x\sin^2y=\sin y$,

令 $u=\sin y$,则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u=\cos x\cdot u^2$,令 $u^{-1}=z$,则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z=-\cos x$,

解得 $z=\left[\int(-\cos x)e^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]e^{-\int\mathrm{d}x}=\left[-\int e^x\cos x\mathrm{d}x+C\right]e^{-x}$

$=\left[-\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C\right]e^{-x}=Ce^{-x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

则 $\frac{1}{\sin y}=Ce^{-x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$($C$ 为任意常数).

28.【解】方法一　由 $xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$,得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{xy}$,

令 $\frac{y}{x}=u$,得 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\frac{1}{u}$,解得 $u^2=\ln x^2+C$,由 $y(e)=2e$,得 $C=2$,

所求的特解为 $y^2=x^2\ln x^2+2x^2$.

**方法二**　由 $xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$,得 $\frac{1}{2}x\frac{\mathrm{d}(y^2)}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$,令 $z=y^2$,则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z=2x$,

解得 $z=\left[\int 2xe^{\int-\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]e^{-\int-\frac{2}{x}\mathrm{d}x}=2x^2\ln|x|+Cx^2$,由初始条件得 $C=2$,

则原方程的特解为 $y^2=x^2\ln x^2+2x^2$.

29.【解】由 $x^2y'+xy=y^2$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}$,令 $u=\frac{y}{x}$,则有 $\frac{\mathrm{d}u}{u^2-2u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$,

两边积分得 $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln|x|+C_1$,即 $\frac{u-2}{u}=C_2x^2$,

因为 $y(1)=1$,所以 $C_2=-1$,再把 $u=\frac{y}{x}$ 代入 $\frac{u-2}{u}=C_2x^2$ 得原方程的特解为 $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

30.【解】令 $P(x,y)=xy^2+y-1,Q(x,y)=x^2y+x+2$,因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2xy+1$,所以原方程为全微分方程,

令 $u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(xy^2+y-1)\mathrm{d}x+(x^2y+x+2)\mathrm{d}y$

$=\int_0^x(-1)\mathrm{d}x+\int_0^y(x^2y+x+2)\mathrm{d}y=-x+\frac{x^2y^2}{2}+xy+2y$

则原方程的通解为 $\frac{x^2y^2}{2}+xy+2y-x=C$($C$ 为任意常数).

31.【解】由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2x+y}$ 得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-2x=y$,则

$$x=\left[\int y e^{\int -2dy}dy+C\right]e^{-\int -2dy}=Ce^{2y}-\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{4}\right)(C\text{ 为任意常数}).$$

32.【解】令 $x+y=u$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$，于是有$\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u^2}$，

变量分离得$\frac{u^2}{1+u^2}du=dx$，两边积分得 $u-\arctan u=x+C$，

所以原方程的通解为 $y-\arctan(x+y)=C$.

33.【解】把 $y=e^x$ 代入微分方程 $xy'+P(x)y=x$，得 $P(x)=xe^{-x}-x$，原方程化为

$y'+(e^{-x}-1)y=1$，则 $y=\left[\int 1\times e^{\int(e^{-x}-1)dx}dx+C\right]e^{-\int(e^{-x}-1)dx}=Ce^{x+e^{-x}}+e^x$，

将 $y(\ln 2)=0$ 代入 $y=Ce^{x+e^{-x}}+e^x$ 中得 $C=-e^{-\frac{1}{2}}$，故特解为 $y=-e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}}+e^x$.

34.【解】(1) 由 $f(x)=e^x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，得 $f(x)=e^x-x\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(t)dt$，

两边对 $x$ 求导，得 $f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt$，两边再对 $x$ 求导得 $f''(x)+f(x)=e^x$，

其通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x$.

在 $f(x)=e^x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$ 中，令 $x=0$ 得 $f(0)=1$，在 $f'(x)=e^x-\int_0^x f(t)dt$ 中，

令 $x=0$ 得 $f'(0)=1$，于是有 $C_1=\frac{1}{2}$，$C_2=\frac{1}{2}$，故 $f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}e^x$.

(2) 由 $f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x tf(t)dt=1$ 得 $(x+1)f(x)-\int_0^x tf(t)dt=x+1$，两边求导得

$f(x)+(x+1)f'(x)-xf(x)=1$，整理得 $f'(x)+\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)f(x)=\frac{1}{x+1}$，

解得 $f(x)=\left[\int\frac{1}{x+1}\cdot e^{\int\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)dx}dx+C\right]e^{-\int\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)dx}=\frac{Ce^x}{(x+1)^2}-\frac{x+2}{(x+1)^2}$，

由 $f(0)=1$ 得 $C=3$，故 $f(x)=\frac{3e^x}{(x+1)^2}-\frac{x+2}{(x+1)^2}$.

35.【解】$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=t\frac{dy}{dt}$，

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=t\frac{dy}{dt}+t^2\frac{d^2y}{dt^2}$，代入原方程得$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$.

$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$ 的通解为 $y=C_1\cos t+C_2\sin t$，

故原方程的通解为 $y=C_1\cos e^x+C_2\sin e^x$ ($C_1$，$C_2$ 为任意常数).

36.【解】$\int_0^x tf(x-t)dt\xlongequal{x-t=u}x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$，

$\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=x$ 化为$\int_0^x f(t)dt+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=x$，两边求导得

$f(x)+\int_0^x f(t)dt=1$，两边再求导得 $f'(x)+f(x)=0$，解得 $f(x)=Ce^{-x}$，

因为 $f(0)=1$,所以 $C=1$,故 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

37.【解】令 $y'=p$,则 $y''=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,代入方程得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+2xp^2=0$,解得 $\dfrac{1}{p}=x^2+C_1$,

由 $y'(0)=1$ 得 $C_1=1$,于是 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$,$y=\arctan x+C_2$,

再由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$,所以 $y=\arctan x+1$.

38.【解】令 $y'=p$,则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,代入原方程得 $yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^2$ 或 $p\left(y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p\right)=0$.

当 $p=0$ 时,$y=1$ 为原方程的解;当 $p\neq 0$ 时,由 $y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p=0$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\dfrac{1}{y}p=0$,解得

$p=C_1\mathrm{e}^{-\int -\frac{1}{y}\mathrm{d}y}=C_1y$,由 $y(0)=y'(0)=1$ 得 $C_1=1$,于是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=0$,解得

$y=C_2\mathrm{e}^{-\int -\mathrm{d}x}=C_2\mathrm{e}^x$,由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$,所以原方程的特解为 $y=\mathrm{e}^x$.

39.【解】设切点为 $P(x,y)$,曲线上 $P$ 点处的切线为 $Y-y=y'(X-x)$,

令 $X=0$,得 $Y=y-xy'$,切线与 $y$ 轴的交点为 $Q(0,y-xy')$,

由题意得 $x^2+x^2y'^2=4$,解得 $y'=\pm\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$,变量分离得 $\mathrm{d}y=\pm\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}\mathrm{d}x$,积分得

$$y=\pm\left(2\ln\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{|x|}+\sqrt{4-x^2}\right)+C,$$

由 $y(2)=0$,得 $C=0$,所求的曲线为 $y=\pm\left(2\ln\dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{|x|}+\sqrt{4-x^2}\right)$.

40.【解】对曲线 $L_1$,由题意得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{y}{x}\right)=2$,解得 $y=x(2x+C_1)$,

因为曲线 $L_1$ 过点 $(1,1)$,所以 $C_1=-1$,故 $L_1:y=2x^2-x$.

对曲线 $L_2$,由题意得 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy)=2$,解得 $y=\dfrac{2x+C_2}{x}$,

因为曲线 $L_2$ 过点 $(1,1)$,所以 $C_2=-1$,故 $L_2:y=2-\dfrac{1}{x}$.

由 $2x^2-x=2-\dfrac{1}{x}$ 得两条曲线的交点为 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 及 $(1,1)$,

故两条曲线所围成区域的面积为 $A=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2-\frac{1}{x}-2x^2+x\right)\mathrm{d}x=\frac{19}{24}-\ln 2$.

41.【解】$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{\cos t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\sin t}{\cos^3t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\cos^2t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$,代入原方程得 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-4y=0$.

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-4y=0$ 的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{2t}$,

故原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-2\arcsin x}+C_2\mathrm{e}^{2\arcsin x}$($C_1,C_2$ 为任意常数).

42.【解】因为 $y_1=\mathrm{e}^{2x}$,$y_2=2\mathrm{e}^{-x}-3\mathrm{e}^{2x}$ 为特解,所以 $\mathrm{e}^{2x}$,$\mathrm{e}^{-x}$ 也是该微分方程的特解,故其特

征方程的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2$，特征方程为 $(\lambda+1)(\lambda-2)=0$ 即 $\lambda^2-\lambda-2=0$，所求的微分方程为 $y''-y'-2y=0$.

43.【解】特征方程为 $\lambda^2+2\lambda-3=0$，特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-3$，则 $y''+2y'-3y=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$. 令原方程的特解为 $y_0=x(ax+b)e^x$，代入原方程得 $a=\dfrac{1}{4},b=\dfrac{1}{8}$，

所以原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}+\dfrac{1}{8}(2x^2+x)e^x$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

44.【解】原方程可化为 $y''-2y'=e^{2x}$，特征方程为 $\lambda^2-2\lambda=0$，特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=2$，则 $y''-2y'=0$ 的通解为 $y=C_1+C_2e^{2x}$. 设方程 $y''-2y'=e^{2x}$ 的特解为 $y_0=Axe^{2x}$，代入原方程得 $A=\dfrac{1}{2}$，从而原方程的通解为 $y=C_1+\left(C_2+\dfrac{x}{2}\right)e^{2x}$.

由 $y(0)=1,y'(0)=1$ 得 $\begin{cases}C_1+C_2=1,\\ 2C_2+\dfrac{1}{2}=1,\end{cases}$ 解得 $C_1=\dfrac{3}{4},C_2=\dfrac{1}{4}$，

故所求的特解为 $y=\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}x\right)e^{2x}$.

45.【解】特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$，特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$，原方程对应的齐次线性微分方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

(1) 当 $a\neq-2$ 时，因为 $a$ 不是特征值，所以设原方程的特解为 $y_0(x)=Ae^{ax}$，代入原方程得 $A=\dfrac{1}{(a+2)^2}$，则原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{(a+2)^2}e^{ax}$（$C_1,C_2$ 为任意常数）；

(2) 当 $a=-2$ 时，因为 $a=-2$ 为二重特征值，所以设原方程的特解为 $y_0(x)=Ax^2e^{-2x}$，代入原方程得 $A=\dfrac{1}{2}$，则原方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{-2x}$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

46.【解】特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征值为 $\lambda_1=-i,\lambda_2=i$，

方程 $y''+y=0$ 的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

对方程 $y''+y=x^2+3$，特解为 $y_1=x^2+1$；

对方程 $y''+y=\cos x$，特解为 $\dfrac{1}{2}x\sin x$，原方程的特解为 $x^2+1+\dfrac{1}{2}x\sin x$，

则原方程的通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2+1+\dfrac{1}{2}x\sin x$（$C_1,C_2$ 为任意常数）.

47.【解】令 $x=e^t$，则 $xy'=Dy,x^2y''=D(D-1)y,x^3y'''=D(D-1)(D-2)y$，即

$$xy'=\frac{dy}{dt},x^2y''=D(D-1)y=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt},x^3y'''=D(D-1)(D-2)y=\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt},$$

原方程化为 $\dfrac{d^3y}{dt^3}-\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}+y=0$，特征方程为 $\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$，

解得特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，则方程 $\dfrac{d^3y}{dt^3}-\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}+y=0$ 的通解为

$y=C_1e^{-t}+(C_2+C_3t)e^t$,原方程的通解为 $y=\frac{C_1}{x}+(C_2+C_3\ln x)x$($C_1,C_2$ 为任意常数).

**48.【解】**令 $x=e^t$,则 $x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$,$xy'=\frac{dy}{dt}$,原方程化为$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=2e^t-1$,

$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=0$ 的通解为 $y=C_1e^t+C_2e^{2t}$,令$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=2e^t$ 的特解为

$y_0(t)=ate^t$,代入$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=2e^t$,得 $a=-2$,显然$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=-1$ 的特解

为 $y=-\frac{1}{2}$,所以方程$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=2e^t-1$ 的通解为 $y=C_1e^t+C_2e^{2t}-2te^t-\frac{1}{2}$,

原方程的通解为 $y=C_1x+C_2x^2-2x\ln x-\frac{1}{2}$($C_1,C_2$ 为任意常数).

**49.【解】**设 $t$ 时刻质点运动的速度为 $v(t)$,阻力 $F=ma=\frac{dv}{dt}$,则有$\begin{cases}v'(t)=-v(t),\\ v(0)=v_0,\end{cases}$解此微分方程得 $v(t)=v_0e^{-t}$. 由 $v_0e^{-t}=\frac{v_0}{3}$ 得 $t=\ln 3$,从开始到 $t=\ln 3$ 的时间内质点所经过的路程为 $S=\int_0^{\ln 3}v_0e^{-t}dt=\frac{2}{3}v_0$.

**50.【解】**根据题意得$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\sqrt{f(0)f(x)}$,令 $a=\sqrt{f(0)}$,则有

$\int_0^x f(t)dt=ax\sqrt{f(x)}$,两边求导得 $f(x)=a\sqrt{f(x)}+\frac{1}{2}ax\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$,

即 $f'(x)+\frac{2}{x}f(x)=\frac{2}{ax}[f(x)]^{\frac{3}{2}}$,令 $z=[f(x)]^{-\frac{1}{2}}$,则有$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=-\frac{1}{ax}$,

解得 $f(x)=\frac{f(0)}{(1+C\sqrt{f(0)}x)^2}$ $(C\geqslant 0)$.

**51.【解】**设点 $M$ 的坐标为 $(x,y)$,则切线 $MA$:$Y-y=y'(X-x)$.

令 $X=0$,则 $Y=y-xy'$,故 $A$ 点的坐标为 $(0,y-xy')$.

由 $|MA|=|OA|$,得 $|y-xy'|=\sqrt{(x-0)^2+(y-y+xy')^2}$

即 $2yy'-\frac{1}{x}y^2=-x$,或者$\frac{dy^2}{dx}-\frac{1}{x}y^2=-x$,

则 $y^2=\left[\int -xe^{\int -\frac{1}{x}dx}dx+C\right]e^{-\int -\frac{1}{x}dx}=x(-x+C)$,

因为曲线经过点$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$,所以 $C=3$,再由曲线经过第一象限得曲线方程为

$$y=\sqrt{3x-x^2}\ (0<x<3).$$

**52.【解】**设所求曲线为 $y=y(x)$,该曲线在点 $P(x,y)$ 的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)\ (y'\neq 0),$$

令 $Y=0$,得 $X=x+yy'$,该点到 $x$ 轴法线段 $PQ$ 的长度为$\sqrt{(yy')^2+y^2}=y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$

由题意得$\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$，即 $yy''=1+y'^2$.

令 $y'=p$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，则有 $yp\dfrac{dp}{dy}=1+p^2$，或者$\dfrac{p}{1+p^2}dp=\dfrac{dy}{y}$，

两边积分得 $y=C_1\sqrt{1+p^2}$，由 $y(1)=1,y'(1)=0$ 得 $C_1=1$，所以 $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$，

变量分离得$\dfrac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$，两边积分得 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm x+C_2$，

由 $y(1)=1$ 得 $C_2=\mp 1$，

所以 $\ln(y+\sqrt{y^2-1})=\pm x\mp 1$，即 $y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x\mp 1}$，

又 $y+\sqrt{y^2-1}=\dfrac{1}{y-\sqrt{y^2-1}}$，所以 $y-\sqrt{y^2-1}=e^{\mp x\pm 1}$，

两式相加得 $$y=\frac{e^{x-1}+e^{1-x}}{2}=\text{ch}(x-1).$$

**53.【解】**设 $t$ 时刻雪堆的半径为 $r$，则有

$\dfrac{dV}{dt}=-2k\pi r^2$，$V(t)=\dfrac{2}{3}\pi r^3$，则$\dfrac{dV}{dt}=2\pi r^2\dfrac{dr}{dt}$，于是有

$\dfrac{dr}{dt}=-k\Rightarrow r=-kt+C_0$，由 $r(0)=r_0,r(3)=\dfrac{r_0}{2}$，得 $C_0=r_0,k=\dfrac{r_0}{6}$，于是

$r=-\dfrac{r_0}{6}t+r_0$，令 $r=0$ 得 $t=6$，即 6 小时雪堆可以全部融化.

**54.【解】**由 $f'(x)-f(x)=a(x-1)$ 得

$$f(x)=\left[a\int(x-1)e^{\int(-1)dx}\,dx+C\right]e^{-\int(-1)dx}=Ce^x-ax,$$

由 $f(0)=1$ 得 $C=1$，故 $f(x)=e^x-ax$.

$$V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\left(\frac{e^2-1}{2}-2a+\frac{a^2}{3}\right),$$

由 $V'(a)=\pi\left(-2+\dfrac{2a}{3}\right)=0$ 得 $a=3$，因为 $V''(a)=\dfrac{2\pi}{3}>0$，所以当 $a=3$ 时，旋转体的体积最小，故 $f(x)=e^x-3x$.

# 线性代数部分

## 一、行列式

### ◇ 填空题

1.【解】按行列式的定义，$f(x)$ 的 3 次项和 2 次项都产生于 $(x+2)(2x+3)(3x+1)$，且该项带正号，所以 $x^2$ 项的系数为 23.

2.【解】由 $(a+1)+2(a-2)+3(a-1)=0$ 得 $a=1$.

3.【解】将 $\boldsymbol{B}$ 的第一行元素分别与 $\boldsymbol{A}$ 的行对调 $m$ 次，然后将 $\boldsymbol{B}$ 的第二行分别与 $\boldsymbol{A}$ 的行对调 $m$ 次，如此下去直到 $\boldsymbol{B}$ 的最后一行与 $\boldsymbol{A}$ 的行对调 $m$ 次，则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}ab.$$

4.【解】 由 $(-\boldsymbol{A}_1-2\boldsymbol{A}_2,2\boldsymbol{A}_2+3\boldsymbol{A}_3,-3\boldsymbol{A}_3+2\boldsymbol{A}_1)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ 得

$$|-\boldsymbol{A}_1-2\boldsymbol{A}_2,2\boldsymbol{A}_2+3\boldsymbol{A}_3,-3\boldsymbol{A}_3+2\boldsymbol{A}_1| = |\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3| \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 12.$$

5.【解】由 $5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=(5\boldsymbol{\alpha},5\boldsymbol{\gamma}_1,5\boldsymbol{\gamma}_2)-(2\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_1,2\boldsymbol{\gamma}_2)=(5\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\gamma}_1,3\boldsymbol{\gamma}_2)$，得

$$|5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}| = |5\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\gamma}_1,3\boldsymbol{\gamma}_2| = 9\,|5\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2|$$

$$=9(5\,|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2|-2\,|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2|)=63.$$

### ◇ 选择题

6.【解】$\left|-\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \\ & 2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\right| = (-1)^7 \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\,|2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}| = -\dfrac{1}{2}\times 2^4\times 6 = -48$，选(D).

7.【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 4，所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 4，又 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $-1$，于是 $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^2$ 的特征值为 18，3，则 $|2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^2|=54$，选(B).

## ◆ 解答题

**8.【解】**
$$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

**9.【解】**
$$D=\begin{vmatrix}a^2&(a+2)^2&(a+4)^2\\b^2&(b+2)^2&(b+4)^2\\c^2&(c+2)^2&(c+4)^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a^2&4a+4&8a+16\\b^2&4b+4&8b+16\\c^2&4c+4&8c+16\end{vmatrix}=32\begin{vmatrix}a^2&a+1&a+2\\b^2&b+1&b+2\\c^2&c+1&c+2\end{vmatrix}$$
$$=32\begin{vmatrix}a^2&a+1&1\\b^2&b+1&1\\c^2&c+1&1\end{vmatrix}=32\begin{vmatrix}a^2&a&1\\b^2&b&1\\c^2&c&1\end{vmatrix}=-32\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}=-32\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$$
$$=-32(c-a)(c-b)(b-a).$$

**10.【证明】**
$$D=\begin{vmatrix}b+c&c+a&a+b\\b_1+c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2+c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&c+a&a+b\\b_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\b_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&c+a&a+b\\c_1&c_1+a_1&a_1+b_1\\c_2&c_2+a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}b&c+a&a\\b_1&c_1+a_1&a_1\\b_2&c_2+a_2&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&a&a+b\\c_1&a_1&a_1+b_1\\c_2&a_2&a_2+b_2\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}b&c&a\\b_1&c_1&a_1\\b_2&c_2&a_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&a&b\\c_1&a_1&b_1\\c_2&a_2&b_2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}.$$

**11.【解】**(1)
$$D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-1&2&0&6\\1&1&0&3\\2&-1&0&0\end{vmatrix}=1\times A_{13}=M_{13}$$
$$=\begin{vmatrix}-1&2&6\\1&1&3\\2&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&6\\0&3&9\\0&3&12\end{vmatrix}=-9.$$

(2) $M_{31}+M_{33}+M_{34}=1\times A_{31}+0\times A_{32}+1\times A_{33}+(-1)\times A_{34}$
$$=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\1&0&1&-1\\4&-6&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-5&-1&4\\-3&7&2&1\\1&0&0&0\\4&-6&-3&6\end{vmatrix}=1\times A_{31}=M_{31}$$
$$=\begin{vmatrix}-5&-1&4\\7&2&1\\-6&-3&6\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-5&-1&4\\7&2&1\\-2&-1&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-5&-1&4\\-3&0&9\\3&0&-2\end{vmatrix}$$
$$=-3\times A_{12}=3\begin{vmatrix}-3&9\\3&-2\end{vmatrix}=-63.$$

12.【解】$D=2aA_{11}+(-1)A_{12}=2aM_{11}+M_{12}=2a\begin{vmatrix}2a&-1&0\\a^2&2a&-1\\0&a^2&2a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a^2&-1&0\\0&2a&-1\\0&a^2&2a\end{vmatrix}$

$=2a[2aA_{11}+(-1)A_{12}]+a^2\cdot\begin{vmatrix}2a&-1\\a^2&2a\end{vmatrix}=4a^2M_{11}+2aM_{12}+5a^4=29a^4.$

13.【解】$D=aA_{11}+1A_{12}=aM_{11}-M_{12}=a\begin{vmatrix}a&1&0\\0&a&1\\x&x^2&x^3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1&0\\0&a&1\\1&x^2&x^3\end{vmatrix}$

$=a(aA_{11}+A_{12})-(-1)^{1+2}(-1)=-1+a^2M_{11}-aM_{12}$

$=-1+a^2(ax^3-x^2)-a(-x)=a^3x^3-a^2x^2+ax-1.$

# 二、矩阵

## ◇ 填空题

1.【解】$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}=3,\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha\beta}^T\cdot\boldsymbol{\alpha\beta}^T=3\boldsymbol{\alpha\beta}^T=3\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}^n=3^{n-1}\boldsymbol{A}=3^{n-1}\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&-1&-1\\4&2&2\end{pmatrix}$.

2.【解】由 $\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{n-1}=2^{n-2}\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{O}$.

3.【解】$(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

4.【解】$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

5.【解】$\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right|=|2\boldsymbol{A}^{-1}|=2^3|\boldsymbol{A}^{-1}|=2.$

6.【解】由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=4\boldsymbol{A}^{-1}$ 得 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}\right|=|(2\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}|=\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right|=\frac{1}{8}|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}.$

7.【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 为四阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}^*|=8$，所以 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^3=8$，于是 $|\boldsymbol{A}|=2$.

又 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=2\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}^*=2\boldsymbol{A}^{-1}$，故

$$\left|\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*\right|=|4\boldsymbol{A}^{-1}-6\boldsymbol{A}^{-1}|=|(-2)\boldsymbol{A}^{-1}|=(-2)^4|\boldsymbol{A}^{-1}|=16\times\frac{1}{2}=8.$$

8.【解】由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$，

因为 $r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，所以 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$，

又因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两行不成比例，所以 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，于是 $r(\boldsymbol{A})=2$.

由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&3\\-1&3&2\\2&0&t\\1&9&t+7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&3\\0&6&5\\0&-6&t-6\\0&6&t+4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&3\\0&6&5\\0&0&t-1\\0&0&t-1\end{pmatrix}$ 得 $t=1$.

9.【解】$(A\vdots E)=\begin{pmatrix}2&3&-1&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\-1&2&-2&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&1&0\\0&-1&-1&1&-2&0\\0&4&-2&0&1&1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&0&0&1&0\\0&1&1&-1&2&0\\0&0&-6&4&-7&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{5}{6}&\frac{1}{6}\\0&0&1&-\frac{2}{3}&\frac{7}{6}&-\frac{1}{6}\end{pmatrix},$$

则 $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&-4&-2\\-2&5&1\\-4&7&-1\end{pmatrix}$.

10.【解】设 $A_1=\begin{pmatrix}5&2\\2&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}$，则 $A=\begin{pmatrix}A_1&\\&A_2\end{pmatrix}$，于是 $A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&\\&A_2^{-1}\end{pmatrix}$，

而 $A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}$，$A_2^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

11.【解】$|A|=10$，因为 $A^*=|A|A^{-1}$，所以 $A^*=10A^{-1}$，故 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{10}A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$.

12.【解】$A-2E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，

而 $(A-2E\ \vdots E)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&-1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix},$$

则 $(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

13.【解】由 $A^*=|A|A^{-1}$ 得

$(A^*)^*=|A^*|\cdot(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\cdot(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-2}A$，

故 $[(A^*)^*]^{-1}=\frac{1}{|A|^{n-2}}A^{-1}=\frac{|A|A^{-1}}{|A|^{n-1}}=\frac{A^*}{|A|^{n-1}}$.

14.【解】令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，因为 $|A|=2$，所以 $A^*A=|A|E=2E$，

而 $A^*A=(A^*\alpha_1,A^*\alpha_2,A^*\alpha_3)$，所以 $A^*\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},A^*\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},A^*\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$，

于是 $A^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+A^*\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+A^*\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

15.【解】由 $AB=(E-\alpha\alpha^T)\left(E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T\right)=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\alpha\alpha^T-2a\alpha\alpha^T=E$ 且 $\alpha\alpha^T\neq O$，

得 $\frac{1}{a}-1-2a=0$，解得 $a=-1$.

16.【解】由 $A^{-1}BA=6A+BA$，得 $A^{-1}B=6E+B$，于是 $(A^{-1}-E)B=6E$，

$$B=6(A^{-1}-E)^{-1}=6\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}.$$

17.【解】因为 $|B|=10\neq0$，所以 $r(AB)=r(A)=2$.

18.【解】因为 $AB=O$，所以 $r(A)+r(B)\leqslant3$，又因为 $B\neq O$，所以 $r(B)\geqslant1$，从而有 $r(A)\leqslant2$，显然 $A$ 有两行不成比例，故 $r(A)\geqslant2$，于是 $r(A)=2$.

19.【解】$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=E_{23}$，因为 $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$，所以 $E_{ij}^2=E$，于是

$$P_1^{2009}P_2^{-1}=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

## ◇ 选择题

20.【解】由 $\alpha\alpha^T=\frac{1}{2}$，得 $AB=(E-\alpha^T\alpha)(E+2\alpha^T\alpha)=E$，选(C).

21.【解】若 $A,B$ 可逆，则 $|A|\neq0,|B|\neq0$，又 $|AB|=|A||B|$，所以 $|AB|\neq0$，于是 $AB$ 可逆，选(B).

22.【解】由 $(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$，得 $A+B$ 为对称矩阵；由 $(A^{-1}+B^{-1})^T=(A^{-1})^T+(B^{-1})^T=A^{-1}+B^{-1}$，得 $A^{-1}+B^{-1}$ 为对称矩阵；由 $(kA)^T=kA^T=kA$，得 $kA$ 为对称矩阵，选(A).

23.【解】取 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\neq O,B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\neq O$，显然 $AB=O$，故(A)、(B)都不对，取 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，显然 $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq O$，但 $|A|=0$ 且 $|B|=0$，故(D)不对；由 $AB=O$ 得 $r(A)+r(B)\leqslant n$，因为 $r(A)=n$，所以 $r(B)=0$，于是 $B=O$，所以选(C).

24.【解】因为 $A$ 经过若干次初等变换化为 $B$，所以存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_s,Q_1,\cdots,Q_t$，使得 $B=P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t$，而 $P_1,\cdots,P_s,Q_1,\cdots,Q_t$ 都是可逆矩阵，所以 $r(A)=r(B)$，若 $|A|=0$，

即 $r(A)<n$，则 $r(B)<n$，即 $|B|=0$，选(C).

25.【解】因为 $r_1=r(B)=r(AC)\leqslant r(A)=r$，所以选(C).

26.【解】显然 $AB$ 为 $m$ 阶矩阵，$r(A)\leqslant n$，$r(B)\leqslant n$，而 $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}\leqslant n<m$，所以选(C).

27.【解】因为 $r(A^*)=1$，所以 $r(A)=4-1=3$，选(C).

28.【解】因为 $AB=O$，所以 $r(A)+r(B)\leqslant n$，又因为 $B$ 是非零矩阵，所以 $r(B)\geqslant 1$，从而 $r(A)<n$，于是 $|A|=0$，选(D).

29.【解】$A,B$ 都是可逆矩阵，因为 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$，

所以 $\begin{pmatrix} O & 3A \\ 2B & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & \frac{1}{2}B^{-1} \\ \frac{1}{3}A^{-1} & O \end{pmatrix}$，选(D).

30.【解】$P_1=E_{12}$，$P_2=E_{23}(2)$，显然 $A$ 首先将第 2 列的两倍加到第 3 列，再将第 1 列及第 2 列对调，所以 $B=AE_{23}(2)E_{12}=AP_2P_1$，选(D).

31.【解】显然 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=P_1AP_2^{-1}$，

因为 $P_1^{-1}=P_1$，所以应选(D).

## ◇ 解答题

32.【证明】由 $A^2=A$，$B^2=B$ 及 $(A+B)^2=A+B=A^2+B^2+AB+BA$ 得 $AB+BA=O$ 或 $AB=-BA$，$AB=-BA$ 两边左乘 $A$ 得 $AB=-ABA$，再在 $AB=-BA$ 两边右乘 $A$ 得 $ABA=-BA$，则 $AB=BA$，于是 $AB=O$.

33.【解】由 $AX+|A|E=A^*+X$ 得

$(A-E)X=A^*-|A|E=A^*-AA^*=(E-A)A^*$，

因为 $|E-A|=-3\neq 0$，所以 $E-A$ 可逆，于是 $X=-A^*$，

由 $|A|=6$ 得 $X=-6A^{-1}$，

由 $(A\vdots E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{pmatrix},$$

得 $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&1&4\\2&1&-2\\-4&1&4\end{pmatrix}$,于是 $X=-6A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-1&-4\\-2&-1&2\\4&-1&-4\end{pmatrix}$.

34.【解】$|A|=4$,$\left(\frac{1}{4}A^*\right)^{-1}BA^{-1}=2AB+E\Rightarrow\left(\frac{1}{4}|A|A^{-1}\right)^{-1}BA^{-1}=2AB+E$

$$\Rightarrow ABA^{-1}=2AB+E\Rightarrow B=2BA+E\Rightarrow B=(E-2A)^{-1}=\begin{bmatrix}-1/3&0&0&0\\2/3&-1&0&0\\0&0&-1/3&2/3\\0&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

35.【解】由 $A^*BA=2BA-8E$ 得 $AA^*BA=2ABA-8A$,

即 $-2BA=2ABA-8A$,整理得 $(A+E)B=4E$,所以

$$B=4(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix}2&&\\&-4&\\&&2\end{pmatrix}.$$

36.【解】由 $AX=A+2X$ 得 $(A-2E)X=A$,其中 $A-2E=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$,

因为 $|A-2E|=-1\neq 0$,所以 $X=(A-2E)^{-1}A$,

$$由(A-2E\vdots A)=\begin{pmatrix}2&2&3&4&2&3\\1&-1&0&1&1&0\\-1&2&1&-1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\2&2&3&4&2&3\\-1&2&1&-1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&4&3&2&0&3\\0&1&1&0&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&1&0&3&3\\0&4&3&2&0&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1&0\\0&1&1&0&3&3\\0&0&-1&2&-12&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&-8&-6\\0&1&0&2&-9&-6\\0&0&1&-2&12&9\end{pmatrix},$$

得 $X=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$.

37.【解】令 $B=\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_{n-1}\end{pmatrix}$,$C=(a_n)$,

则 $A=\begin{pmatrix}O&B\\C&O\end{pmatrix}$,从而 $A^{-1}=\begin{pmatrix}O&C^{-1}\\B^{-1}&O\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&a_n^{-1}\\a_1^{-1}&0&\cdots&0&0\\0&a_2^{-1}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}^{-1}&0\end{bmatrix}$.

38.【解】(1) 由 $A^2+2A-3E=O$ 得 $A(A+2E)=3E$， $\frac{1}{3}A\cdot(A+2E)=E$，

根据逆矩阵的定义，有 $(A+2E)^{-1}=\frac{1}{3}A$.

(2) 由 $A^2+2A-3E=O$ 得 $(A+4E)(A-2E)+5E=O$，则 $(A+4E)^{-1}=-\frac{1}{5}(A-2E)$.

39.【解】$E^k-A^k=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$，又 $E^k-A^k=E$，

所以 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

40. (1)【解】$PQ=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|B|A^* & O\\ O & |A|B^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A||B|E & O\\ O & |A||B|E\end{pmatrix}=|A||B|E$.

(2)【证明】因为 $|P|=|A||B|$，所以当 $P$ 可逆时，$|A||B|\neq 0$，而 $PQ=|A||B|E$，

即 $\frac{1}{|A||B|}PQ=E$，于是 $Q$ 可逆且 $Q^{-1}=\frac{1}{|A||B|}P$.

41.【证明】因为 $AA^*=|A|E$，又已知 $A^2=|A|E$，所以 $AA^*=A^2$，而 $A$ 可逆，故 $A=A^*$.

42.【证明】由 $A^2-2A-8E=O$ 得 $(4E-A)(2E+A)=O$，根据矩阵秩的性质得 $r(4E-A)+r(2E+A)\leqslant n$. 又 $r(4E-A)+r(2E+A)\geqslant r[(4E-A)+(2E+A)]=r(6E)=n$，所以有 $r(4E-A)+r(2E+A)=n$.

43.【证明】由 $AB=AC$ 得 $A(B-C)=O$，

从而 $r(A)+r(B-C)\leqslant n$，

因为 $r(A)=n$，所以 $r(B-C)=0$，即 $B-C=O$，故 $B=C$.

44.【证明】因为 $r(A)=r(A^{\mathrm{T}}A)$，而 $A^{\mathrm{T}}A=O$，所以 $r(A)=0$，于是 $A=O$.

45.【证明】显然 $r(A\vdots AB)\geqslant r(A)$，

由 $(A\vdots AB)=A(E\vdots B)$ 得 $r(A\vdots AB)=r[A(E\vdots B)]\leqslant r(A)$，

故 $r(A\vdots AB)=r(A)$.

# 三、向量

## ◇ 填空题

1.【解】因为 $(1,1,2,-3)^{\mathrm{T}}$ 为 $AX=0$ 的解，

所以 $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3-3\alpha_4=0$，故 $\alpha_2=-\alpha_1-2\alpha_3+3\alpha_4$.

2.【解】$(\alpha_1+a\alpha_2+4\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ a & 1 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$，

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，而 $\alpha_1+a\alpha_2+4\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3$ 线性相关，所以

$r\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ a & 1 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}<3$，即 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ a & 1 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$，解得 $a=5$.

3.【解】因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 正交,所以$\begin{cases}3+2a+2+3=0,\\ b+2+2a-8+27=0,\\ 3b+6+a^2-3a-4+9=0,\end{cases}$ 解得 $a=-4,b=-13$.

4.【解】令过渡矩阵为 $Q$,则$(e_1,e_2,e_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)Q$,

则 $Q=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)^{-1}(e_1,e_2,e_3)$.

由$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0\\0&1&1&0&1&2\\0&0&1&-2&-4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&-2\\0&1&0&2&5&1\\0&0&1&-2&-4&1\end{pmatrix}$,

得过渡矩阵为 $Q=\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&5&1\\-2&-4&1\end{pmatrix}$.

## ◇ 选择题

5.【解】因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,选(A).

6.【解】因为 $-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关;

因为$(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关;

因为$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关,容易通过证明向量组线性无关的定义法得 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关,选(C).

7.【解】(A) 不对,因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关可以保证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关不能保证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关;

(B) 不对,因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关可以保证对任意一组非零常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$,但存在一组不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$ 不能保证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关;

(C) 不对,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关不能得到其维数大于其个数,如:$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 线性无关,但其维数等于其个数,选(D).

8.【解】(A) 不对,因为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,但不一定能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}_1$ 不一定线性相关;

(B) 不对,因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}_1$ 不一定线性相关,$\boldsymbol{\beta}_2$ 不一定可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}_1$ 线性表示,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 不一定线性相关;

(C) 不对,因为 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,而 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,所以 $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关,选(D).

9.【解】因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 $m$,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件是其秩为 $m$,所以选(D).

10.【解】因为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，$\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 $k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 一定不可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，选(A).

11.【解】若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关，则 $r(\boldsymbol{A})=n$，$r(\boldsymbol{B})=n$，于是 $r(\boldsymbol{AB})=n$. 因为 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 线性相关，所以 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)<n$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 至少有一个线性相关，选(D).

12.【解】因为向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价，所以选(D).

13.【解】若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则其中任一向量都不可由其余向量线性表示，反之，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一向量都不可由其余向量线性表示，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 一定线性无关，因为若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则其中至少有一个向量可由其余向量线性表示，故选(C).

14.【解】因为 $|\boldsymbol{A}|=0$，所以 $r(\boldsymbol{A})<n$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个列向量线性相关，于是其列向量中至少有一个向量可由其余向量线性表示，选(C).

## ◇ 解答题

**15.【证明】方法一**

令 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$，即

$(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+2k_2+4k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+3k_2+9k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以有 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1+2k_2+4k_3=0\\k_1+3k_2+9k_3=0\end{cases}$

而 $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant 3}(i-j)=2\neq 0$，由克拉默法则得 $k_1=k_2=k_3=0$，

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

**方法二**

令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$，

则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$. 因为 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}$ 可逆，所以 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})=3$，

故 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

**16.【证明】**令 $k_1(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathbf{0}$，即

$k_1(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m)+\cdots+k_m(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{m-1})=\mathbf{0}$ 或

$(k_2+k_3+\cdots+k_m)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_3+\cdots+k_m)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_1+k_2+\cdots+k_{m-1})\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，所以 $\begin{cases}k_2+k_3+\cdots+k_m=0,\\k_1+k_3+\cdots+k_m=0,\\\qquad\vdots\\k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}=0,\end{cases}$

因为 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1}(m-1) \neq 0$，所以 $k_1 = \cdots = k_m = 0$，

故 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

17.【证明】设有 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使 $x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+x_n(\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$，即 $(x_1+x_n)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$，

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，所以有 $\begin{cases} x_1+x_n=0, \\ x_1+x_2=0, \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}+x_n=0, \end{cases}$

该方程组系数行列式 $D_n=1+(-1)^{n+1}$，$n$ 为奇数 $\Leftrightarrow D_n \neq 0 \Leftrightarrow x_1=\cdots=x_n=0$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

18.【证明】由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$ 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$；

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$；由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2$，

令
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}, \tag{1}$$
(1) 两边左乘 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 得
$$k_2\boldsymbol{\alpha}_1+k_3\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}, \tag{2}$$
(2) 两边左乘 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 得 $k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，所以 $k_3=0$，代入(2)、(1) 得 $k_1=0,k_2=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

19.【证明】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为一个向量组，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r<n)$ 线性相关，则存在不全为零的常数 $k_1,\cdots,k_r$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$，于是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+0\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$，因为 $k_1,\cdots,k_r,0,\cdots,0$ 不全为零，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

20.【证明】令 $k_0\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\mathbf{0}$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 与非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 正交及 $(\boldsymbol{\beta},k_0\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1})=0$ 得 $k_0(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0$，因为 $\boldsymbol{\beta}$ 为非零向量，所以 $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=\|\boldsymbol{\beta}\|^2>0$，于是 $k_0=0$，故 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\mathbf{0}$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关得 $k_1=\cdots k_{n-1}=0$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

21.【证明】令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 两两正交及 $(\boldsymbol{\alpha}_1,k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n)=0$，得 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)=0$，而 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)=\|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2>0$，于是 $k_1=0$，同理可证 $k_2=\cdots=k_n=0$，

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. 令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交.

22.【证明】首先 $r(\boldsymbol{B})\leqslant\min\{m,n\}=n$，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 得 $r(\boldsymbol{AB})=n$，而 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$，所以 $r(\boldsymbol{B})\geqslant n$，从而 $r(\boldsymbol{B})=n$，于是 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

23.【证明】因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 也线性无关，又向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关，所以向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，从而 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示.

24.【解】向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关的充分必要条件是 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=0$，

而 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & t-1 \\ t+2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (t+1)(t+5)$，所以 $t=-1$ 或者 $t=-5$，

因为任意两个向量线性无关，所以 $t=-5$.

25.【证明】方法一　令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，所以 $\boldsymbol{A\beta}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\beta}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，所以 $r(\boldsymbol{A})=n$，从而方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 只有零解，即 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

**方法二**

（反证法）不妨设 $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n+k_0\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，上式两边左乘 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 得

$$k_1\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n+k_0\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，所以 $k_0\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，即 $k_0\|\boldsymbol{\beta}\|^2=0$，从而 $k_0=0$，于是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$，再由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，得 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，矛盾（因为当向量的个数大于向量的维数时向量组一定线性相关），所以 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$.

26.【解】因为向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，所以有 $\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，设向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,x_3)$，则有 $\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，

于是 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，故 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

由 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\0&1&1&2&3&4\\0&0&1&1&4&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-1&-1\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&1&1&4&3\end{pmatrix}$，

得 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&-1&1\\1&4&3\end{pmatrix}$，

于是 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&-1&1\\1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\8\end{pmatrix}$.

27.【解】因为 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{Y}$，由 $y_1=x_1-x_2-x_3$，$y_2=-x_1+x_2$，$y_3=x_1+2x_3$ 得 $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}$，由 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{Y}$，得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X},$$

于是$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$,

故从基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的过渡矩阵为$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

# 四、线性方程组

## ◇ 填空题

**1.【解】** 因为$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$有非零解,所以$|\boldsymbol{A}|=0$,

而$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&4&a\\1&a&9\end{vmatrix}=-(a+4)(a-6)$且$a<0$,所以$a=-4$.

因为$r(\boldsymbol{A})=2$,所以$r(\boldsymbol{A}^*)=1$.

因为$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,所以$\boldsymbol{A}$的列向量组为$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的解,

故$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的通解为$\boldsymbol{X}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$($C_1,C_2$为任意常数).

**2.【解】** 因为$\boldsymbol{A}$的各行元素之和为零,所以$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$,又因为$r(\boldsymbol{A})=n-1$,所以$\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$为方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的基础解系,从而通解为$k\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$(其中$k$为任意常数).

**3.【解】** 因为$|\boldsymbol{A}|=0$,所以$r(\boldsymbol{A})<n$,又因为$A_{ki}\neq 0$,所以$r(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$,从而$r(\boldsymbol{A})=n-1$,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的基础解系含有一个线性无关的解向量,又$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,所以$\boldsymbol{A}^*$的列向量为方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的解向量,故$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的通解为$C(A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{ki},\cdots,A_{kn})^{\mathrm{T}}$($C$为任意常数).

**4.【解】** 显然$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$为方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解的充分必要条件是$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s)=\boldsymbol{b}$,因为$\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{A\eta}_2=\cdots=\boldsymbol{A\eta}_s=\boldsymbol{b}$,所以$(k_1+k_2+\cdots+k_s)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$,注意到$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,所以$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$,即$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$为方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解的充分必要条件是$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$.

**5.【解】** 令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&-1&k\\3&1&-1\end{pmatrix}$,因为$\boldsymbol{B}$的列向量为方程组的解且$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,所以$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$且方程

组有非零解，故 $|A|=0$，解得 $k=1$. 因为 $AB=O$，所以 $r(A)+r(B)\leqslant 3$ 且 $r(A)\geqslant 1$，于是 $r(B)\leqslant 2<3$，故 $|B|=0$.

6.【解】因为 $r(A)=3$，所以此时方程组 $AX=b$ 的通解为 $k\xi+\eta$，其中 $\xi=\alpha_3-\alpha_1=(\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_1+\alpha_2)=\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\\-10\end{pmatrix}$，$\eta=\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\-4\end{pmatrix}$，于是方程组的通解为

$$X=k\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\\-10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\-4\end{pmatrix}\ (k\text{ 为任意常数}).$$

7.【解】因为方程组无解，所以 $r(A)<r(\overline{A})\leqslant 3$，于是 $r(A)<3$，即 $|A|=0$.

由 $|A|=3+2a-a^2=0$，得 $a=-1$ 或 $a=3$.

当 $a=3$ 时，因为 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&5&3\\1&3&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，所以此时方程组有无穷多个解；

当 $a=-1$ 时，$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&1&3\\1&-1&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&1\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$，因为 $r(A)\neq r(\overline{A})$，所以此时方程组无解，于是 $a=-1$.

8.【解】$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\1&0&0&1&a_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&-1&0&1&a_1+a_4\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&0&1&1&a_1+a_2+a_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&0&0&0&a_1+a_2+a_3+a_4\end{pmatrix},$$

因为原方程组有解，所以 $r(A)=r(\overline{A})$，于是 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$.

## ◇ 选择题

9.【解】方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_1-x_2=0,\\2x_1+2x_2=0\end{cases}$ 只有零解，而 $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\x_1-x_2=2,\\2x_1+2x_2=3\end{cases}$ 无解，故(A)不对；

方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\2x_1+2x_2=0\end{cases}$ 有非零解，而 $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\2x_1+2x_2=3\end{cases}$ 无解，故(B)不对；

方程组$\begin{cases}x_1+x_2=1,\\x_1-x_2=2,\\2x_1+2x_2=3\end{cases}$无解,但$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_1-x_2=0,\\2x_1+2x_2=0\end{cases}$只有零解,故(C)不对;

若$AX=b$有无穷多个解,则$r(A)=r(\overline{A})<n$,从而$r(A)<n$,故方程组$AX=0$一定有非零解,选(D).

*10*.【解】因为若$r(A)=m$(即$A$为行满秩矩阵),则$r(\overline{A})=m$,于是$r(A)=r(\overline{A})$,即方程组$AX=b$一定有解,选(D).

*11*.【解】因为$AX=0$的基础解系只含一个线性无关的解向量,

所以$r(A)=3$,于是$r(A^*)=1$.

因为$A^*A=|A|E=O$,所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为$A^*X=0$的一组解,

又因为$-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$,所以$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关,从而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,即为$A^*X=0$的一个基础解系,应选(C).

*12*.【解】根据齐次线性方程组解的结构,四个向量组皆为方程组$AX=0$的解向量组,容易验证四组中只有(C)组线性无关,所以选(C).

*13*.【解】选(D),因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$为方程组$AX=0$的两个线性无关解,也是基础解系,而$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$为方程组$AX=b$的一个特解,根据非齐次线性方程组通解结构,选(D).

## ◇ 解答题

*14*.【解】$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\2&1&3&5&-5\\1&-1&3&-2&-1\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&2\\0&-2&2&-6&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

**方法一**

原方程组的同解方程组为$\begin{cases}x_1+2x_3+x_4-2x_5=0,\\x_2-x_3+3x_4-x_5=0,\end{cases}$或者$\begin{cases}x_1=-2x_3-x_4+2x_5,\\x_2=x_3-3x_4+x_5,\end{cases}$

故原方程组的通解为

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_3-x_4+2x_5\\x_3-3x_4+x_5\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(其中$x_3,x_4,x_5$为任意常数).

**方法二**

原方程组的基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$

故通解为 $X=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$（其中 $k_1,k_2,k_3$ 为任意常数）.

*15*.【解】$\overline{A}=\begin{pmatrix}a&a+3&1&-2\\1&a&1&a\\1&1&a&a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&1&a\\a-1&3&0&-2-a\\0&a-1&1-a&a(1-a)\end{pmatrix}$.

若 $a=1$，则 $\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&3&0&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，此时原方程组的通解为

$$X=k(-1,0,1)^T+(2,-1,0)^T\ (k\text{ 为任意常数})；$$

若 $a\neq1$，则 $\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&a&1&a\\a-1&3&0&-2-a\\0&1&-1&-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a+1&0&0\\a-1&2&1&-2\\0&1&-1&-a\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&a+1&0&0\\0&1&-1&-a\\0&3-a^2&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a+1&0&0\\0&1&-1&-a\\0&0&4-a^2&-2+3a-a^3\end{pmatrix}.$$

当 $a=2$ 时，方程组无解；

当 $a=-2$ 时，$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，此时原方程组的通解为

$$X=k(1,1,1)^T+(2,2,0)^T\ (k\text{ 为任意常数}).$$

*16*.【解】$A=\begin{pmatrix}a_1&2&a_3&a_4\\4&b_2&3&b_4\\3&c_2&5&c_4\end{pmatrix}$，因为 $A$ 有两行不成比例，所以 $r(A)\geqslant2$，又原方程组至少有三个线性无关解，所以 $4-r(A)+1\geqslant3$，即 $r(A)\leqslant2$，则 $r(A)=2$，于是原方程组的通解为

$$k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)+\eta_1=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\2\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\6\\-3\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\ (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

*17*.【解】令 $A=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&-1&3\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$， $\boldsymbol{\alpha}_5=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

*18.*【解】方法一

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 可得 $(x_1+3x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2+2x_3)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，因此 $\begin{cases}x_1+3x_3=0,\\x_2+2x_3=0\end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

方法二

由 $r(\boldsymbol{A})=2$ 可知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有一个线性无关的解向量，而 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，

因此 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

*19.*【解】(1) 因为 $r(\boldsymbol{A})=1$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有三个线性无关的解向量，

故 $(1,-2,1,2)^{\mathrm{T}},(1,0,5,2)^{\mathrm{T}},(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}},(2,-4,3,a+1)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，即

$$\begin{vmatrix}1&1&-1&2\\-2&0&2&-4\\1&5&0&3\\2&2&1&a+1\end{vmatrix}=0，解得\ a=6.$$

(2) 因为 $(1,-2,1,2)^{\mathrm{T}},(1,0,5,2)^{\mathrm{T}},(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k_1(1,-2,1,2)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,5,2)^{\mathrm{T}}+k_3(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$（$k_1,k_2,k_3$ 为任意常数).

*20.*【解】因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性表示，所以 $r(\boldsymbol{A})=3$，齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有两个线性无关的解向量.

由 $\boldsymbol{\alpha}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+6\boldsymbol{\alpha}_5$ 得方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个解为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(3,-1,-1,0,-1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(2,0,1,-1,6)^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k_1(3,-1,-1,0,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(2,0,1,-1,6)^{\mathrm{T}}$（$k_1,k_2$ 为任意常数).

*21.*【解】因为 $r(\boldsymbol{A})=3$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解形式为 $k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$，其中 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\eta}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的特解，根据方程组解的结构的性质，

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\\6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\-1\end{pmatrix},$$

所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\4\\-3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\-1\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数).

*22.*【解】方法一

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix},$$

由 $r(\boldsymbol{A})=n$ 可知 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，而 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|[1+(-1)^{n+1}]$，

当 $n$ 为奇数时，$|\boldsymbol{B}|\neq 0$，方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；

当 $n$ 为偶数时，$|\boldsymbol{B}|=0$，方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

**方法二**

$$\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+x_n(\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$$
$$\Leftrightarrow(x_1+x_n)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_1+x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，

所以 $\begin{cases}x_1+x_n=0\\x_1+x_2=0\\\vdots\\x_{n-1}+x_n=0\end{cases}$，$D=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}$，

当 $n$ 为奇数时，$|\boldsymbol{B}|\neq 0$，方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；

当 $n$ 为偶数时，$|\boldsymbol{B}|=0$，方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

23.【解】令
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}\qquad(*)$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\vdots\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}$$

(1) 当 $a=-1,b\neq 0$ 时，因为 $r(\boldsymbol{A})=2\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，所以方程组$(*)$无解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合；

(2) 当 $a\neq -1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可唯一表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合.

24. (1)【证明】因为 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，又 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$，所以 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=n-1$，

即 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=n-1<n$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解.

(2)【解】因为 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(n-1)\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(n-1)\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+0\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，

即齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有基础解系 $\boldsymbol{\xi}=(1,2,\cdots,n-1,0)^{\mathrm{T}}$，

又因为 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$，所以方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有特解 $\boldsymbol{\eta}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，

故方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}=k(1,2,\cdots,n-1,0)^{\mathrm{T}}+(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}(k\text{ 为任意常数}).$$

25.【解】$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&0&1-2t&2-2t\\0&1&t&t\\0&0&-(1-t)^2&-(1-t)^2\end{pmatrix}$，

因为 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $t=1$，方程组的通解为

$$X=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

**26.【解】**$D=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&a+2&-b-2\\0&-3a&a+2b\end{vmatrix}=a(a-b).$

(1) 当 $a\neq 0,a\neq b$ 时,方程组有唯一解,唯一解为 $x_1=1-\dfrac{1}{a},x_2=\dfrac{1}{a},x_3=0$;

(2) 当 $a=0$ 时,$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&2&-b-2&3\\0&0&2b&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&0&b&-1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$,

因为 $r(A)\neq r(\overline{A})$,所以方程组无解;

(3) 当 $a=b\neq 0$ 时,$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-a-2&3\\0&-3a&3a&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1-a^{-1}\\0&1&-1&a^{-1}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

方程组有无穷多个解,通解为 $X=k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-a^{-1}\\a^{-1}\\0\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数).

**27.【解】**(1)$D=|A^{\mathrm T}|=(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_2-a_1)$,

若 $a_i\neq a_j(i\neq j)$,则 $D\neq 0$,方程组有唯一解,又 $D_1=D_2=D_3=0,D_4=D$,所以方程组的唯一解为 $X=(0,0,0,1)^{\mathrm T}$.

(2) 当 $a_1=a_3=a\neq 0,a_2=a_4=-a$ 时,

$$(A^{\mathrm T}\vdots b)=\begin{pmatrix}1&a&a^2&a^3&a^3\\1&-a&a^2&-a^3&-a^3\\1&a&a^2&a^3&a^3\\1&-a&a^2&-a^3&-a^3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&a^2&0&0\\0&1&0&a^2&a^2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

方程组通解为 $X=k_1(-a^2,0,1,0)^{\mathrm T}+k_2(0,-a^2,0,1)^{\mathrm T}+(0,a^2,0,0)^{\mathrm T}$($k_1,k_2$ 为任意常数).

**28.【证明】**$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,因为 $A\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$,所以 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,故方程组 $BY=0$ 只有零解.

**29.【解】**因为 $AX=B$ 有解,所以 $r(A)=r(A\vdots B)$,

由$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&-1&2&2&b+2\\1&0&-1&a&-3\\3&-2&3&5&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&2&b+2\\0&1&-3&a-2&-5-b\\0&0&0&1-a&-2b-2\end{pmatrix}$得

$$a=1,b=-1.$$

令 $X=(X_1,X_2),B=(b_1,b_2)$,

$$(A\vdots B)\to\begin{pmatrix}1&-1&2&2&1\\0&1&-3&-1&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1&-3\\0&1&-3&-1&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$AX_1=b_1$ 的通解为 $X_1=k_1\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1+1\\3k_1-1\\k_1\end{pmatrix}$；

$AX_2=b_2$ 的通解为 $X_2=k_2\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_2-3\\3k_2-4\\k_2\end{pmatrix}$，

故 $X=\begin{pmatrix}k_1+1&k_2-3\\3k_1-1&3k_2-4\\k_1&k_2\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数）.

# 五、矩阵的特征值和特征向量

## ◇ 填空题

1.【解】$|A|=-\frac{1}{4}$，$A^*$ 的特征值为 $\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}$，$4A^*+3E$ 的特征值为 5，1，2，于是 $|4A^*+3E|=10$.

2.【解】由 $A\alpha=\lambda\alpha$ 得 $\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&a\\2&a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}5=\lambda,\\2a+1=\lambda,\\2+a+2b=2\lambda,\end{cases}$

解得 $\lambda=5,a=2,b=3$.

3.【解】由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&2&-a\\-1&\lambda-3&-5\\0&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$ 得 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$，

因为 $A$ 可对角化，所以 $r(2E-A)=1$，

由 $2E-A=\begin{pmatrix}2&2&-a\\-1&-1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&5\\0&0&-a-10\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $a=-10$.

4.【解】因为实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交，所以有 $6+3a+3-6a=0,a=3$.

5.【解】因为 $A\sim B$，所以 $\begin{cases}\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)\\|A|=|B|\end{cases}$，即 $\begin{cases}3+x=5+y\\2x-12=-6y\end{cases}$，解得 $x=3,y=1$.

6.【解】因为实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交，令 $\lambda_2=\lambda_3=5$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，由 $\alpha_1^T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$ 得 $\lambda_2=\lambda_3=5$ 对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

7.【解】因为 $A^2=3A$，令 $AX=\lambda X$，因为 $A^2X=\lambda^2X$，所以有 $(\lambda^2-3\lambda)X=0$，而 $X\neq 0$，故 $A$ 的特征值为 0 或者 3，因为 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\operatorname{tr}(A)=(\alpha,\beta)$，所以 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$.

## ◇ 选择题

8.【解】若 $A\sim B$，则存在可逆矩阵 $P$，使得 $P^{-1}AP=B$，

于是 $P^{-1}(\lambda E - A)P = \lambda E - P^{-1}AP = \lambda E - B$，即 $\lambda E - A \sim \lambda E - B$；

反之，若 $\lambda E - A \sim \lambda E - B$，即存在可逆矩阵 $P$，使得 $P^{-1}(\lambda E - A)P = \lambda E - B$，

整理得 $\lambda E - P^{-1}AP = \lambda E - B$，即 $P^{-1}AP = B$，即 $A \sim B$，应选(D).

*9.*【解】因为 $A$ 可逆，所以 $\lambda \neq 0$，令 $AX = \lambda X$，则 $A^*AX = \lambda A^*X$，从而有 $A^*X = \frac{|A|}{\lambda}X$，选(B).

*10.*【解】由 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ 得 $|A| = 0$，则 $r(A) < 3$，即 $A$ 不可逆，(A) 正确；

又 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}(A) = 0$，所以(B) 正确；

因为 $A$ 的三个特征值都为单值，所以 $A$ 的非零特征值的个数与矩阵 $A$ 的秩相等，即 $r(A) = 2$，从而 $AX = 0$ 的基础解系仅含有一个线性无关的解向量，(D) 是正确的；

(C) 不对，因为只有实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量正交，一般矩阵不一定有此性质，所以选(C).

*11.*【解】因为 $AX = 0$ 有非零解，所以 $r(A) < n$，故 0 为矩阵 $A$ 的特征值，$\alpha_1, \alpha_2$ 为特征值 0 所对应的线性无关的特征向量，显然特征值 0 为二重特征值，若 $\alpha_1 + \alpha_3$ 为属于特征值 $\lambda_0$ 的特征向量，则有 $A(\alpha_1 + \alpha_3) = \lambda_0(\alpha_1 + \alpha_3)$，注意到

$A(\alpha_1 + \alpha_3) = 0\alpha_1 - 2\alpha_3 = -2\alpha_3$，故 $-2\alpha_3 = \lambda_0(\alpha_1 + \alpha_3)$ 或 $\lambda_0\alpha_1 + (\lambda_0 + 2)\alpha_3 = 0$，

因为 $\alpha_1, \alpha_3$ 线性无关，所以有 $\lambda_0 = 0, \lambda_0 + 2 = 0$，矛盾，故 $\alpha_1 + \alpha_3$ 不是特征向量，同理可证 $3\alpha_3 - \alpha_1$ 及 $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$ 也不是特征向量，显然 $2\alpha_1 - 3\alpha_2$ 为特征值 0 对应的特征向量，选(D).

*12.*【解】根据实对称矩阵的性质，显然(B)、(C)、(D) 都是正确的，但实对称矩阵不一定是正定矩阵，所以 $A$ 不一定与单位矩阵合同，选(A).

*13.*【解】矩阵 $A$ 与对角阵相似的充分必要条件是其有 $n$ 个线性无关的特征向量，$A$ 有 $n$ 个单特征值只是其可对角化的充分而非必要条件，同样 $A$ 是实对称阵也是其可对角化的充分而非必要条件，$A$ 可逆既非其可对角化的充分条件，也非其可对角化的必要条件，选(C).

*14.*【解】因为 $\alpha, \beta$ 为非零向量，所以 $A = \alpha\beta^T \neq O$，则 $r(A) \geqslant 1$，

又因为 $r(A) = r(\alpha\beta^T) \leqslant r(\alpha) = 1$，所以 $r(A) = 1$.

令 $AX = \lambda X$，由 $A^2X = \alpha\beta^T \cdot \alpha\beta^T X = O = \lambda^2 X$ 得 $\lambda = 0$，

因为 $r(0E - A) = r(A) = 1$，所以 $A$ 的线性无关的特征向量个数为 3，应选(C).

*15.*【解】显然四个选项中的矩阵都是实对称阵，因为 $A, B$ 正定，所以 $A^{-1}, B^{-1}$ 及 $A^*, B^*$ 都是正定的，对任意 $X \neq 0$，$X^T(C^TAC)X = (CX)^TA(CX) > 0$(因为 $C$ 可逆，所以当 $X \neq 0$ 时，$CX \neq 0$)，于是 $C^TAC$ 为正定矩阵，同样用定义法可证 $A^{-1} + B^{-1}$ 与 $A^* + B^*$ 都是正定矩阵，选(D).

## ◆ 解答题

*16.*【解】(1) 由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & -2 \\ -a & \lambda - 1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 = 0$ 得矩阵 $A$ 的特征值为

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$，

因为 $A$ 有三个线性无关的特征向量，所以 $A$ 可以相似对角化，从而 $r(E - A) = 1$，

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\-a&0&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-a-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $a=-1$.

(2) 将 $\lambda=-2$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&3&1\\1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

$\lambda=-2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$；

将 $\lambda=1$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，即 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&0&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

$\lambda=1$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(3) 令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

**17.【解】**(1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ 得 $\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&a\\1&1&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}\lambda=3,\\a+2=\lambda,\\2+b=\lambda,\end{cases}$ 解得 $a=1,b=1,\lambda=3$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\0&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)=0$ 得 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$.

将 $\lambda_1=0$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_1=0$ 对应的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$；

将 $\lambda_2=2$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_2=2$ 对应的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$；

将 $\lambda_3=3$ 代入 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda_3=3$ 对应的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是单值，所以 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

*18.*【解】由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3=0$ 得 $\lambda=2$(三重),

因为 $r(2E-A)=1$,所以 $\lambda=2$ 只有两个线性无关的特征向量,故 $A$ 不可以对角化.

*19.*【解】由 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 及 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}(A)=10$ 得 $\lambda_3=6$.

因为矩阵 $A$ 有三个线性无关的特征向量,所以 $r(2E-A)=1$,

由 $2E-A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -a & -2 & -b\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & a-2 & -a-b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得 $a=2,b=-2$.

$\lambda_1=\lambda_2=2$ 代入 $(\lambda E-A)X=\mathbf{0}$,

由 $2E-A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix};$$

$\lambda_3=6$ 代入 $(\lambda E-A)X=\mathbf{0}$,

由 $6E-A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 5 & 1 & -1\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_3=6$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$,则 $P$ 可逆,且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$.

*20.*【证明】设 $AX=\lambda X$,则 $X^TA^T=\lambda X^T$,从而有 $X^TA^TAX=\lambda X^TAX=\lambda^2X^TX$,因为 $A^TA=E$,所以 $(\lambda^2-1)X^TX=0$,而 $X^TX=\|X\|^2\neq0$,所以 $\lambda^2=1$,于是 $|\lambda|=1$.

*21.*(1)【证明】因为 $|\lambda E-A^T|=|(\lambda E-A)^T|=|\lambda E-A|$,所以 $A^T$ 与 $A$ 的特征值相等.

(2)【解】因为 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0})$,

所以 $A^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0^2\boldsymbol{\alpha}$, $(A^2+2A+3E)\boldsymbol{\alpha}=(\lambda_0^2+2\lambda_0+3)\boldsymbol{\alpha}$,

于是 $A^2,A^2+2A+3E$ 的特征值分别为 $\lambda_0^2,\lambda_0^2+2\lambda_0+3$.

(3)【解】因为 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq0$,所以 $\lambda_0\neq0$,由 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$ 得 $A^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\lambda_0}\boldsymbol{\alpha}$,

由 $A^*A\boldsymbol{\alpha}=|A|\boldsymbol{\alpha}$ 得 $A^*\boldsymbol{\alpha}=\frac{|A|}{\lambda_0}\boldsymbol{\alpha}$,又 $(E-A^{-1})\boldsymbol{\alpha}=\left(1-\frac{1}{\lambda_0}\right)\boldsymbol{\alpha}$,

于是 $A^{-1},A^*,E-A^{-1}$ 的特征值分别为 $\frac{1}{\lambda_0},\frac{|A|}{\lambda_0}$ 及 $1-\frac{1}{\lambda_0}$.

**22.【证明】** 反证法

不妨设 $X_1+X_2$ 是 $A$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，则有 $A(X_1+X_2)=\lambda(X_1+X_2)$，

因为 $AX_1=\lambda_1X_1, AX_2=\lambda_2X_2$，所以 $(\lambda_1-\lambda)X_1+(\lambda_2-\lambda)X_2=0$，

而 $X_1,X_2$ 线性无关，于是 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，与已知矛盾，故 $X_1+X_2$ 不是 $A$ 的特征向量.

**23.【解】** 令 $\alpha^T\beta=k$，则 $A^2=kA$，

设 $AX=\lambda X$，则 $A^2X=\lambda^2X=k\lambda X$，即 $\lambda(\lambda-k)X=0$，

因为 $X\neq 0$，所以矩阵 $A$ 的特征值为 $\lambda=0$ 或 $\lambda=k$.

由 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=\mathrm{tr}(A)$ 且 $\mathrm{tr}(A)=k$ 得 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0, \lambda_n=k$.

因为 $r(A)=1$，所以方程组 $(0E-A)X=0$ 的基础解系含有 $n-1$ 个线性无关的解向量，即 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，故 $A$ 可以对角化.

**24.【解】**(1) 因为 $r(A)=1$，所以 $AX=0$ 的基础解系含有 $n-1$ 个线性无关的解向量，其基础解系为

$$\alpha_1=\left(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0\right)^T, \alpha_2=\left(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0\right)^T,\cdots,\alpha_{n-1}=\left(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1\right)^T,$$

则方程组 $AX=0$ 的通解为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$（$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数）.

(2) 因为 $A^2=kA$，其中 $k=(\alpha,\alpha)=\sum_{i=1}^n a_i^2>0$，所以 $A$ 的非零特征值为 $k$，

因为 $A\alpha=\alpha\alpha^T\alpha=k\alpha$，所以非零特征值 $k$ 对应的线性无关的特征向量为 $\alpha$.

**25.【解】方法一**　由 $A^n=(\alpha\alpha^T)\cdots(\alpha\alpha^T)=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，

得 $|6E-A^n|=6^2(6-2^n)$.

**方法二**　$A=\alpha\alpha^T$，由 $|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-2)=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=0, \lambda_3=2$，

因为 $6E-A^n$ 的特征值为 $6,6,6-2^n$，所以 $|6E-A^n|=6^2(6-2^n)$.

**方法三**　因为 $A$ 是实对称矩阵且 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=2$，所以存在可逆阵 $P$，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix}，则 |6E-P^{-1}A^nP|=\begin{vmatrix}6&&\\&6&\\&&6-2^n\end{vmatrix}=6^2(6-2^n).$$

$A^n\sim P^{-1}A^nP$，则 $|6E-A^n|=|6E-P^{-1}A^nP|=6^2(6-2^n)$.

**26.【解】方法一**

令 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$，$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}$，则

$$A^n=P\begin{pmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{pmatrix}P^{-1}，于是 A^n\beta=P\begin{pmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{pmatrix}P^{-1}\beta=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.$$

**方法二**　令 $\beta=x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3$，解得 $x_1=2,x_2=-2,x_3=1$，则

$$A^n\beta=2A^n\xi_1-2A^n\xi_2+A^n\xi_3=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-2^{n+1}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.$$

27.【证明】由 $AX=\lambda X$ 得 $A^2X=A(AX)=A(\lambda X)=\lambda AX=\lambda^2X$ 可知 $\lambda^2$ 是 $A^2$ 的特征值，$X$ 为特征向量. 若 $A^2X=\lambda X$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$A^2=O$，$A^2$ 的特征值为 $\lambda=0$，取 $X=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，显然 $A^2X=0X$，但 $AX=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq 0X$，即 $X$ 不是 $A$ 的特征向量，因此结论未必成立.

28.(1)【解】一般情况下，$AB$ 与 $BA$ 不相似，例如：

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix},$$

因为 $r(AB)\neq r(BA)$，所以 $AB$ 与 $BA$ 不相似.

(2)【证明】因为 $|A|=n!\neq 0$，所以 $A$ 为可逆矩阵，取 $P=A$，则有 $P^{-1}ABP=BA$，故$AB\sim BA$.

29.【证明】(1) 因为 $A^2=\left(E-\dfrac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T\right)\left(E-\dfrac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T\right)=E-\dfrac{4}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T+\dfrac{4}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T=E$，所以 $A$ 可逆且 $A^{-1}=A$.

(2) 因为 $A\alpha=\left(E-\dfrac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T\right)\alpha=\alpha-2\alpha=-\alpha$，所以 $\alpha$ 是矩阵$A$ 的特征向量，其对应的特征值为 $-1$.

30.【解】(1) 因为 3 为 $A$ 的特征值，所以 $|3E-A|=0$，解得 $y=2$.

(2)$(AP)^T(AP)=P^TA^TAP=P^TA^2P$，

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}，令 A_1=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}，|\lambda E-A_1|=0 得 \lambda_1=1,\lambda_2=9，$$

当 $\lambda=1$ 时，由$(E-A_1)X=0$ 得 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$；$\lambda=9$ 时，由$(9E-A_1)X=0$ 得 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，

单位化得 $\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，令 $P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，则

$$(AP)^T(AP)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}.$$

31.【解】(1)$A^2-3A=O\Rightarrow |A||3E-A|=0\Rightarrow\lambda=0$ 或 3，

因为 $r(A)=1$，所以 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$.

(2) 设特征值 0 对应的特征向量为$(x_1,x_2,x_3)^T$，则 $x_1+x_2-x_3=0$. 则 0 对应的特征向量为 $\alpha_2=(-1,1,0)^T$，$\alpha_3=(1,0,1)^T$，令

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix},A=P\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

32.【解】因为实对称矩阵不同的特征值对应的特征向量正交，所以有

$\xi_1^T\xi_2=-1+k=0\Rightarrow k=1\Rightarrow\lambda_1=8$ 对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

令 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的另一个特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，由不同特征值对应的特征向量正交，得

$x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

33.【证明】由 $(aE-A)(bE-A)=O$，得 $|aE-A|\cdot|bE-A|=0$，则 $|aE-A|=0$ 或者 $|bE-A|=0$. 又由 $(aE-A)(bE-A)=O$，得 $r(aE-A)+r(bE-A)\leqslant n$.

同时 $r(aE-A)+r(bE-A)\geqslant r[(aE-A)-(bE-A)]=r[(a-b)E]=n$.

所以 $r(aE-A)+r(bE-A)=n$.

(1) 若 $|aE-A|\neq 0$，则 $r(aE-A)=n$，所以 $r(bE-A)=0$，故 $A=bE$.

(2) 若 $|bE-A|\neq 0$，则 $r(bE-A)=n$，所以 $r(aE-A)=0$，故 $A=aE$.

(3) 若 $|aE-A|=0$ 且 $|bE-A|=0$，则 $a,b$ 都是矩阵 $A$ 的特征值.

方程组 $(aE-A)X=0$ 的基础解系含有 $n-r(aE-A)$ 个线性无关的解向量，即特征值 $a$ 对应的线性无关的特征向量个数为 $n-r(aE-A)$ 个；

方程组 $(bE-A)X=0$ 的基础解系含有 $n-r(bE-A)$ 个线性无关的解向量，即特征值 $b$ 对应的线性无关的特征向量个数为 $n-r(bE-A)$ 个.

因为 $n-r(aE-A)+n-r(bE-A)=n$，所以矩阵 $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量，所以 $A$ 一定可以对角化.

34.【证明】令 $\lambda$ 为矩阵 $A$ 的特征值，$X$ 为 $\lambda$ 所对应的特征向量，则 $AX=\lambda X$，显然 $A^2X=\lambda^2X$，因为 $\alpha,\beta$ 正交，所以 $A^2=\alpha\beta^T\cdot\alpha\beta^T=O$，于是 $\lambda^2X=0$，而 $X\neq 0$，故矩阵 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

又由 $\alpha,\beta$ 都是非零向量得 $A\neq O$，

因为 $r(0E-A)=r(A)=1$，所以 $n-r(0E-A)=n-1<n$，所以 $A$ 不可相似对角化.

35. (1)【证明】由 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$.

当 $\lambda=1$ 时，由 $(E-A)X=0$ 得 $\lambda=1$ 对应的线性无关的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=-2$ 时，由 $(-2E-A)X=0$ 得 $\lambda=-2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

因为 $A$ 有三个线性无关的特征向量，所以 $A$ 可以对角化.

(2)【解】令 $P=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&2&1\\-1&-2&0\end{pmatrix}$，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$，

于是 $A^m=P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&(-2)^m\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&(-2)^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&2&1\\-1&-2&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2-(-2)^m&2-2(-2)^m&0\\-1+(-2)^m&-1+2(-2)^m&0\\1-(-2)^m&2-2(-2)^m&1\end{pmatrix}.$$

36.【解】由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$ 得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，

因为 $A$ 有三个线性无关的特征向量，所以 $A$ 可以对角化，所以 $r(E-A)=1$，

由 $E-A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $x+y=0$.

37.【证明】方法一　令 $AX=\lambda X(X\neq 0)$，则有 $A^kX=\lambda^kX$，因为 $A^k=O$，所以 $\lambda^kX=0$，注意到 $X\neq 0$，故 $\lambda^k=0$，从而 $\lambda=0$，即矩阵 $A$ 只有特征值 $0$（$n$ 重）.

因为 $r(0E-A)=r(A)\geqslant 1$，所以方程组 $(0E-A)X=0$ 的基础解系至多含 $n-1$ 个线性无关的解向量，故矩阵 $A$ 不可对角化.

方法二　设矩阵 $A$ 可以对角化，即存在可逆阵 $P$，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}，两边 k 次幂得 P^{-1}A^kP=\begin{pmatrix}\lambda_1^k&&&\\&\lambda_2^k&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^k\end{pmatrix}=O,$$

从而有 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，

于是 $P^{-1}AP=O$，进一步得 $A=O$，与已知矛盾，所以矩阵 $A$ 不可以对角化.

38.【解】令 $P=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{pmatrix}$，$P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$，于是

$$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7&0&-2\\0&5&-2\\-2&-2&6\end{pmatrix}.$$

39.【解】令 $A\alpha=\mu_0\alpha$，即 $\begin{pmatrix}1&-3&3\\6&x&-6\\y&-9&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\mu_0\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，解得 $\mu_0=4,x=10,y=-9$，根据一对逆矩阵的特征值互为倒数的性质知 $\mu=\frac{1}{4}$.

**40.【解】**因为 $A^*$ 的特征向量也是 $A$ 的特征向量，由 $\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 得

$\begin{cases} -a+1+c=-\mu \\ -5-b+3=-\mu \\ c-1-a=\mu \end{cases}$，解得 $\begin{cases} \mu=-1 \\ b=-3 \\ a=c \end{cases}$，

因为 $|A|=-1$，所以 $a=2$，于是 $a=2,b=-3,c=2,\lambda=\dfrac{|A|}{\mu}=1$.

**41.【解】**(1) **方法一** 因为 $A\sim B$，所以 $A,B$ 有相同的特征值，$\lambda_1=\lambda_2=2$，因为 $A$ 相似于对角阵，所以 $r(2E-A)=1$，而 $2E-A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 2-a \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，于是 $a=5$，

再由 $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$ 得 $b=6$.

**方法二** $|\lambda E-A|=(\lambda-2)[\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1)]=f(\lambda)$，

因为 $\lambda=2$ 为 $A$ 的二重特征值，所以 $a=5$，

于是 $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$，故 $b=6$.

(2) 由 $(2E-A)X=0$ 得 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$；

由 $(6E-A)X=0$ 得 $\lambda=6$ 对应的线性无关的特征向量为 $\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=B$.

**42.【解】**(1) 因为 $A\sim B$，所以 $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$，即 $2+a+0=1+(-1)+2$，于是 $a=0$.

(2) 由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$ 得 $A,B$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$.

当 $\lambda=-1$ 时，由 $(-E-A)X=0$ 即 $(E+A)X=0$ 得 $\xi_1=(0,-1,1)^T$；

当 $\lambda=1$ 时，由 $(E-A)X=0$ 得 $\xi_2=(0,1,1)^T$；

当 $\lambda=2$ 时，由 $(2E-A)X=0$ 得 $\xi_3=(1,0,0)^T$，取 $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda=-1$ 时，由 $(-E-B)X=0$ 即 $(E+B)X=0$ 得 $\eta_1=(0,1,2)^T$；

当 $\lambda=1$ 时，由 $(E-B)X=0$ 得 $\eta_2=(1,0,0)^T$；

当 $\lambda=2$ 时，由 $(2E-B)X=0$ 得 $\eta_3=(0,0,1)^T$，取 $P_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\2&0&1\end{pmatrix}$，则

$$P_2^{-1}BP_2=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}.$$

由 $P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$ 得 $(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1})=B$，

取 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&1\\1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=B$.

43.【解】因为 $A\alpha=2\alpha$，所以 $\lambda=2$ 为矩阵 $A$ 的特征值，从而有 $|2E-A|=0$.

由 $|2E-A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\-2&1&-a\\-1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&1&2-a\\-1&1&0\end{vmatrix}=a-2=0$，得 $a=2$.

44.【解】令 $AX=\lambda X(X\neq 0)$，则 $(A^2-A-2E)X=(\lambda^2-\lambda-2)X=0$，

因为 $X\neq 0$，所以 $\lambda^2-\lambda-2=0$，于是 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=2$，

又因为 $|A|=2$，所以 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2$，

$A^*$ 的特征值为 $\frac{|A|}{-1}=-2,\frac{|A|}{-1}=-2,\frac{|A|}{2}=1$，

于是 $A^*+3E$ 的特征值为 1,1,4，故 $|A^*+3E|=4$.

45.【解】$|A|=2$，$A^*$ 的特征值为 $\frac{|A|}{1}=2,\frac{|A|}{1}=2,\frac{|A|}{2}=1$，对应的线性无关的特征向量为

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P^{-1}A^*P=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

由 $P_1=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$ 得

$$P_1^{-1}A^*P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}A^*P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

# 六、二次型

## ◇ 填空题

**1.【解】** 因为 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2-4x_1x_2+4x_2x_3$，所以 $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&4&2\\0&2&0\end{pmatrix}$.

**2.【解】** 令 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3$，

正交规范化的向量组为 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

**3.【解】** 该二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&\dfrac{a}{2}\\0&\dfrac{a}{2}&1\end{pmatrix}$，因为该二次型的秩为 2，所以 $|A|=0$，解得 $a=\pm\sqrt{2}$.

**4.【解】** 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&t\end{pmatrix}$，因为二次型为正定二次型，所以有

$5>0$，$\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=1>0$，$|A|>0$，解得 $t>2$.

## ◇ 选择题

**5.【解】** 因为 $A,B$ 都是可逆矩阵，所以 $A,B$ 等价，即存在可逆矩阵 $P,Q$，使得 $PAQ=B$，选(D).

**6.【解】** $A$ 正定的充分必要条件是 $A$ 的特征值都是正数，(A) 不对；

若 $A$ 为正定矩阵，则 $A$ 一定是满秩矩阵，但 $A$ 是满秩矩阵只能保证 $A$ 的特征值都是非零常数，不能保证都是正数，(B) 不对；

(C) 既不是充分条件又不是必要条件；

显然(D) 既是充分条件又是必要条件，选(D).

**7.【解】**(A) 不对，例如：$f=x_1x_2$，令 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_1+y_2\end{cases}$，则 $f=y_1^2-y_2^2$；若令 $\begin{cases}x_1=y_1-3y_2\\x_2=y_1+3y_2\end{cases}$，

则 $f=y_1^2-9y_2^2$；

(B) 不对，两个二次型标准形相同只能说明两个二次型正、负惯性指数相同，不能得到其对应的矩阵的特征值相同；

(C) 不对，若一个二次型标准形系数没有负数，只能说明其负惯性指数为 0，不能保证其正惯性指数为 $n$；

选(D)，因为二次型的规范形由其正、负惯性指数决定，故其规范形唯一.

*8.*【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同，所以 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$ 规范形相同，但标准形不一定相同，即使是同一个二次型也有多种标准形，选(B).

*9.*【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 合同，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，

从而 $\boldsymbol{\Lambda}=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{\Lambda}$，选(B).

*10.*【解】因为 $\boldsymbol{P}$ 可逆，所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，选(D).

*11.*【解】因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 与同一个实对称矩阵合同，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同. 反之，若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的正、负惯性指数相同，从而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & & \\ & -\boldsymbol{E}_s & \\ & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 合同，选(D).

*12.*【解】由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,3,-5$，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$ 得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $1,1,-1$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同但不相似，选(C).

*13.*【解】因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $-2,1,1$，所以 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=-2$，又因为 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3$，所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价，但 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不一定相似或合同，选(B).

## ◇ 解答题

*14.*【解】令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\-1&1&-5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_2^2-5x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3\\
&=(x_1+x_2-x_3)^2+(x_2+2x_3)^2-10x_3^2,
\end{aligned}
$$

令 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=y_1,\\x_2+2x_3=y_2,\\x_3=y_3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2+3y_3,\\x_2=y_2-2y_3,\\x_3=y_3,\end{cases}$

设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{P}$ 可逆，

且 $f(x_1,x_2,x_3)\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}}{=}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Y}=y_1^2+y_2^2-10y_3^2$.

*15.*【解】(1) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ 为 $\lambda=0$ 的两个线性无关的特征向量，从而 $\lambda=0$ 为至少二重特征值，又由 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=1$ 得 $\lambda_3=1$，

即 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$.

令 $\lambda_3=1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，

因为 $A^T=A$，所以 $\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0,\\ \alpha_2^T\alpha_3=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_1-x_2=0,\end{cases}$

解得 $\lambda_3=1$ 对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

令 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\gamma_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，则所求的正交矩阵为 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

且 $X^TAX\overset{X=QY}{=}y_3^2$.

(2) 由 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 得 $A=Q\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}Q^T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

**16.**【解】(1) 由 $AB+B=O$ 得 $(E+A)B=O$，从而 $r(E+A)+r(B)\leqslant 3$，

因为 $r(B)=2$，所以 $r(E+A)\leqslant 1$，从而 $\lambda=-1$ 为 $A$ 的特征值且不低于 2 重，

显然 $\lambda=-1$ 不可能为三重特征值，则 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=5$.

由 $(E+A)B=O$ 得 $B$ 的列组为 $(E+A)X=O$ 的解，

故 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 对应的线性无关解.

令 $\alpha_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 为 $\lambda_3=5$ 对应的特征向量，

因为 $A^T=A$，所以 $\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0,\\ \alpha_2^T\alpha_3=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1-x_3=0,\\ x_2-x_3=0,\end{cases}$ 解得 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

令 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，　$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$，　$\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得

$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，　$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$，　$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则 $f=X^TAX\overset{X=QY}{=}-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$.

(2) 由 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$ 得 $A=Q\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}Q^T=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$.

17.【解】(1) 令 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&a&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，

矩阵 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=b,\lambda_3=-4$，

由 $\begin{cases}tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\\|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a+2=b+1,\\-15a-40=-20b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=5,\end{cases}$

从而 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$，特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=5,\lambda_3=-4$.

(2) 将 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$，即 $(5E-A)X=0$，

由 $5E-A=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=5$ 对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；

将 $\lambda_3=-4$ 代入 $(\lambda E-A)X=0$，即 $(4E+A)X=0$，

由 $4E+A=\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\lambda_3=-4$ 对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

令 $\beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}$，$\beta_3=\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，

单位化得 $\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\dfrac{1}{3\sqrt5}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}$，$\gamma_3=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，

所求的正交变换矩阵为 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{4}{3\sqrt5}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{2}{3\sqrt5}&\frac{1}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt5}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

18.【解】(1) $A=\begin{pmatrix}a-1&1&0\\1&a-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，因为二次型的秩为 2，所以 $r(A)=2$，从而 $a=2$.

(2)$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,由 $|\lambda E-A|=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$.

当 $\lambda=2$ 时,由 $(2E-A)X=0$ 得 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

当 $\lambda=0$ 时,由 $(0E-A)X=0$ 得 $\lambda=0$ 对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

因为 $\alpha_1,\alpha_2$ 两两正交,单位化得 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$,

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}$,$Q^TAQ=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}$,则 $f=X^TAX\overset{X=QY}{=\!=}Y^T(Q^TAQ)Y=2y_1^2+2y_2^2$.

*19.*【解】(1) 因为 $A^2=A$,所以 $|A||E-A|=0$,即 $A$ 的特征值为 0 或者 1,

因为 $A$ 为实对称矩阵,所以 $A$ 可对角化,由 $r(A)=r$ 得 $A$ 的特征值为 $\lambda=1$($r$ 重),$\lambda=0$($n-r$ 重),则二次型 $X^TAX$ 的标准形为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$.

(2) 令 $B=E+A+A^2+\cdots+A^n$,则 $B$ 的特征值为 $\lambda=n+1$($r$ 重),$\lambda=1$($n-r$ 重),故 $|E+A+A^2+\cdots+A^n|=|B|=(n+1)^r$.

*20.*【解】(1)$f(X)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=X^T\frac{1}{|A|}(A^*)^TX$,

因为 $r(A)=n$,所以 $|A|\neq0$,于是 $\frac{1}{|A|}(A^*)^T=\frac{1}{|A|}A^*=A^{-1}$,显然 $A^*,A^{-1}$ 都是实对称矩阵.

(2) 因为 $A$ 可逆,所以 $A$ 的 $n$ 个特征值都不是零,而 $A$ 与 $A^{-1}$ 合同,故二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $g(X)=X^TAX$ 规范合同.

*21.*(1)【解】因为 $C=\begin{pmatrix}A&B^T\\B&D\end{pmatrix}$ 为正定矩阵,所以 $A^T=A,D^T=D$,

$P^TCP=\begin{pmatrix}E&O\\-BA^{-1}&E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B^T\\B&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&-A^{-1}B^T\\O&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&O\\O&D-BA^{-1}B^T\end{pmatrix}$,

(2)【证明】因为 $C$ 与 $\begin{pmatrix}A&O\\O&D-BA^{-1}B^T\end{pmatrix}$ 合同,且 $C$ 为正定矩阵,所以 $\begin{pmatrix}A&O\\O&D-BA^{-1}B^T\end{pmatrix}$ 为正定矩阵,故 $A$ 与 $D-BA^{-1}B^T$ 都是正定矩阵.

22.【解】二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&t&1\\t&4&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，因为该二次型为正定二次型，所以有$\begin{cases}1>0,\\4-t^2>0,\\4-2t^2>0,\end{cases}$解得$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

23.【证明】方法一

因为$A$是正定矩阵，所以存在正交阵$Q$，使得$Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$，

其中$\lambda_1>0,\lambda_2>0,\cdots,\lambda_n>0$，因此$Q^T(A+E)Q=\begin{pmatrix}\lambda_1+1&&&\\&\lambda_2+1&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n+1\end{pmatrix}$，

于是$|Q^T(A+E)Q|=|A+E|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$.

方法二　因为$A$是正定矩阵，所以$A$的特征值$\lambda_1>0,\lambda_2>0,\cdots,\lambda_n>0$，因此$A+E$的特征值为$\lambda_1+1>1,\lambda_2+1>1,\cdots,\lambda_n+1>1$，故$|A+E|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1$.

24.【解】(1)$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-2x_2x_3+x_3^2$

$$=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2,$$

由$f(x_1,x_2,x_3)=0$得

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_3=0,\end{cases}\text{解得 } X=k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}(k\text{ 为任意常数}).$$

(2)$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\-1&\lambda-2&1\\0&1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-4\lambda+3)=0$得矩阵$A$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=0$，故规范形为$y_1^2+y_2^2$.

25.【解】(1) 显然$A$的特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$，

$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$为矩阵$A$的属于特征值$\lambda_1=0$的线性无关的特征向量.

令$\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$为矩阵$A$的特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$的特征向量，

因为$A^T=A$，所以$\alpha_1^T\alpha=0$，即$-x_1+x_2=0$，

$A$的属于$\lambda_2=\lambda_3=1$的线性无关的特征向量为$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交,规范化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

故 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(2) 由 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

# 概率统计部分

## 一、随机事件与概率

### ◇ 填空题

1.【解】因为 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，所以 $P(A+B)=P(A-B)+P(B)=0.8$.

2.【解】因为 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，所以 $P(AB)=0.2$，
于是 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.5-0.2=0.3$，
$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6+0.5-0.2=0.9$.

3.【解】$P(A+\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$，因为 $A,B$ 相互独立，所以 $A,\overline{B}$ 相互独立，故
$P(A+\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A)P(\overline{B})$，即
$0.7=0.3+P(\overline{B})-0.3P(\overline{B})$，解得 $P(\overline{B})=\frac{4}{7}$，从而 $P(B)=\frac{3}{7}$.

4.【解】由 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$ 及 $P(A)=0.7$，得 $P(AB)=0.4$，
则 $P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6$.

5.【解】因为 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)$，
所以 $P(AB)=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$，
从而 $P(B)=1-P(A)=0.6$.

6.【解】由 $AA=A, A\overline{A}=\varnothing$，得

$$(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=(\overline{A}B+AB+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})$$
$$=B(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=\overline{A}B(A+\overline{B})=\varnothing,$$

则 $P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}=0$.

7.【解】$A,B,C$ 都不发生的概率为 $P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C})=P(\overline{A+B+C})=1-P(A+B+C)$，
而 $ABC\subset AB$ 且 $P(AB)=0$，所以 $P(ABC)=0$，于是

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{1}{2},$$

故 $A,B,C$ 都不发生的概率为 $\frac{1}{2}$.

8.【解】由 $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$
且 $ABC=\varnothing, P(A)=P(B)=P(C)$，得

$3P(A)-3P^2(A)=\frac{9}{16}$，解得 $P(A)=\frac{1}{4}$ 或者 $P(A)=\frac{3}{4}$，

因为 $A \subset A+B+C$，所以 $P(A) \leqslant P(A+B+C)=\frac{9}{16}$，故 $P(A)=\frac{1}{4}$.

*9*.【解】设 $A=\{$抽取 3 个产品，其中至少有一个是一等品$\}$，

则 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_4^3}{C_{16}^3}=\frac{139}{140}$.

*10*.【解】设 $A_1=\{$第一次取红球$\}$，　$A_2=\{$第一次取白球$\}$，　$B=\{$第二次取红球$\}$，

$P(A_1)=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$，$P(A_2)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$，$P(B \mid A_1)=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$，$P(B \mid A_2)=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$，

则 $P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)=P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{3}{8}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{12}=\frac{2}{5}.$$

*11*.【解】$n$ 阶行列式有 $n!$ 项，不含 $a_{11}$ 的项有 $(n-1)(n-1)!$ 个，

则 $\frac{(n-1)(n-1)!}{n!}=\frac{n-1}{n}=\frac{8}{9}$，则 $n=9$.

*12*.【解】令 $B=\{A$ 至少发生一次$\}$，则 $P(B)=1-C_n^0p^0(1-p)^n=1-(1-p)^n$，

令 $C=\{A$ 至多发生一次$\}$，

则 $P(C)=C_n^0p^0(1-p)^n+C_n^1p(1-p)^{n-1}=(1-p)^{n-1}[1+(n-1)p]$.

## ◇ 选择题

*13*.【解】选(D)，因为 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

*14*.【解】$\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$ 表示四个温控器温度都不低于临界温度 $t_0$，而 $E$ 发生只要两个温控器温度不低于临界温度 $t_0$，所以 $E=\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$，选(C).

*15*.【解】因为 $A,B$ 不相容，所以 $P(AB)=0$，又 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，

所以 $P(A-B)=P(A)$，选(D).

*16*.【解】由 $P(B \mid A)=P(B \mid \overline{A})$，得 $\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}$，

再由 $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$ 得 $\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，

整理得 $P(AB)=P(A)P(B)$，正确答案为(C).

*17*.【解】由 $P(A \mid B)+P(\overline{A} \mid \overline{B})=1$，得 $P(\overline{A} \mid \overline{B})=1-P(A \mid B)=P(\overline{A} \mid B)$，则事件 $A$，$B$ 是独立的，正确答案为(B).

*18*.【解】因为 $A,B,C$ 相互独立，所以它们的对立事件也相互独立，故 $\overline{A+B}$ 与 $C$ 相互独立，$\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$ 也相互独立，由

$P(\overline{AB}\,\overline{C})=P(\overline{AB+C})=1-P(AB+C)$

$=1-P(AB)-P(C)+P(ABC)=1-P(A)P(B)-P(C)+P(A)P(B)P(C)$，

$P(\overline{AB})P(\overline{C})=[1-P(AB)][1-P(C)]=1-P(AB)-P(C)+P(ABC)$，得

$P(\overline{AB}\,\overline{C})=P(\overline{AB})P(\overline{C})$，即 $\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$ 相互独立，选(B).

## ◇ 解答题

*19*.【解】(1) 令 $A=\{$抽取的两个球中一个是红球一个是白球$\}$，则 $P(A)=\frac{C_4^1C_8^1}{C_{12}^2}=\frac{16}{33}$.

(2) 令 $B=\{$抽取的两个球颜色相同$\}$,则 $P(B)=\dfrac{C_4^2}{C_{12}^2}+\dfrac{C_8^2}{C_{12}^2}=\dfrac{17}{33}$.

**20.【解】**(1) 设 $A_1=\{$一次性抽取 4 个球,其中 2 个红球 2 个白球$\}$,则 $P(A_1)=\dfrac{C_5^2C_5^2}{C_{10}^4}=\dfrac{10}{21}$.

(2) 设 $A_2=\{$逐个抽取 4 个球,取后不放回,其中 2 个红球 2 个白球$\}$,则

$$P(A_2)=\frac{C_4^2A_5^2A_5^2}{A_{10}^4}=\frac{10}{21}.$$

(3) 设 $A_3=\{$逐个抽取 4 个球,取后放回,其中 2 个红球 2 个白球$\}$,则

$$P(A_3)=\frac{C_4^2\times 5^2\times 5^2}{10^4}=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}=\frac{3}{8}.$$

**21.【解】**(1) 令 $A_i=\{$第 $i$ 次取到正品$\}(i=1,2)$,则

$P(A_1\overline{A}_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2\mid A_1)=\dfrac{6}{10}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{15}$.

(2)$P(\overline{A}_2\mid A_1)=\dfrac{4}{9}$.

(3)$P(A_2)=P(A_1A_2+\overline{A}_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)$

$$=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{3}{5}.$$

**22.【解】**设 $A_i=\{$第 $i$ 次取到次品$\}(i=1,2,3)$.

(1)$P(A_3)=\dfrac{C_3^1\times 9!}{10!}=\dfrac{3}{10}$;

(2)$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{6}{9}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{7}{40}$(试验还没有开始,计算前两次都取不到次品,且第三次取到次品的概率).

(3)$P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=\dfrac{3}{8}$(已知前两次已发生的结果,唯一不确定的就是第三次).

(4)$P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$,

$P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(\overline{A}_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=\dfrac{7}{24}$,

$P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=\dfrac{17}{24}$.

**23.【解】**令 $A_1=\{$第一次抽取正品$\}$,$A_2=\{$第一次抽取次品$\}$,$B=\{$第二次抽取次品$\}$,

$P(A_1)=\dfrac{10}{12}$, $P(A_2)=\dfrac{2}{12}$, $P(B\mid A_1)=\dfrac{2}{11}$, $P(B\mid A_2)=\dfrac{1}{11}$,

由全概率公式得 $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)=\dfrac{10}{12}\times\dfrac{2}{11}+\dfrac{2}{12}\times\dfrac{1}{11}=\dfrac{1}{6}$

**注解** 不放回抽取的情况下,第一次抽取的结果未知时,第二次抽取某种产品的概率与第一次抽取的概率相同.

**24.【解】**令 $A_1=\{$抽取到甲厂产品$\}$,$A_2=\{$抽取到乙厂产品$\}$,$A_3=\{$抽取到丙厂产品$\}$,$B=\{$抽取到次品$\}$,$P(A_1)=0.6$,$P(A_2)=0.25$,$P(A_3)=0.15$,

$P(B \mid A_1)=0.03,\quad P(B \mid A_2)=0.05,\quad P(B \mid A_3)=0.08,$

由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B \mid A_i)=0.6\times 0.03+0.25\times 0.05+0.15\times 0.08=4.25\%.$$

25.【解】设 $A_i=\{$取到的是第 $i$ 只箱子$\}(i=1,2,3)$，　$B=\{$取到白球$\}$.

(1) $P(B)=P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)+P(A_3)P(B \mid A_3)$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{7}+\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)=\frac{29}{56}.$$

(2) $P(A_2 \mid \overline{B})=\dfrac{P(A_2)P(\overline{B} \mid A_2)}{P(\overline{B})}=\dfrac{28}{81}.$

# 二、随机变量及其分布

## ◆ 填空题

1.【解】由 $c-c^2+c+\dfrac{1}{4}=1$ 得 $c=\dfrac{1}{2}$.

2.【解】因为方程 $x^2+4x+X=0$ 无实根，所以 $16-4X<0$，即 $X>4$.

由 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 且 $P(X>4)=\dfrac{1}{2}$，得 $\mu=4$.

3.【解】由 $P(X\geqslant 1)=\dfrac{5}{9}=1-P(X=0)=1-(1-p)^2$，得 $p=\dfrac{1}{3}$，

$P(Y\geqslant 1)=1-(1-p)^3=1-\dfrac{8}{27}=\dfrac{19}{27}$.

4.【解】由 $P(2\leqslant X\leqslant 4)=P\left(\dfrac{2-2}{\sigma}\leqslant\dfrac{X-2}{\sigma}\leqslant\dfrac{4-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)-\dfrac{1}{2}=0.4$，得

$\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)=0.9$，则 $P(X<0)=P\left(\dfrac{X-2}{\sigma}<-\dfrac{2}{\sigma}\right)=\Phi\left(-\dfrac{2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)=0.1$.

5.【解】$X$ 的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,2,\cdots)$，

由 $P(X=0)=\dfrac{1}{2}P(X=1)$ 得 $\lambda=2$，

则 $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-e^{-2}$.

6.【解】由随机变量 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，得 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$，$D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$，

于是 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\dfrac{2}{\lambda^2}$，

而 $E[(X-1)(X+2)]=E(X^2)+E(X)-2=\dfrac{2}{\lambda^2}+\dfrac{1}{\lambda}-2=8$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

7.【解】$P\{X>1\}=\displaystyle\int_1^a f(x)\mathrm{d}x=\int_1^a\frac{3x^2}{a^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{a^3}(a^3-1)=\frac{7}{8}$，则 $a=2$.

8.【解】令 $A_k=\{$第 $k$ 个零件不合格$\}(k=1,2,3)$，

则 $P(X=2)=P(\overline{A_1}A_2A_3)+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(A_1A_2\overline{A_3})$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

9.【解】$Y$ 的可能取值为 2,3,6，

$P(Y=2)=P(X=0)=\frac{1}{2}$，　$P(Y=3)=P(X=-1)=\frac{1}{4}$，

$P(Y=6)=P(X=-2)+P(X=2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$，

则 $Y$ 的分布律为 $Y\sim\begin{pmatrix}2&3&6\\\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

10.【解】$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(9X^2\leqslant y)$.

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(9X^2\leqslant y)=P\left(-\frac{\sqrt{y}}{3}\leqslant X\leqslant\frac{\sqrt{y}}{3}\right)$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{y}}{3}}^{\frac{\sqrt{y}}{3}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\sqrt{y}}{3}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

$F'_Y(y)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{18}}$.

所以随机变量 $Y$ 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{18}}, & y>0.\end{cases}$

11.【解】因为 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P\left(X\leqslant\frac{y}{2}\right)=F_X\left(\frac{y}{2}\right)$，

所以 $f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=f_X\left(\frac{y}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi(4+y^2)}$.

12.【解】$X$ 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}0&1&3\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$Y$ 的可能取值为 1,2,10，

$P(Y=1)=P(X=0)=\frac{1}{4}$，$P(Y=2)=P(X=1)=\frac{1}{4}$，$P(Y=10)=P(X=3)=\frac{1}{2}$，

于是 $Y$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ 0.25, & 1\leqslant y<2,\\ 0.5, & 2\leqslant y<10,\\ 1, & y\geqslant 10.\end{cases}$$

## ◇ 选择题

13.【解】可积函数 $f(x)$ 为随机变量的密度函数，则 $f(x)\geqslant 0$ 且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，显然(A)不

对，取两个服从均匀分布的连续型随机变量的密度函数验证，(B) 显然不对，又函数 $F(x)$ 为分布函数必须满足：(1)$0\leqslant F(x)\leqslant 1$；(2)$F(x)$ 单调不减；(3)$F(x)$ 右连续；(4)$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，显然选择(D).

**14.【解】**$F_X(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，

$F_{-X}(x)=P(-X\leqslant x)=P(X\geqslant -x)=1-P(X\leqslant -x)=1-\int_{-\infty}^{-x}f(t)\mathrm{d}t$，

因为 $X$ 与 $-X$ 有相同的分布函数，所以$\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=1-\int_{-\infty}^{-x}f(t)\mathrm{d}t$，

两边求导数，得 $f(x)=f(-x)$，正确答案为(C).

**15.【解】**因为$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，所以$\int_{a}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$，解得 $A=\mathrm{e}^{a}$.

由 $P(a<X<a+b)=\int_{a}^{a+b}f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{a+b}\mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{-x}\Big|_{a}^{a+b}=1-\mathrm{e}^{-b}$，

得 $P(a<X<a+b)$ 与 $a$ 无关，且随 $b$ 的增加而增加，正确答案为(C).

**16.【解】**因为 $P(|X-\mu|<2\sigma)=P(-2\sigma<X-\mu<2\sigma)=P\left(-2<\frac{X-\mu}{\sigma}<2\right)$

$=\Phi(2)-\Phi(-2)$ 为常数，所以应选(A).

**17.【解】**由 $p=P(X\leqslant \mu-4)=P(X-\mu\leqslant -4)=P\left(\frac{X-\mu}{4}\leqslant -1\right)=\Phi(-1)=1-\Phi(1)$，

$q=P(Y\geqslant \mu+5)=P(Y-\mu\geqslant 5)=P\left(\frac{Y-\mu}{5}\geqslant 1\right)=1-P\left(\frac{Y-\mu}{5}<1\right)=1-\Phi(1)$，

得 $p=q$，选(C).

**18.【解】**因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $F(a+\mu)+F(\mu-a)=\Phi\left(\frac{\mu+a-\mu}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\mu-a-\mu}{\sigma}\right)$

$=\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)+\Phi\left(-\frac{a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)+1-\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)=1$，选(B).

**19.【解】**$X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6},1<x<7,\\0,\text{其他},\end{cases}$ 方程 $x^2+2Xx+9=0$ 有实根的充要条件为

$\Delta=4X^2-36\geqslant 0\Leftrightarrow X^2\geqslant 9$. $P(X^2\geqslant 9)=1-P(X^2<9)=1-P(1<X<3)=\frac{2}{3}$.

## ◇ 解答题

**20.【解】**$X_i=\begin{cases}1,\text{第 } i \text{ 个路口是红灯},\\0,\text{第 } i \text{ 个路口是绿灯}\end{cases}(i=1,2,3)$，则 $X$ 的可能取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=P(X_1=1)=\frac{1}{2}$，

$P(X=1)=P(X_1=0,X_2=1)=\frac{1}{4}$，

$P(X=2)=P(X_1=0,X_2=0,X_3=1)=\frac{1}{8}$，

$P(X=3)=P(X_1=0,X_2=0,X_3=0)=\frac{1}{8}$.

所以 $X$ 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$.

*21*.【解】$X$ 的可能取值为 1,2,3,

$P(X=1)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$, $P(X=2)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$, $P(X=3)=\frac{C_2^0C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$,

所以 $X$ 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{3}{10} & \frac{6}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}$,分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \frac{3}{10}, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{9}{10}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$

*22*.【解】(1)$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$.

当 $x<-1$ 时,$F(x)=0$;

当 $-1\leqslant x<0$ 时,$F(x)=\int_{-1}^{x}(1+t)\mathrm{d}t=\frac{(x+1)^2}{2}$;

当 $0\leqslant x<1$ 时,$F(x)=\int_{-1}^{0}(1+t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}$;

当 $x\geqslant 1$ 时,$F(x)=1$.

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}0, & x<-1.\\ \frac{(x+1)^2}{2}, & -1\leqslant x<0.\\ \frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1.\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

(2)$P\left(-2<X<\frac{1}{4}\right)=F\left(\frac{1}{4}-0\right)-F(-2)=\frac{23}{32}$.

*23*.【解】显然 $k<6$,当 $3<k<6$ 时,$P(X\geqslant k)=\int_{k}^{6}\frac{2}{9}\mathrm{d}x=\frac{2(6-k)}{9}<\frac{2}{3}$;

当 $1\leqslant k\leqslant 3$ 时,$P(X\geqslant k)=\int_{3}^{6}\frac{2}{9}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$;

当 $0\leqslant k<1$ 时,$P(X\geqslant k)=\int_{k}^{1}\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_{3}^{6}\frac{2}{9}\mathrm{d}x=\frac{1-k}{3}+\frac{2}{3}>\frac{2}{3}$;

当 $k<0$ 时,$P(X\geqslant k)=1$,所以 $1\leqslant k\leqslant 3$.

*24*.【解】(1) 令 $A_k=\{$所取的为第 $k$ 个盒子$\}(k=1,2,3)$,$P(A_k)=\frac{1}{3}(k=1,2,3)$,

$X$ 的可能取值为 0,1,2,3,$P(X=0)=P(X=0\mid A_3)P(A_3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$,

$P(X=1)=P(X=1\mid A_2)P(A_2)+P(X=1\mid A_3)P(A_3)$

$$=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}\times\frac{1}{3}+\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}\times\frac{1}{3}=\frac{9}{30},$$

$$P(X=2)=P(X=2\mid A_1)P(A_1)+P(X=2\mid A_2)P(A_2)+P(X=2\mid A_3)P(A_3)$$

$$=\frac{C_4^2C_1^1}{C_5^3}\times\frac{1}{3}+\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}\times\frac{1}{3}+\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}\times\frac{1}{3}=\frac{15}{30},$$

$$P(X=3)=P(X=3\mid A_1)P(A_1)+P(X=3\mid A_2)P(A_2)=\frac{C_4^3}{C_5^3}\times\frac{1}{3}+\frac{C_3^3}{C_5^3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{30},$$

所以 $X$ 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}0&1&2&3\\ \frac{1}{30}&\frac{9}{30}&\frac{15}{30}&\frac{5}{30}\end{pmatrix}$.

(2) $P\{X\geqslant 2\}=\frac{15}{30}+\frac{5}{30}=\frac{2}{3}$.

**25.【解】**(1) 因为连续型随机变量的分布函数是连续的，

所以有 $\begin{cases}A=B.\\ B=1-A,\end{cases}$ 解得 $A=B=\frac{1}{2}$.

(2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}e^{-(x-1)}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(3) $P\left(X>\frac{1}{3}\right)=1-P\left(X\leqslant\frac{1}{3}\right)=1-F\left(\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

**26.【解】**(1) 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，所以 $1=A\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=2A$，解得 $A=\frac{1}{2}$.

(2) $P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(3) $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，

当 $x<-\frac{\pi}{2}$ 时，$F(x)=0$；

当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时，$F(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{2}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1+\sin x)$；

当 $x\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$F(x)=1$，于是 $X$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}(1+\sin x), & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ 1, & x\geqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

**27.【解】**$F(a)+F(-a)=\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{-a-\mu}{\sigma}\right)$，

$$\frac{a-\mu}{\sigma}+\frac{-a-\mu}{\sigma}=-\frac{2\mu}{\sigma},$$

则当 $\mu>0$ 时，$F(a)+F(-a)<1$；

当 $\mu=0$ 时，$F(a)+F(-a)=1$；

当 $\mu<0$ 时，$F(a)+F(-a)>1$.

**28.【解】**$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)$.

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$.

因此 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0.\end{cases}$

**29.【解】**$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)$.

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{y}}f_X(x)\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\frac{\sqrt{y}}{2}, & 0<y<4,\\ 1, & y\geqslant 4,\end{cases}$$

所以 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{\sqrt{y}}{2}, & 0<y<4,\\ 1, & y\geqslant 4,\end{cases}\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

**30.【解】**$X$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\text{则 } Y=F(X)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2X}, & X\geqslant 0,\\ 0, & X<0.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\},$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\geqslant 1$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，$F_Y(y)=P\{1-\mathrm{e}^{-2X}\leqslant y\}=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right\}$

$$=F\left[-\frac{1}{2}\ln(1-y)\right]=y,$$

即 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$ 故 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 即 $Y\sim U(0,1)$.

# 三、多维随机变量及其分布

## ◇ 填空题

**1.【解】**$P(X+Y=2)=P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=0)$，

由 $X,Y$ 相互独立得

$$P(X+Y=2)=P(X=0)P(Y=2)+P(X=1)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=0)$$
$$=\frac{1^0}{0!}e^{-1}\times\frac{2^2}{2!}e^{-2}+\frac{1^1}{1!}e^{-1}\times\frac{2^1}{1!}e^{-2}+\frac{1^2}{2!}e^{-1}\times\frac{2^0}{0!}e^{-2}=\frac{9}{2}e^{-3}.$$

**2.【解】**令 $A=(X=0),B=(Y=0)$，则

$$P\{\min(X,Y)=0\}=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=P(X=0)+P(Y=0)-P(X=0,Y=0)=2(1-p)^n-(1-p)^{2n}.$$

**3.【解】**由 $1=a\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx\int_0^{+\infty}e^{-3y}dy$，得 $a=6$，于是 $f(x,y)=\begin{cases}6e^{-2x-3y}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$P\{X>Y\}=\int_0^{+\infty}dx\int_0^x 6e^{-2x-3y}dy=2\int_0^{+\infty}e^{-2x}(1-e^{-3x})dx=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}.$$

**4.【解】**令 $\{X\leqslant 1\}=A,\{Y\leqslant -2\}=B,P(A)=\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right),P(B)=\Phi\left(\frac{-2}{2\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$，

且 $P(AB)=\frac{1}{4}$，则

$$P(X>1,Y>-2)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)=1-\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)-1+\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

## ◇ 选择题

**5.【解】**由题意得

$$P(X_1=-1,X_2=-1)=P(X_1=-1,X_2=1)$$
$$=P(X_1=1,X_2=-1)=P(X_1=1,X_2=1)=0,$$

$$P(X_1=-1,X_2=0)=P(X_1=-1)=\frac{1}{4},\quad P(X_1=1,X_2=0)=P(X_1=1)=\frac{1}{4},$$

$$P(X_1=0,X_2=-1)=P(X_2=-1)=\frac{1}{4},\quad P(X_1=0,X_2=1)=P(X_2=1)=\frac{1}{4},$$

故 $P(X_1=0,X_2=0)=0$，于是

$P(X_1=X_2)=P(X_1=-1,X_2=-1)+P(X_1=0,X_2=0)+P(X_1=1,X_2=1)=0$，

选(A).

**6.【解】**由 $X\sim U(0,2),Y\sim E(1)$ 得

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

再由 $X,Y$ 相互独立得 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y}, & 0<x<2, y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

则 $P(X+Y>1)=1-P(X+Y\leqslant 1)=1-\iint\limits_{x+y\leqslant 1}\dfrac{1}{2}e^{-y}dxdy$

$$=1-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}e^{-y}dy=1-\frac{1}{2}\int_0^1(1-e^{x-1})dx$$

$$=1-\frac{1}{2}(1-1+e^{-1})=1-\frac{1}{2e},选(A).$$

7.【解】$P(-X<a,Y<y)=P(X>-a,Y<y)$,

因为 $P(Y<y)=P(X>-a,Y<y)+P(X\leqslant -a,Y<y)$,

所以 $P(X>-a,Y<y)=P(Y<y)-P(X\leqslant -a,Y<y)$

$$=F(+\infty,y-0)-F(-a,y-0),选(C).$$

8.【解】$X,Y$ 独立,$X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(1,1)$,$X+Y\sim N(1,2)\Rightarrow P(X+Y\leqslant 1)=\dfrac{1}{2}$,所以选(B).

9.【解】因为 $X,Y$ 相互独立且都服从 $N(0,4)$ 分布,

所以 $X\pm Y\sim N(0,8)$,从而 $P(X+Y\geqslant 0)=\dfrac{1}{2}$,$P(X-Y\geqslant 0)=\dfrac{1}{2}$,故(C)、(D)都不对;

$P\{\max(X,Y)>0\}=1-P\{\max(X,Y)\leqslant 0\}=1-P(X\leqslant 0,Y\leqslant 0)$

$$=1-P(X\leqslant 0)P(Y\leqslant 0)$$

因为 $X\sim N(0,4)$,$Y\sim N(0,4)$,所以 $P(X\leqslant 0)=P(Y\leqslant 0)=\dfrac{1}{2}$,从而有

$P\{\max(X,Y)>0\}=\dfrac{3}{4}$,(A)不对;

$P\{\min(X,Y)\geqslant 0\}=P(X\geqslant 0,Y\geqslant 0)=P(X\geqslant 0)P(Y\geqslant 0)=\dfrac{1}{4}$,选(B).

10.【解】令 $A=\{X\leqslant 1\}$,$B=\{Y\leqslant 1\}$,则 $P(AB)=\dfrac{4}{9}$,$P(A)=P(B)=\dfrac{5}{9}$,

$P\{\min(X,Y)\leqslant 1\}=1-P\{\min(X,Y)>1\}=1-P(X>1,Y>1)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})$

$$=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2}{3},选(C).$$

11.【解】因为 $(X,Y)$ 在区域 $D:x^2+y^2\leqslant 9a^2$ 上服从均匀分布,

所以 $(X,Y)$ 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{9\pi a^2}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$,

$p=P\{X^2+9Y^2\leqslant 9a^2\}=\iint\limits_{x^2+9y^2\leqslant 9a^2}f(x,y)dxdy=\dfrac{1}{3}$,选(B).

12.【解】因为 $(X,Y)$ 服从二维正态分布,所以(B),(C),(D)都是正确的,只有当 $\rho=0$ 时,$X$,$Y$ 才相互独立,所以选(A).

## ◇ 解答题

**13.【解】**(1) 因为 $P(XY=0)=1$,所以 $P(X=-1,Y=1)=P(X=1,Y=1)=0$,

$P(X=-1,Y=0)=P(X=-1)=\frac{1}{4}$, $P(X=1,Y=0)=P(X=1)=\frac{1}{4}$,

$P(X=0,Y=0)=0$, $P(X=0,Y=1)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$.

$(X,Y)$ 的联合分布律为:

| X \ Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $-1$ | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 |

(2) 因为 $P(X=0,Y=0)=0\neq P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{4}$,所以 $X,Y$ 不相互独立.

**14.【解】**(1) 设 $A=\{$发车时有 $n$ 个乘客$\}$,$B=\{$中途有 $m$ 个人下车$\}$,则

$$P(B\mid A)=P(Y=m\mid X=n)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\quad(0\leqslant m\leqslant n).$$

(2)$P(X=n,Y=m)=P(AB)=P(B\mid A)P(A)$

$$=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\quad(0\leqslant m\leqslant n,n=0,1,2,\cdots).$$

**15.【解】**(1)$(X,Y)$ 的可能取值为$(0,0)$,$(1,0)$,$(0,1)$,$(1,1)$.

$P(X=0,Y=0)=\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{4}{25}$, $P(X=0,Y=1)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{6}{25}$,

$P(X=1,Y=0)=\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{6}{25}$, $P(X=1,Y=1)=\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{9}{25}$.

| X \ Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{4}{25}$ | $\frac{6}{25}$ |
| 1 | $\frac{6}{25}$ | $\frac{9}{25}$ |

(2) $P(X=0,Y=0)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$, $P(X=0,Y=1)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{4}{15}$,

$P(X=1,Y=0)=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{15}$, $P(X=1,Y=1)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$.

| X \ Y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{2}{15}$ | $\frac{4}{15}$ |
| 1 | $\frac{4}{15}$ | $\frac{1}{3}$ |

16.【解】(1) $(X,Y)$ 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}1,(x,y)\in D,\\0,(x,y)\notin D,\end{cases}$

则 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-x}^{x}\mathrm{d}y=2x,0<x<1,\\0, \quad 其他.\end{cases}$

(2) 因为 $E(X)=\int_0^1 x\times 2x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$，$E(X^2)=\int_0^1 x^2\times 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，

所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{18}$，$D(Z)=D(2X+1)=4D(X)=\frac{2}{9}$.

17.【解】(1) 当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{2x}\mathrm{d}y=2x$，

当 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$ 时，$f_X(x)=0$，所以 $f_X(x)=\begin{cases}2x,0<x<1,\\0, 其他.\end{cases}$

同理 $f_Y(y)=\begin{cases}1-\frac{y}{2},0<y<2,\\0, \quad 其他.\end{cases}$

(2) 当 $z\leqslant 0$ 时，$F(z)=0$；当 $z\geqslant 2$ 时，$F(z)=1$；当 $0<z<2$ 时，

$$P(Z>z)=\iint_{2x-y>z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{z}{2}}^1\mathrm{d}x\int_0^{2x-z}\mathrm{d}y=1-z+\frac{z^2}{4},$$

$F(z)=1-P(Z>z)=z-\frac{z^2}{4}$，

所以 $f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2},0<z<2,\\0, \quad 其他.\end{cases}$

18.【解】(1) 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}A(1-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{3}A$，得 $A=\frac{3}{\pi}$.

(2) 令区域 $D:x^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}$，则 $(X,Y)$ 落在区域 $D$ 内的概率为

$$p=\iint_D\frac{3}{\pi}(1-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

19.【解】用 $X,Y$ 分别表示两台记录仪先后开动无故障工作的时间，则 $T=X+Y$，

由已知条件得 $X,Y$ 的密度为 $f_X(x)=\begin{cases}5\mathrm{e}^{-5x},x>0,\\0, \quad x\leqslant 0,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}5\mathrm{e}^{-5y},y>0,\\0, \quad y\leqslant 0.\end{cases}$

当 $t\leqslant 0$ 时，$F_T(t)=0$；当 $t>0$ 时，

$$F_T(t)=P(X+Y\leqslant t)=\iint\limits_{x+y\leqslant t} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{x+y\leqslant t} f_X(x)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=25\int_0^t \mathrm{e}^{-5x}\mathrm{d}x\int_0^{t-x}\mathrm{e}^{-5y}\mathrm{d}y=5\int_0^t \mathrm{e}^{-5x}[1-\mathrm{e}^{-5(t-x)}]\mathrm{d}x$$

$$=5\int_0^t(\mathrm{e}^{-5x}-\mathrm{e}^{-5t})\mathrm{d}x=(1-\mathrm{e}^{-5t})-5t\mathrm{e}^{-5t},$$

$T$ 的密度函数为 $f(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ 25t\mathrm{e}^{-5t}, & t>0.\end{cases}$

**20.【解】**因为 $X,Y$ 相互独立且都服从正态分布，所以 $X,Y$ 的线性组合仍服从正态分布，即 $Z=2X-Y+3$ 服从正态分布，由

$$E(Z)=2E(X)-E(Y)+3=5,\quad D(Z)=4D(X)+D(Y)=9,$$

则 $Z$ 的密度函数为 $f_Z(z)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$.

**21.【解】**(1) 因为 $X$ 在区间$[-2,2]$上服从均匀分布，所以 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & -2\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$(Y,Z)$ 的可能取值为$(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)$.

$P(Y=-1,Z=-1)=P(X\leqslant -1,X\leqslant 1)=P(X\leqslant -1)=\int_{-2}^{-1}\dfrac{1}{4}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$;

$P(Y=-1,Z=1)=P(X\leqslant -1,X>1)=0$;

$P(Y=1,Z=-1)=P(X>-1,X\leqslant 1)=P(-1<X\leqslant 1)=\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{4}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$;

$P(Y=1,Z=1)=P(X>-1,X>1)=P(X>1)=\int_{1}^{2}\dfrac{1}{4}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$,

$(Y,Z)$ 的联合分布律为

| $Y$ \ $Z$ | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $-1$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ |
| $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

(2) 由 $Y+Z\sim\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，得

$E(Y+Z)=-2\times\dfrac{1}{4}+0\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{4}=0$,

$E(Y+Z)^2=(-2)^2\times\dfrac{1}{4}+0^2\times\dfrac{1}{2}+2^2\times\dfrac{1}{4}=2$,

则 $D(Y+Z)=2$.

**22.【解】**因为 $P(Y=1)=0.6$,

所以 $P(X=0\mid Y=1)=\dfrac{P(X=0,Y=1)}{P(Y=1)}=\dfrac{0.3}{0.6}=\dfrac{1}{2}$,

$P(X=1\mid Y=1)=\dfrac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}=\dfrac{0.3}{0.6}=\dfrac{1}{2}.$

**23.【解】**(1)$1=c\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(y+1)}\mathrm{d}y=c\Rightarrow c=1.$

(2) 当 $x\leqslant 0$ 时,$f_X(x)=0$;当 $x>0$ 时,$f_X(x)=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(y+1)}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}.$

当 $y\leqslant 0$ 时,$f_Y(y)=0$;当 $y>0$ 时,$f_Y(y)=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x(y+1)}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{(y+1)^2}.$

显然当 $x>0,y>0$ 时,$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,所以 $X,Y$ 不相互独立.

(3) 当 $z\leqslant 0$ 时,$F_Z(z)=0$;

当 $z>0$ 时,$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(\max\{X,Y\}\leqslant z)=P(X\leqslant z,Y\leqslant z)$

$$=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^z x\mathrm{e}^{-x(y+1)}\mathrm{d}y=1-\mathrm{e}^{-z}+\frac{\mathrm{e}^{-z(z+1)}-1}{z+1},$$

则 $f_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}+\dfrac{1-\mathrm{e}^{-z(z+1)}}{(z+1)^2}-\dfrac{2z+1}{z+1}\mathrm{e}^{-z(z+1)}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$

**24.【解】**(1)$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}3x^2, 0<x<1,\\ 0,\ 其他,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}(1-y^2), 0<y<1,\\ 0,\qquad 其他.\end{cases}$

(2)$P\left(Y<\dfrac{1}{8}\,\middle|\,X=\dfrac{1}{4}\right)=\int_0^{\frac{1}{8}}\dfrac{f\left(\frac{1}{4},y\right)}{f_X\left(\frac{1}{4}\right)}\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{8}}\dfrac{\frac{3}{4}}{3\left(\frac{1}{4}\right)^2}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}.$

**25.【解】**(1) 由$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=a\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=a\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$,得 $a=1.$

(2) 当 $x\leqslant 0$ 时,$f_X(x)=0$;

当 $x>0$ 时,$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_x^{+\infty}x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=x\mathrm{e}^{-x}.$

于是 $f_X(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

当 $y\leqslant 0$ 时,$f_Y(y)=0$;当 $y>0$ 时,$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^y x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}.$

于是 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,所以 $X,Y$ 不独立.

(3)$f_{X|Y}(x\mid y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{y^2}, 0<x<y,\\ 0,\ 其他.\end{cases}$

**26.【解】**因为 $X\sim E(\lambda)$,所以 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}=5$,从而 $\lambda=\dfrac{1}{5}$,根据题意有 $Y=\min\{X,2\}.$

当 $y<0$ 时,$F(y)=0$;当 $y\geqslant 2$ 时,$F(y)=1$;

当 $0 \leqslant y < 2$ 时，$F(y)=P(Y \leqslant y)=P(\min\{X,2\} \leqslant y)=P(X \leqslant y)=1-e^{-\frac{y}{5}}$，

故 $Y$ 服从的分布为 $F(y)=\begin{cases}0, & y<0, \\ 1-e^{-\frac{y}{5}}, & 0 \leqslant y<2, \\ 1, & y \geqslant 2.\end{cases}$

**27.【解】**(1) $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^x 12y^2\mathrm{d}y=4x^3$，则

$f_X(x)=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1, \\ 0, & 其他,\end{cases}$ 同理 $f_Y(y)=\begin{cases}12y^2(1-y), & 0<y<1, \\ 0, & 其他.\end{cases}$

因为当 $0<y<x<1$ 时，$f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 $X,Y$ 不独立.

(2) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 4x^4\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$，

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 12y^3(1-y)\mathrm{d}y=\frac{3}{5}$，

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^3\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$，

因为 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{50}$，所以 $X,Y$ 相关.

(3) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$，

当 $z<0$ 或 $z \geqslant 2$ 时，$f_Z(z)=0$；

当 $0 \leqslant z<1$ 时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z} 12(z-x)^2\mathrm{d}x=\frac{z^3}{2}$；

当 $1 \leqslant z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1} 12(z-x)^2\mathrm{d}x=\frac{z^3}{2}-4(z-1)^3$.

所以有 $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0 或 z \geqslant 2, \\ \frac{z^3}{2}, & 0 \leqslant z<1, \\ \frac{z^3}{2}-4(z-1)^3, & 1 \leqslant z<2.\end{cases}$

**28.【解】**(1) 因为 $X,Y$ 相互独立且都服从标准正态分布，所以 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad (-\infty<x,y<+\infty),$$

$F_U(u)=P(U \leqslant u)$. 当 $u<0$ 时，$F_U(u)=0$；

当 $u \geqslant 0$ 时，$F_U(u)=P(U \leqslant u)=P(X^2+Y^2 \leqslant u)=\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant u}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{u}} re^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r=1-e^{-\frac{u}{2}},$$

所以 $f_U(u)=\begin{cases}0, & u<0, \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}, & u \geqslant 0,\end{cases}$ 即 $U$ 服从参数为 $\lambda=\frac{1}{2}$ 的指数分布.

(2) $E(U)=2, D(U)=4$，

$P\{U>D(U)\mid U>E(U)\}=P(U>4\mid U>2)=\dfrac{P(U>2,U>4)}{P(U>2)}=\dfrac{P(U>4)}{P(U>2)}$,

因为 $P(U>4)=1-P(U\leqslant 4)=1-(1-\mathrm{e}^{-2})=\mathrm{e}^{-2},P(U>2)=1-(1-\mathrm{e}^{-1})=\mathrm{e}^{-1}$,

所以 $P\{U>D(U)\mid U>E(U)\}=\mathrm{e}^{-1}$.

*29*.【解】$P(U\leqslant u)=P(\max\{X,Y\}\leqslant u)=P(X\leqslant u,Y\leqslant u)=P(X\leqslant u)P(Y\leqslant u)$,

$$\begin{aligned}P(U\leqslant 1.96)&=P(X\leqslant 1.96)P(Y\leqslant 1.96)=[P(X=0)+P(X=1)]P(Y\leqslant 1.96)\\&=\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)\Phi(1.96)=0.4875,\end{aligned}$$

$P(U\leqslant 1)=P(X\leqslant 1)P(Y\leqslant 1)=\dfrac{1}{2}\times\Phi(1)=0.4205$,

则 $P(1<U\leqslant 1.96)=P(U\leqslant 1.96)-P(U\leqslant 1)=0.067$.

*30*.【解】$X\sim U(0,1),Y\sim E(1)\Rightarrow f_X(x)=\begin{cases}1,0<x<1,\\0,其他,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y},y>0,\\0,\ y\leqslant 0.\end{cases}$

因为 $X,Y$ 相互独立,所以 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y},0<x<1,y>0,\\0,\ 其他.\end{cases}$

于是 $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

当 $z\leqslant 0$ 时,$F_Z(z)=0$;

当 $0<z<1$ 时,$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=z+\mathrm{e}^{-z}-1$;

当 $z\geqslant 1$ 时,$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-z}-\mathrm{e}^{1-z}+1$.

所以 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\z+\mathrm{e}^{-z}-1, & 0<z<1,\\\mathrm{e}^{-z}-\mathrm{e}^{1-z}+1, & z\geqslant 1\end{cases}\quad f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0\\1-\mathrm{e}^{-z}, & 0<z<1.\\(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 1\end{cases}$

*31*.【解】由 $(X,Y)\sim N(1,1;1,4;0)$,得 $X\sim N(1,1),Y\sim N(1,4)$ 且 $X,Y$ 相互独立.

(1) 因为 $X+Y\sim N(2,5)$,所以 $P\{X+Y\leqslant 2\}=\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}(2)P\{XY+1<X+Y\}&=P\{(X-1)(Y-1)<0\}\\&=P\{X<1\}P\{Y>1\}+P\{X>1\}P\{Y<1\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

# 四、随机变量的数字特征

## ◇ 填空题

*1*.【解】$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0x(1+x)\mathrm{d}x+\int_0^1x(1-x)\mathrm{d}x=0$,

$E(X^2)=\int_{-1}^1x^2(1-|x|)\mathrm{d}x=2\int_0^1x^2(1-x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}$,则 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{1}{6}$.

2.【解】显然 $X\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$，则 $E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

3.【解】因为 $E(X)=np,D(X)=np(1-p),E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=np(1-p)+n^2p^2$，所以 $np=5,np(1-p)+n^2p^2=\frac{85}{3}$，解得 $n=15,p=\frac{1}{3}$.

4.【解】因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}k\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2k\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2k=1$，解得 $k=\frac{1}{2}$，

于是 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\times2\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(3)=2!\ =2$.

5.【解】$X\sim B(12,0.5)$，

$E(X)=6,\quad D(X)=3,\quad E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=3+36=39$.

6.【解】因为 $X\sim E(\lambda)$，所以 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant0\end{cases}$ 且 $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$，

则 $P(X>\sqrt{D(X)})=P\left(X>\frac{1}{\lambda}\right)=1-P\left(X\leqslant\frac{1}{\lambda}\right)=1-F_X\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\mathrm{e}^{-1}$.

7.【解】随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant x\leqslant2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

随机变量 $Y$ 的可能取值为 $-1,0,1$，

$P(Y=-1)=P(X<0)=\int_{-1}^{0}\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3},\quad P(Y=0)=P(X=0)=0$，

$P(Y=1)=P(X>0)=\frac{2}{3}$，

$Y$ 的分布律为 $Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix},\quad E(Y)=\frac{1}{3},\quad E(Y^2)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$，

则 $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{8}{9}$.

8.【解】由 $D(X_1)=\frac{(6-0)^2}{12}=3,\quad D(X_2)=4,\quad D(X_3)=3$ 得

$D(Y)=D(X_1-2X_2+3X_3)=D(X_1)+4D(X_2)+9D(X_3)=3+16+27=46$.

9.【解】因为 $X\sim P(2)$，所以 $E(X)=D(X)=2$，

于是 $E(Y)=4E(X)-3=5,\quad D(Y)=16D(X)=32$.

10.【解】由 $P(2<X<4)=0.3$ 得 $\Phi\left(\frac{4-2}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{2-2}{\sigma}\right)=0.3,\quad\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.8$，

则 $P(X<0)=\Phi\left(\frac{0-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.2$.

11.【解】由 $X\sim U[-1,3],Y\sim B\left(10,\frac{1}{2}\right),Z\sim N(1,3^2)$ 得

$D(X)=\frac{4}{3},\quad D(Y)=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2},\quad D(Z)=9$，

于是 $D(U)=D(X)+4D(Y)+9D(Z)=\frac{4}{3}+10+81=92\frac{1}{3}$.

12.【解】$E(XY)=E[X|X-a|]=\int_0^1 x|x-a|f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}.$$

13.【解】$\mathrm{Cov}(U,V)=\mathrm{Cov}(3X+2Y,3X-2Y)$

$$=9\mathrm{Cov}(X,X)-4\mathrm{Cov}(Y,Y)=9D(X)-4D(Y)=32D(Y),$$

由 $X,Y$ 独立,得 $D(U)=D(3X+2Y)=9D(X)+4D(Y)=40D(Y)$,

$$D(V)=D(3X-2Y)=9D(X)+4D(Y)=40D(Y),$$

所以 $\rho_{UV}=\frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{32D(Y)}{\sqrt{40D(Y)}\cdot\sqrt{40D(Y)}}=\frac{4}{5}$.

14.【解】$D(Y)=4D(X)=36$,

$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,2X+3)=2\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,3)=2D(X)+\mathrm{Cov}(X,3)$,

因为 $\mathrm{Cov}(X,3)=E(3X)-E(3)E(X)=3E(X)-3E(X)=0$,所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=2D(X)=18$,

于是 $\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{18}{3\times6}=1$.

15.【解】$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\times\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=3$,

$D(3X-2Y)=9D(X)+4D(Y)-12\mathrm{Cov}(X,Y)=36$.

16.【解】$E(X-2Y+3)=E(X)-2E(Y)+3=2$,

$D(X-2Y+3)=D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)-4\mathrm{Cov}(X,Y)$,

由 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\times\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=-\frac{2}{3}\times3\times1=-2$,得

$D(X-2Y+3)=D(X)+4D(Y)-4\mathrm{Cov}(X,Y)=9+4+8=21$,

于是 $E[(X-2Y+3)^2]=D(X-2Y+3)+[E(X-2Y+3)]^2=21+4=25$.

17.【解】令 $Z=X-Y$,则 $Z\sim N(0,2)$,$f_Z(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}(-\infty<z<+\infty)$.

$$E(|X-Y|)=E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f_Z(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\mathrm{d}\left(\frac{z^2}{4}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

因为 $E(|Z|^2)=E(Z^2)=D(Z)+[E(Z)]^2=2$,

所以 $D(|Z|)=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2=2-\frac{4}{\pi}$.

18.【解】$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}=-0.3\times1\times3=-0.9$.

## ◇ 选择题

19.【解】$E[(X-C)^2]-E[(X-\mu)^2]=[E(X^2)-2CE(X)+C^2]-[E(X^2)-2\mu E(X)+\mu^2]$

$=C^2+2E(X)[E(X)-C]-[E(X)]^2=[C-E(X)]^2\geqslant0$,选(B).

20.【解】因为 $E(XY)=E(X)E(Y)$,所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$,

又 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$，所以 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$，选(B).

**21.**【解】$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)+2ab\mathrm{Cov}(X,Y)$，

$D(aX-bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)-2ab\mathrm{Cov}(X,Y)$，

因为 $D(aX+bY)=D(aX-bY)$，所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，即 $X,Y$ 不相关，选(B).

**22.**【解】因为 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$，所以若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则有 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，于是 $X,Y$ 不相关，选(D).

**23.**【解】因为 $E(XY)=E(X)E(Y)$，所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，

而 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$，所以 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$，正确答案为(D).

**24.**【解】由 $X\sim U[0,2]$ 得 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2},0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0,\ 其他.\end{cases}$

$E(X)=1,E(Y)=E(X^2)=\dfrac{1}{2}\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3},E(XY)=E(X^3)=\dfrac{1}{2}\int_0^2 x^3\mathrm{d}x=2$，

因为 $E(XY)\neq E(X)E(Y)$，所以 $X,Y$ 一定相关，故 $X,Y$ 不独立，选(D).

## ◇ 解答题

**25.**【解】令 $A_i=\{$第 $i$ 个部件需要调整$\}(i=1,2,3)$，$X$ 的可能取值为 $0,1,2,3$，

$P(X=0)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=0.9\times0.8\times0.7=0.504$，

$P(X=1)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=0.398$，

$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=0.006$，

$P(X=2)=1-0.504-0.398-0.006=0.092$，

所以 $X$ 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0.504 & 0.398 & 0.092 & 0.006\end{pmatrix}$.

$E(X)=1\times0.398+2\times0.092+3\times0.006=0.6$，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1^2\times0.398+2^2\times0.092+3^2\times0.006-0.36=0.46$.

**26.**【解】显然 $Y\sim B(4,p)$，其中 $p=P(X>3)=1-P(X\leqslant 3)$，

因为 $X\sim E\left(\dfrac{1}{3}\right)$，所以 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}, & x\geqslant 0,\end{cases}$

从而 $p=1-F_X(3)=\mathrm{e}^{-1}$. 由 $E(Y)=4\mathrm{e}^{-1},D(Y)=4\mathrm{e}^{-1}(1-\mathrm{e}^{-1})$，

得 $E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=4\mathrm{e}^{-1}-4\mathrm{e}^{-2}+16\mathrm{e}^{-2}=4\mathrm{e}^{-1}+12\mathrm{e}^{-2}$.

**27.**【解】(1) 因为 $P(A)=P(B)$ 且 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以令 $P(A)=p$，

于是 $2p-p^2=\dfrac{3}{4}$，解得 $p=\dfrac{1}{2}$，即 $P(A)=P(X>a)=\dfrac{1}{2}$，

而 $P(X>a)=\int_a^2\dfrac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}(8-a^3)=\dfrac{1}{2}$，解得 $a=\sqrt[3]{4}$.

(2) $E\left(\dfrac{1}{X^2}\right)=\int_0^2\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}$.

**28.**【解】$X$ 的分布律为 $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p(k=1,2,\cdots)$.

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1},$$

令 $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$，则 $S(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k}\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，故

$$E(X)=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}=pS(1-p)=\frac{1}{p}=10.$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2p(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1},$$

$$S_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1},$$

则 $S_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[k(k-1)+k]x^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)x^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$

$$=x\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}+\frac{1}{(1-x)^2}=x\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k}\right)''+\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=x\left(\frac{x}{1-x}\right)''+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3},$$

故 $E(X^2)=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}=pS_1(1-p)=\frac{2-p}{p^2}=190$，

则 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=190-100=90.$

**29.【解】**设试验的次数为 $X$，则 $X$ 的分布律为

$$P(X=k)=C_{k-1}^{1}\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\times\frac{3}{4}=(k-1)\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2},k=2,3,\cdots.$$

$$E(X)=\sum_{n=2}^{\infty}n\times(n-1)\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}=\frac{9}{16}\sum_{n=2}^{\infty}n\times(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2},$$

令 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\times(n-1)x^{n-2}=\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^{n}\right)''=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''$，

所以 $E(X)=\sum_{n=2}^{\infty}n\times(n-1)\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}=\frac{9}{16}S\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{3}.$

**30.【解】**因为 $X\sim[0,60]$，所以 $X$ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{60}, & 0\leqslant x\leqslant 60,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

游客等电梯时间设为 $T$，则 $T=\begin{cases}5-x, & 0<x\leqslant 5,\\ 25-x, & 5<x\leqslant 25,\\ 55-x, & 25<x\leqslant 55,\\ 60-x+5, & 55<x\leqslant 60,\end{cases}$ 于是

$$E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}T(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{60}\left[\int_0^5(5-x)\mathrm{d}x+\int_5^{25}(25-x)\mathrm{d}x+\int_{25}^{55}(55-x)\mathrm{d}x+\int_{55}^{60}(65-x)\mathrm{d}x\right]$$

$=11.67$(分钟).

**31.【解】**$Y\sim B(4,p)$，其中 $p=P\left(X>\frac{\pi}{3}\right)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$，

$E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=5.$

**32.**【解】显然 $X\sim B(10,p)$，其中 $p=P(16\leqslant L\leqslant 22)$. 因为 $L\sim N(18,4)$，所以 $\frac{L-18}{2}\sim N(0,1)$，

所以 $p=P(16\leqslant L\leqslant 22)=P\left(-1\leqslant\frac{L-18}{2}\leqslant 2\right)$

$=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)-1=0.8185$，

因此 $E(X)=np=10\times 0.8185=8.185$，

$D(X)=npq=10\times 0.8185\times(1-0.8185)=1.4856.$

**33.**【解】令 $X_i=\begin{cases}1,\text{第 } i \text{ 个站有人下车},\\0,\text{第 } i \text{ 个站无人下车}\end{cases}(i=1,2,\cdots,10)$，显然 $X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$. 因为任一旅客在第 $i$ 个站不下车的概率为 0.9，所以 20 位旅客都不在第 $i$ 个站下车的概率为 $0.9^{20}$，从而第 $i$ 个站有人下车的概率为 $1-0.9^{20}$，即 $X_i$ 的分布律为

$$X_i\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\0.9^{20} & 1-0.9^{20}\end{pmatrix}(i=1,2,\cdots,10)$$

于是 $E(X_i)=1-0.9^{20}(i=1,2,\cdots,10)$，从而有

$E(X)=\sum_{i=1}^{10}E(X_i)=10(1-0.9^{20})=8.784.$

**34.**【解】(1) $(X_1,X_2)$ 的可能取值为 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$.

$P(X_1=0,X_2=0)=P(X_3=1)=0.1$，

$P(X_1=0,X_2=1)=P(X_2=1)=0.1$，

$P(X_1=1,X_2=0)=P(X_1=1)=0.8$，

$P(X_1=1,X_2=1)=0.$

$(X_1,X_2)$ 的联合分布律为

| $X_1$ \ $X_2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.1 |
| 1 | 0.8 | 0 |

(2) $X_1\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\0.2 & 0.8\end{pmatrix}$，　$X_2\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\0.9 & 0.1\end{pmatrix}$，　$X_1X_2\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$，

$E(X_1)=E(X_1^2)=0.8$，　$E(X_2)=E(X_2^2)=0.1$，　$E(X_1X_2)=0$，

则 $D(X_1)=0.16$，　$D(X_2)=0.09$，　$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=-0.08$，

于是 $\rho_{X_1X_2}=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}=-\frac{2}{3}.$

**35.**【解】线段在数轴上的区间为 $[0,L]$，设 $X,Y$ 为两点在数轴上的坐标，两点之间的距离为 $U=|X-Y|$，$X,Y$ 的边缘密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{L}, & 0\leqslant x\leqslant L,\\0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{L}, & 0\leqslant y\leqslant L,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

因为 $X,Y$ 独立,所以$(X,Y)$的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{L^2},0\leqslant x\leqslant L,0\leqslant y\leqslant L,\\ 0,\ 其他.\end{cases}$

于是 $E(U)=E\mid X-Y\mid=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mid x-y\mid f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{L^2}\int_0^L\mathrm{d}x\int_x^L(y-x)\mathrm{d}y+\frac{1}{L^2}\int_0^L\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)\mathrm{d}y=\frac{L}{3}$$

$E(U^2)=E[\mid X-Y\mid]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mid x-y\mid^2 f(x,y)\mathrm{d}y=\dfrac{L^2}{6}$,

则 $D(U)=E(U^2)-[E(U)]^2=\dfrac{L^2}{18}$.

*36*.【解】因为 $X$ 与 $Y$ 相互独立,且 $X\sim N(0,\sigma^2),Y\sim N(0,\sigma^2)$,

所以$(X,Y)$的联合密度函数为 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$,

故 $E(\sqrt{X^2+Y^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}r^2\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma,$$

$D(\sqrt{X^2+Y^2})=E(X^2+Y^2)-[E(\sqrt{X^2+Y^2})]^2=2\sigma^2-\dfrac{\pi}{2}\sigma^2$.

*37*.【解】(1)$E(U)=E(aX+bY)=0$,　$E(V)=E(aX-bY)=0$,

$D(U)=D(V)=(a^2+b^2)\sigma^2$.

$\mathrm{Cov}(U,V)=\mathrm{Cov}(aX+bY,aX-bY)=a^2D(X)-b^2D(Y)=(a^2-b^2)\sigma^2$,

$\Rightarrow\rho_{UV}=\dfrac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

(2)$U,V$ 不相关 $\Rightarrow\rho_{UV}=0\Rightarrow a=-b\neq 0$.

*38*.【解】$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y),E(X)=0,E(XY)=E(X^3)=\int_{-1}^{1}\dfrac{x^3}{2}\mathrm{d}x=0$,因此 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$,$X,Y$ 不相关;判断独立性,可以采用试算法

$P\left(X\leqslant\dfrac{1}{2},Y\leqslant\dfrac{1}{4}\right)=P\left(-\dfrac{1}{2}\leqslant X\leqslant\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$,　$P\left(X\leqslant\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$,$P\left(Y\leqslant\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$,

由 $P\left(X\leqslant\dfrac{1}{2},Y\leqslant\dfrac{1}{4}\right)\neq P\left(X\leqslant\dfrac{1}{2}\right)P\left(Y\leqslant\dfrac{1}{4}\right)$ 可知 $X,Y$ 不独立.

# 五、大数定律和中心极限定理

## ◇ 填空题

*1*.【解】$P\{\mid X-E(X)\mid\geqslant 2\}\leqslant\dfrac{D(X)}{2^2}=\dfrac{1}{2}$.

2.【解】因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布于 $N(\mu, 2^2)$，所以 $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{2^2}{n}\right)$，

从而 $P\{|\overline{X}-\mu| \geqslant 2\} \leqslant \frac{\frac{2^2}{n}}{2^2}=\frac{1}{n}$.

## ◇ 选择题

3.【解】根据辛钦大数定律的条件，应选(B).

## ◇ 解答题

4.【解】$P\{|X-\mu|<3\sigma\} \geqslant 1-\frac{D(X)}{(3\sigma)^2}=1-\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{8}{9}$.

5.【解】$E(\overline{X})=k$，　$D(\overline{X})=\frac{1}{n}D(X)=\frac{1}{n}$，

由切比雪夫不等式得 $P\left\{|\overline{X}-k|<\frac{1}{2}\right\} \geqslant 1-\frac{D(\overline{X})}{\frac{1}{4}} \geqslant \frac{3}{4}$，即 $n \geqslant 16$.

6.【解】设 6 000 粒种子中良种个数为 $X$，则 $X \sim B\left(6\ 000, \frac{1}{6}\right)$，

$$E(X)=1\ 000, \quad D(X)=6\ 000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6},$$

$$P\left\{\left|\frac{X}{6\ 000}-\frac{1}{6}\right|<0.01\right\}=P(-60<X-1\ 000<60)$$

$$=P\left\{-\frac{60}{\sqrt{6\ 000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}}<\frac{X-1000}{\sqrt{6\ 000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}}<\frac{60}{\sqrt{6\ 000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}}\right\}$$

$$\approx \Phi(2.078)-\Phi(-2.078)=0.96.$$

7.【解】(1) $X \sim B(100, 0.2)$，即 $X$ 的分布律为

$$P(X=k)=C_{100}^{k} 0.2^k \cdot 0.8^{100-k} \ (k=0,1,2,\cdots,100).$$

(2) $E(X)=20, D(X)=16$，

$$P(14 \leqslant X \leqslant 30)=P\left(\frac{14-20}{4} \leqslant \frac{X-20}{4} \leqslant \frac{30-20}{4}\right)$$

$$\approx \Phi(2.5)-\Phi(-1.5)=0.927.$$

# 六、数理统计的基本概念

## ◇ 填空题

1.【解】$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$，　$E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$.

2.【解】由 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，得

$$(n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-n\overline{X}^2,$$

由 $E(\overline{X}^2)=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$,得

$$E[(n-1)S^2]=\sum_{i=1}^{n}E(X_i{}^2)-nE(\overline{X}^2)=n(\mu^2+\sigma^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)=(n-1)\sigma^2,$$

则 $E(S^2)=\sigma^2$.

3.【解】因为 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,所以 $\frac{9S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(9)$,

$D\left(\frac{9S^2}{\sigma^2}\right)=18$,又 $D\left(\frac{9S^2}{\sigma^2}\right)=\frac{81}{\sigma^4}D(S^2)$,故 $D(S^2)=\frac{2}{9}\sigma^4$.

4.【解】因为 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$,即 $\overline{X}\sim N(2,1)$,所以 $\overline{X}-2\sim N(0,1)$,于是 $(\overline{X}-2)^2\sim\chi^2(1)$.

5.【解】由 $X\sim N(1,2)$,$Y\sim N(-1,2)$,$Z\sim N(0,9)$,得 $X+Y\sim N(0,4)$,

且 $\frac{X+Y}{2}\sim N(0,1)$,$\frac{Z}{3}\sim N(0,1)$,故 $a=\frac{1}{4}$,$b=\frac{1}{9}$,$n=2$.

6.【解】因为 $X_i\sim N(0,\ 3^2)(i=1,2,\cdots,9)$,所以 $\frac{X_i}{3}\sim N(0,\ 1)(i=1,2,\cdots,9)$ 且相互独立,

故 $Y=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i^2\sim\chi^2(9)$,自由度为 9.

7.【解】因为 $X_1-2X_2\sim N(0,20)$, $3X_3-4X_4\sim N(0,100)$, $X_5\sim N(0,4)$,

所以 $\frac{X_1-2X_2}{2\sqrt{5}}\sim N(0,1)$, $\frac{3X_3-4X_4}{10}\sim N(0,1)$, $\frac{X_5}{2}\sim N(0,1)$,

于是 $\frac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{100}(3X_3-4X_4)^2+\frac{1}{4}X_5^2\sim\chi^2(3)$,

故 $a=\frac{1}{20}$,$b=\frac{1}{100}$,$c=\frac{1}{4}$,$n=3$.

8.【解】因为 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$,$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2\sim\chi^2(m)$,且 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$ 与 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2\sim$ $\chi^2(m)$ 相互独立,所以 $U=\dfrac{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2/n}{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2/m}\sim F(n,m)$.

9.【解】由 $U\sim N(\mu,1)$,得 $\frac{U-\mu}{1}=U-\mu\sim N(0,1)$,又 $U,V$ 相互独立,则 $\frac{U-\mu}{\sqrt{V/n}}=T\sim t(n)$.

10.【解】$E(S_0^2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$.

## ◇ 选择题

11.【解】因为统计量为样本的无参函数,故选(B).

12.【解】由 $X_1^2\sim\chi^2(1)$，$\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n-1)$，得 $\dfrac{X_1^2/1}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2/(n-1)}=\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}\sim F(1,n-1)$，选(D).

13.【解】因为 $X\sim t(2)$，所以存在 $U\sim N(0,1)$，$V\sim\chi^2(2)$，且 $U,V$ 相互独立，使得 $X=\dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{2}}}$，

则 $\dfrac{1}{X^2}=\dfrac{V/2}{U^2}$，因为 $V\sim\chi^2(2)$，$U^2\sim\chi^2(1)$ 且 $V,U^2$ 相互独立，所以 $\dfrac{1}{X^2}\sim F(2,1)$，选(C).

14.【解】根据左、右分位点的定义，选(B).

15.【解】因为 $X,Y$ 不一定相互独立，所以 $X+Y$ 不一定服从正态分布，同理(B)，(D) 也不对，选(C).

16.【解】因为 $X\sim F(m,m)$，所以 $\dfrac{1}{X}\sim F(m,m)$，于是 $q=P(X\geqslant 1)=P\left(\dfrac{1}{X}\leqslant 1\right)$，故 $p=q$，选(C).

## ◇ 解答题

17.【解】因为 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 相互独立且与总体服从同样的分布，所以 $\sum\limits_{i=1}^{10}(-1)^iX_i\sim N(0,10\sigma^2)$，于是 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(-1)^iX_i}{\sqrt{10}\sigma}\sim N(0,1)$，又因为 $X_{11},X_{12},\cdots,X_{20}$ 相互独立且与总体服从同样的分布，所以 $\dfrac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1)(i=11,12,\cdots,20)$，于是 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=11}^{20}X_i^2\sim\chi^2(10)$，又

$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(-1)^iX_i}{\sqrt{10}\sigma}$ 与 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=11}^{20}X_i^2$ 独立，故 $\dfrac{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(-1)^iX_i}{\sqrt{10}\sigma}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=11}^{20}X_i^2/10}}\sim t(10)$，即 $U=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(-1)^iX_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=11}^{20}X_i^2}}\sim t(10)$.

18.【解】因为 $X_1,X_2,\cdots,X_{20}$ 相互独立且与总体 $X$ 服从同样的分布，

所以 $\dfrac{1}{4}(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{20}^2)\sim\chi^2(20)$，同理 $\dfrac{1}{4}(X_{21}^2+X_{22}^2+\cdots+X_{30}^2)\sim\chi^2(10)$，

且 $\dfrac{1}{4}(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{20}^2)$ 与 $\dfrac{1}{4}(X_{21}^2+X_{22}^2+\cdots+X_{30}^2)$ 相互独立，

于是 $\dfrac{\dfrac{1}{4}(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{20}^2)/20}{\dfrac{1}{4}(X_{21}^2+X_{22}^2+\cdots+X_{30}^2)/10}\sim F(20,10)$，即

$$U=\frac{1}{2}\,\frac{(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{20}^2)}{(X_{21}^2+X_{22}^2+\cdots+X_{30}^2)}\sim F(20,10).$$

19.【解】(1) 由 $X_1-X_2\sim N(0,8)$，$X_3+2X_4\sim N(0,20)$ 得

$\dfrac{X_1-X_2}{2\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，$\dfrac{X_3+2X_4}{2\sqrt{5}}\sim N(0,1)$ 且相互独立，

于是$\frac{1}{8}(X_1-X_2)^2+\frac{1}{20}(X_3+2X_4)^2\sim\chi^2(2)$,故$a=\frac{1}{8},b=\frac{1}{20}$.

(2) 由$X_1\sim N(0,4)$得$\frac{X_1}{2}\sim N(0,1)$,

由$\frac{X_2}{2}\sim N(0,1),\frac{X_3}{2}\sim N(0,1),\frac{X_4}{2}\sim N(0,1)$且相互独立得

$$\frac{1}{4}(X_2^2+X_3^2+X_4^2)\sim\chi^2(3),$$

又$\frac{X_1}{2}$与$\frac{1}{4}(X_2^2+X_3^2+X_4^2)$相互独立,

故$\dfrac{\frac{X_1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}(X_2^2+X_3^2+X_4^2)/3}}\sim t(3)$,即$\dfrac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2+X_4^2}}\sim t(3)$.

*20*.【解】令$Y_i=X_i+X_{n+i}(i=1,2,\cdots,n),\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=2\overline{X}$,

令总体$Y\sim N(2\mu,2\sigma^2)$,则$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$为来自总体$Y$的简单随机样本,

由$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$得$T=(n-1)S^2$,显然$\frac{(n-1)S^2}{2\sigma^2}=\frac{T}{2\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,

由$E\left(\frac{T}{2\sigma^2}\right)=n-1$得$ET=2(n-1)\sigma^2$;由$D\left(\frac{T}{2\sigma^2}\right)=2(n-1)$得$DT=8(n-1)\sigma^4$.

*21*.【解】由$X_1,X_2,\cdots,X_7$与总体服从相同的分布且相互独立,得$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{7}X_i^2\sim\chi^2(7)$,

于是$P(\sum_{i=1}^{7}X_i^2\leqslant 64)=P\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{7}X_i^2\leqslant 16\right)$,

查表得$\chi^2_{0.025}(7)=16.014$,故$P(\sum_{i=1}^{7}X_i^2\leqslant 64)=1-0.025=0.975$.

*22*.【解】$\overline{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i\sim N\left(\mu,\frac{25}{100}\right)$,总体均值为$E(X)=\mu$,

则$P\{|\overline{X}-\mu|\leqslant 1.5\}=P\left(\frac{-1.5}{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1.5}{\frac{1}{2}}\right)=P\left(-3\leqslant\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{2}}\leqslant 3\right)$

$$=\Phi(3)-\Phi(-3)=2\Phi(3)-1=0.9973.$$

# 七、参数估计

## ◇ 填空题

*1*.【解】$E(X)=\frac{1}{\theta}\times 1+\frac{1}{\theta}\times 2+\cdots+\frac{1}{\theta}\times\theta=\frac{\theta+1}{2}$,

令$E(X)=\overline{X}$,则$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=2\overline{X}-1$.

2.【解】$L(\theta)=\theta^2\times(1-2\theta)\times\theta^2=\theta^4(1-2\theta)$, $\ln L(\theta)=4\ln\theta+\ln(1-2\theta)$,

令$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{4}{\theta}-\frac{2}{1-2\theta}=0$,得参数 $\theta$ 的极大似然估计值为$\hat{\theta}=\frac{2}{5}$.

3.【解】$X\sim N(\mu,1)$,取统计量$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{100}}}\sim N(0,1)$,则 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\overline{x}-\frac{1}{10}z_{0.025},\overline{x}+\frac{1}{10}z_{0.025}\right)=(4.804,5.196).$$

## ◇ 选择题

4.【解】总体方差已知,参数 $\mu$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为$\left(\overline{x}-\frac{5}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{x}+\frac{5}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$,其中 $n$ 为样本容量,长度为$\frac{10}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$,因为 $\alpha$ 越小,则 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ 越大,所以置信区间的长度随 $\alpha$ 增大而减少,选(C).

5.【解】因为 $\sigma^2$ 未知,所以选用统计量 $t=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$,故 $\mu$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为$\left(\overline{X}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$,选(D).

## ◇ 解答题

6.【解】$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p=\frac{1}{p}$,令$\frac{1}{p}=\overline{X}$,得参数 $p$ 的矩估计量为 $\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$.

$L(p)=P(X=x_1)\cdots P(X=x_n)=(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}p^n$,

$\ln L(p)=(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)\ln(1-p)+n\ln p$,

令$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}{p-1}+\frac{n}{p}=0$,得参数 $p$ 的极大似然估计量为 $\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$.

7.【解】显然 $E(X)=0$,

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,\theta)dx=\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{\theta}\right)^2e^{-\frac{x}{\theta}}d\left(\frac{x}{\theta}\right)=\theta^2\Gamma(3)=2\theta^2$,

由 $E(X^2)=A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$,得 $\theta$ 的矩估计量为$\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$.

$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\frac{1}{(2\theta)^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$,则 $\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=-n\ln(2\theta)-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$,

由$\frac{d}{d\theta}\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$,得 $\theta$ 的最大似然估计值为

$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$,则参数 $\theta$ 的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

8.【解】(1) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本值,似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, & x_i>0(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 时,$\ln L(\theta)=-n\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$,令 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$,

得 $\theta$ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\overline{x}$,因此 $\theta$ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}$.

(2) 由于 $E(\hat{\theta})=E(\overline{X})=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=E(X)$,而 $E(X)=\theta$,所以 $E(\hat{\theta})=\theta$,故 $\hat{\theta}=\overline{X}$ 为参数 $\theta$ 的无偏估计量.

9.【解】(1) 由于总体的均值为 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$,

令 $E(X)=\overline{X}$,则未知参数 $\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

(2) 设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为来自总体 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的观察值,则关于参数 $\theta$ 的似然函数为

$L(\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^\theta, & 0<x_i<1(i=1,2,\cdots,n)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$,

令 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i=0$,得参数 $\theta$ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$,

参数 $\theta$ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

10.【解】$L(\theta)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=\dfrac{x_1x_2\cdots x_n}{\theta^{2n}}e^{-\frac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}\ (x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$,

$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$,令 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\dfrac{2n}{\theta}+\dfrac{2}{\theta^3}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=0$,得

$\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$,则参数 $\theta$ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}$.

11.【解】(1)$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^\theta\dfrac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)dx=\dfrac{\theta}{2}$,令 $E(X)=\overline{X}$,则 $\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=2\overline{X}$.

(2)$D(\hat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\dfrac{4}{n}D(X)$,

因为 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^\theta\dfrac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)dx=\dfrac{3\theta^2}{10}$,

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{\theta^2}{20}$, $D(\hat{\theta})=\dfrac{4}{n}D(X)=\dfrac{\theta^2}{5n}$.

12.【解】参数 $\theta$ 的似然函数为 $L(\theta)=\begin{cases}2^ne^{-2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_i>\theta(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当 $x_i > \theta(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$，

因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=2n>0$，所以 $\ln L(\theta)$ 随 $\theta$ 的增加而增加，因为 $\theta<x_i(i=1,2,\cdots,n)$，所以参数 $\theta$ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

*13*.【解】因为 $\sigma^2$ 未知，所以选择统计量 $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$，查表得 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.31$，由

$P\left(-2.31<\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}<2.31\right)=0.95$，得 $\mu$ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1),\overline{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1)\right)=\left(99.078-\frac{1.143}{3}\times 2.31,99.078+\frac{1.143}{3}\times 2.31\right)$$
$$=(98.1979,99.9581).$$

# 八、假设检验

## ◇ 填空题

*1*.【解】原假设为 $H_0:p\leqslant 3\%$，犯第一类错误的概率为 $5\%$.

## ◇ 选择题

**2**.【解】选(B).

## ◇ 解答题

*3*.【解】令 $H_0:\mu=50,H_1:\mu\neq 50$，

取统计量 $U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$，当 $\alpha=0.05$ 时，$z_{0.025}=1.96$，$H_0$ 的接受域为 $(-1.96,1.96)$，

因为 $\frac{51.26-50}{\frac{3.8}{\sqrt{50}}}=2.35\notin(-1.96,1.96)$，所以在显著性水平为 $\alpha=0.05$ 下 $H_0$ 被拒绝，即生产过程不正常.

*4*.【解】令 $H_0:\mu=30,H_1:\mu\neq 30$.

已知总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{x}=32.5$，因为 $\sigma^2$ 未知，所以取统计量 $\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$，

查表得 $t_{0.025}(19)=2.093$，则 $H_0$ 的接受域为 $(-2.093,2.093)$，

而 $\frac{32.5-30}{\frac{15}{\sqrt{20}}}=\frac{\sqrt{5}}{3}\in(-2.093,2.093)$，所以 $H_0$ 被接受，即可以认为这批木材的平均直径为 30cm.

【下篇】

# 提高篇

# 高等数学部分

## 一、函数、极限、连续

### ◇ 填空题

*1*.【解】因为 $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$,

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

2.【解】$\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t\overset{x-t=u}{=}\int_x^0\sin u^2(-\mathrm{d}u)=\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u$,则

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t}{\sin^2x\ln(1-x)}=-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u}{x^3}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}=-\frac{1}{3}.$$

3.【解】由 $\int_0^x t\sin(x^2-t^2)\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{2}\int_0^x\sin(x^2-t^2)\mathrm{d}(x^2-t^2)=\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2}\sin u\mathrm{d}u$,得

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t\sin(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{(1-\cos x)\ln(1+2x^2)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin u\mathrm{d}u}{x^4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x^2}{4x^3}=\frac{1}{4}.$$

4.【解】因为 $x\to0$ 时,$\sqrt{x+1}-1\sim\dfrac{x}{2}$,

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x e^t\cos t\mathrm{d}t-x-\frac{x^2}{2}}{(x-\tan x)(\sqrt{x+1}-1)}=2\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x e^t\cos t\mathrm{d}t-x-\frac{x^2}{2}}{x(x-\tan x)}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x e^t\cos t\mathrm{d}t-x-\frac{x^2}{2}}{x^4}\cdot\frac{x^4}{x(x-\tan x)}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x e^t\cos t\mathrm{d}t-x-\frac{x^2}{2}}{x^4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x(x-\tan x)}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{e^x\cos x-1-x}{4x^3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x-\tan x},$$

由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\cos x-1-x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\cos x-e^x\sin x-1}{12x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\cos x-e^x\sin x-e^x\sin x-e^x\cos x}{24x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2e^x\sin x}{24x}=-\frac{1}{12}\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x}{x}=-\frac{1}{12},$$

又$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x-\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{1-\sec^2x}=-3$,

于是原式$=2\times\left(-\dfrac{1}{12}\right)\times(-3)=\dfrac{1}{2}$.

5.【解】因为$x\to0$时,$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$,

$\cos2x=1-\dfrac{(2x)^2}{2!}+o(x^2)=1-2x^2+o(x^2)$,

$\sin x\cos2x=x-\dfrac{13}{6}x^3+o(x^3)$,

所以$x-\sin x\cos2x=\dfrac{13}{6}x^3+o(x^3)\sim\dfrac{13}{6}x^3$,故$c=\dfrac{13}{6}$,$k=3$.

6.【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left(\sin t+t^2\cos\frac{1}{t}\right)dt}{1-\cos^2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left(\sin t+t^2\cos\frac{1}{t}\right)dt}{(1+\cos x)(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left(\sin t+t^2\cos\frac{1}{t}\right)dt}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}.$$

7.【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^a=e^a$,

$\int_{-\infty}^a te^t dt=\int_{-\infty}^a t\,d(e^t)=te^t\Big|_{-\infty}^a-\int_{-\infty}^a e^t dt=ae^a-e^a$,

由$e^a=ae^a-e^a$得$a=2$.

8.【解】由$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\dfrac{x+1}{x-1}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{2t}{1-t}\right)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{2t}{1-t}}{t}=2$得

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(2x)}=2$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{f(2x)}=4$,所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{4}$.

9.【解】$\sqrt{1+f^2(x)}-1\sim\dfrac{1}{2}f^2(x)$,

$\int_0^x\ln\cos(x-t)dt=-\int_0^x\ln\cos(x-t)d(x-t)=-\int_x^0\ln\cos u\,du=\int_0^x\ln\cos u\,du$,

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\ln\cos(x-t)dt}{\sqrt{1+f^2(x)}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\ln\cos u\,du}{\frac{1}{2}f^2(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{f(x)f'(x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{f'(x)}=0.$$

10.【解】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}}{2\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}+\dfrac{f(x)-f(0)}{x}},$$

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)-f(0)}{x^2}=f'(0)$，　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}f'(0),$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\dfrac{2f'(0)}{f'(0)+f'(0)}=1.$

11.【解】$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0(x-u)f(u)(-\mathrm{d}u)=x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$，

$\int_0^x \arctan(x-t)^2\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0\arctan u^2(-\mathrm{d}u)=\int_0^x\arctan u^2\mathrm{d}u$，

则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan(x-t)^2\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\arctan u^2\mathrm{d}u}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x^2}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{f(x)}=1.$$

12.【解】当$x\to 0$时，有$1-\cos^a x\sim\dfrac{a}{2}x^2$，则$1-\sqrt{\cos 2x}\sim\dfrac{1}{4}(2x)^2=x^2$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}x$，

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x\times\dfrac{1}{2}x}=2.$

13.【解】由$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f(3-x)-3}{x-1}=-1$得$f(2)=\dfrac{3}{2}$，且

$$-1=\lim_{x\to 1}\frac{2f(3-x)-3}{x-1}\xlongequal{x+1=t}\lim_{t\to 2}\frac{2f[2+(2-t)]-2f(2)}{t-2}=-2f'(2),$$

$f'(2)=\dfrac{1}{2}$，则曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程为$y-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}(x-2)$.

14.【解】$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a(1-\cos x)+2\ln(1+bx^2)}{\mathrm{e}^x-x-1}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{a(1-\cos x)}{\frac{x^2}{2}}+2\frac{\ln(1+bx^2)}{\frac{x^2}{2}}\right]=a+4b,$$

$f(0)=3$,

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}\frac{2bx\sin x+\int_0^{x^2}\cos t\,dt}{x\arctan x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2bx\sin x+\int_0^{x^2}\cos t\,dt}{x^2}$$

$$=2b+\lim_{x\to0^-}\frac{\int_0^{x^2}\cos t\,dt}{x^2}=2b+\lim_{x\to0^-}\frac{2x\cos x^2}{2x}=2b+1,$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,所以 $a+4b=3=2b+1$,解得 $a=-1,b=1$.

## ◇ 选择题

**15.【解】**因为 $x\to0$ 时,$ax^3+bx^2+cx\sim\int_0^{\ln(1+2x)}\sin t\,dt$,

所以 $1=\lim_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\ln(1+2x)}\sin t\,dt}{ax^3+bx^2+cx}=\lim_{x\to0}\dfrac{\sin[\ln(1+2x)]\cdot\dfrac{2}{1+2x}}{3ax^2+2bx+c}$,显然 $c=0$,

再由 $1=\lim_{x\to0}\dfrac{\sin\ln(1+2x)\cdot\dfrac{2}{1+2x}}{3ax^2+2bx+c}=\lim_{x\to0}\dfrac{4x}{3ax^2+2bx}$,

得 $a$ 可取任意常数,$b=2$,选(D).

**16.【解】**因为$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{3}$,所以正确答案为(B).

**17.【解】**由$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}\dfrac{\int_0^x x\ln(1+u^2)du}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\ln(1+u^2)du}{nx^{n-2}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{n(n-2)x^{n-3}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{n(n-2)x^{n-5}},$$

得 $n=5$,即 $x\to0$ 时,$f(x)\sim\dfrac{1}{15}x^5$;

由$\lim_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x^m}=\lim_{x\to0}\dfrac{2x\cos x^2[1-\cos(\sin x^2)]}{mx^{m-1}}=\lim_{x\to0}\dfrac{\sin^2x^2}{mx^{m-2}}=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{mx^{m-6}}$,得 $m=6$,即 $x\to0$ 时,$g(x)\sim\dfrac{1}{6}x^6$,故 $x\to0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小,应选(A).

**18.【解】**(A) 不对,例如:$a_n=2+(-1)^n,b_n=2-(-1)^n$,显然$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都发散,但 $a_nb_n=3$,显然$\{a_nb_n\}$收敛;

(B)、(C) 都不对,例如:$a_n=n[1+(-1)^n],b_n=n[1-(-1)^n]$,显然$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都无界,但 $a_nb_n=0$,显然$\{a_nb_n\}$有界且$\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$;

故正确答案为(D).

**19.【解】**因为 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,所以 $a\geqslant0$,又因为 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$,所以 $b<0$,选(C).

**20.【解】**因为 $\alpha\sim\beta$,所以$\lim_{x\to a}\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha}=0$,

于是$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}}=\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}}=\lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}}=e^{\frac{1}{2}}$，选(D).

**21.【解】**因为 $f'(0)>0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，根据极限的保号性，存在 $\delta>0$，当 $x\in(0,\delta)$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，即 $f(x)>f(0)$，选(A).

**22.【解】**$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+f(x)]}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\dfrac{f''(0)}{2}$，

因为 $f(0)=f'(0)=0$，所以 $f''(0)=2$，于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+f(x)]}{x^2}=1$，选(C).

**23.【解】**令 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ -1, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\end{cases}$ 显然 $|f(x)|\equiv 1$ 处处连续，然而 $f(x)$ 处处间断，(A) 不对；

令 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Q},\\ x^2, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\end{cases}$ 显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但在任意 $x=a\neq 0$ 处函数 $f(x)$ 都是间断的，故(C) 不对；

令 $f(x)=\begin{cases}2, & x=0,\\ x^2, & x\neq 0,\end{cases}$ 显然 $\lim\limits_{h\to 0}[f(0+h)-f(0-h)]=0$，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，(D) 不对；

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，又 $0\leqslant\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|$，根据夹逼定理，$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|f(a)|$，所以选(B).

## ◇ 解答题

**24.【解】**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^4+2x+4)}{\ln(2x^2+4x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^4\left(1+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{4}{x^4}\right)}{\ln x^2\left(2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\ln x+\ln\left(1+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{4}{x^4}\right)}{2\ln x+\ln\left(2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{4}{x^4}\right)}{\ln x}}{2+\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln x}}=2.$$

**25.【解】方法一**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\cos(x-1)}\cdot\frac{\sin(x-1)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

**方法二**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}\xlongequal{x-1=t}\lim_{t\to 0}\frac{\ln\cos t}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln[1+(\cos t-1)]}{1-\cos\frac{\pi}{2}t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}t\right)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}t\right)^2}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

26.【解】由$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$,

$x\to 0$ 时,$x-\ln(1+x)=x-\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\sim\frac{x^2}{2}$ 得

$$\lim_{x\to 0}\left[\cos x+\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}=\lim_{x\to 0}\left[\cos x+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+(\cos x-1)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]^{\frac{1}{\cos x-1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}}\right\}^{\frac{\cos x-1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x-\ln(1+x)}}$$

$$=\mathrm{e}^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}}=\mathrm{e}^{2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}\right)}=\mathrm{e}^{2\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right]}=\mathrm{e}.$$

27.【解】由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ 得 $f(0)=0,f'(0)=0$,

$$\lim_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\{[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}\}^{\frac{f(x)}{x^2}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot f''(0)}=\mathrm{e}^3.$$

28.【解】由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arctan x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arctan x-\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x^2}{nx^{n-1}(1-x^4)}=-\frac{4}{n}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{n-1}}=c,$$

得$\begin{cases}n-1=2\\ c=-\frac{4}{n}\end{cases}$,故 $n=3,c=-\frac{4}{3}$.

29.【解】由 $\ln(1+ax)=ax-\frac{a^2x^2}{2}+o(x^2)$, $\mathrm{e}^{bx}=1+bx+\frac{b^2x^2}{2}+o(x^2)$,

$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ 得

$\ln(1+ax)-\mathrm{e}^{bx}+\cos x=(a-b)x-\frac{a^2+b^2+1}{2}x^2+o(x^2)$,

于是由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)-\mathrm{e}^{bx}+\cos x}{x^2}=-\frac{9}{2}$ 得$\begin{cases}a-b=0\\ -\frac{a^2+b^2+1}{2}=-\frac{9}{2}\end{cases}$,

解得 $\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}$.

**30.【解】** 令 $y=x-(a+b\cos x)\sin x$,

$y'=1+b\sin^2x-(a+b\cos x)\cos x$,

$y''=b\sin 2x+\dfrac{b}{2}\sin 2x+(a+b\cos x)\sin x=a\sin x+2b\sin 2x$,

$y'''=a\cos x+4b\cos 2x$,

显然 $y(0)=0,y''(0)=0$,

所以令 $y'(0)=y'''(0)=0$ 得 $\begin{cases}1-a-b=0\\a+4b=0\end{cases}$,解得 $a=\dfrac{4}{3},b=-\dfrac{1}{3}$,

故当 $a=\dfrac{4}{3},b=-\dfrac{1}{3}$ 时,$x-(a+b\cos x)\sin x$ 为阶数尽可能高的无穷小.

**31.【解】** $\ln(1+x)-(ax+bx^2)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax+bx^2)$

$$=(1-a)x-(b+\frac{1}{2})x^2+o(x^2),$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{-x^4}}{2x}=1$ 得 $x\to 0$ 时,$\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt\sim x^2$,

于是 $\begin{cases}1-a=0\\-\left(b+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\end{cases}$,故 $a=1,b=-2$.

**32.【解】方法一**

由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}dt\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^3+x+b\int_0^x e^{-t^2}dt}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3ax^2+1+be^{-x^2}}{5x^4}=c$ 得

$b=-1$;

由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}dt\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6ax-2bxe^{-x^2}}{20x^3}=\dfrac{1}{10}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3a-be^{-x^2}}{x^2}=c$ 得

$a=\dfrac{b}{3}=-\dfrac{1}{3}$;

于是 $c=\dfrac{1}{10}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1}{x^2}=-\dfrac{1}{10}$.

**方法二**

由 $e^{-t^2}=1-t^2+\dfrac{t^4}{2}+o(t^4)$ 得 $\int_0^x e^{-t^2}dt=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{10}x^5+o(x^5)$,

从而 $\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}dt=(a-\dfrac{b}{3})\dfrac{1}{x^2}+(b+1)\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{10}+\dfrac{o(x^5)}{x^5}$,

于是 $\begin{cases}a-\dfrac{b}{3}=0,\\b+1=0,\\c=\dfrac{b}{10},\end{cases}$ 解得 $a=-\dfrac{1}{3},b=-1,c=-\dfrac{1}{10}$.

**33.【解】** 由 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x+\frac{f(x)}{x}}}\right\}^{\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x^2}\right]}=e^3,$$

得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2$，于是 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{\frac{f(x)}{x}}}\right\}^{\frac{f(x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}}=e^2.$

**34.【解】** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{e}\right]^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{\left[1+\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}{e}\right]^{\frac{e}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}}\right\}^{\frac{\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right]x}{e}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right]x}{e}}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right]x}{e}\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=}\dfrac{1}{e}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}$

$$=\frac{1}{e}\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]'=\frac{1}{e}\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\cdot\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2}=-\frac{1}{2},$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{e}\right]^x=e^{-\frac{1}{2}}.$

**35.【解】** $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}$，

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}=\int_0^1 e^x\,dx=e-1,$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{e^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}=e-1.$

**36.【解】** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin(\tan x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin x)-\sin x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin(\tan x)}{x^3},$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin x}{\sin^3 x}\overset{\sin x=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t-t}{t^3}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sec^2 t-1}{3t^2}=\frac{1}{3},$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2},$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin(\tan x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin(\tan x)}{\tan^3x}\overset{t=\tan x}{=}\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6},$$

故$\lim_{x\to0}\frac{\tan(\sin x)-\sin(\tan x)}{x^3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=0.$

**37.【解】** $\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{2x}|t-x|\sin t\,dt}{|x|^3}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{2x}\left|\frac{t}{x}-1\right|\sin t\,dt}{x^2}$

$$\overset{\frac{t}{x}=u}{=}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^2|u-1|\sin xu\,du}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^1(1-u)\sin xu\,du+\int_1^2(u-1)\sin xu\,du}{x},$$

因为$\int_0^1(1-u)\sin xu\,du=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin x$，

$\int_1^2(u-1)\sin xu\,du=-\frac{\cos2x}{x}+\frac{\sin2x-\sin x}{x^2}$，

所以原式$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos2x}{x^2}+\frac{\sin2x-2\sin x}{x^3}\right)$

$$=2+\lim_{x\to0}\frac{2\cos2x-2\cos x}{3x^2}=2+\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos2x-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$=2+\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\left(-2+\frac{1}{2}\right)=1.$$

**38.【解】** $F(x)=\int_0^x tf(t^2-x^2)dt=\frac{1}{2}\int_0^x f(t^2-x^2)d(t^2-x^2)$

$$=\frac{1}{2}\int_{-x^2}^0 f(u)du=-\frac{1}{2}\int_0^{-x^2}f(u)du,$$

$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^n}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{-x^2}f(u)du}{x^n}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{2xf(-x^2)}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to0}\frac{f(-x^2)}{x^{n-2}}$，

则 $n-2=2,n=4$，且

$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^4}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{f(-x^2)}{x^2}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{f(-x^2)-f(0)}{-x^2}=-\frac{1}{4}f'(0)=1$，于是 $f'(0)=-4$.

**39.【证明】** 因为 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 单调减少.

又因为 $a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)dx=f(n+1)-f(\xi)\leqslant0(\xi\in[n,n+1])$，

所以$\{a_n\}$单调减少.

因为 $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}[f(k)-f(x)]dx+f(n)$，而$\int_k^{k+1}[f(k)-f(x)]dx\geqslant0(k=1,2,\cdots,n-1)$

且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=a>0$，所以存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，$f(x)>0$.

由 $f(x)$ 单调递减得 $f(x)>0(x\in[1,+\infty))$，故 $a_n\geqslant f(n)>0$，所以$\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在.

由 $a_n=f(1)+\left[f(2)-\int_1^2 f(x)dx\right]+\cdots+\left[f(n)-\int_{n-1}^n f(x)dx\right]$，

而 $f(k)-\int_{k-1}^{k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0(k=2,3,\cdots,n)$，所以 $a_n\leqslant f(1)$，从而 $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant f(1)$.

**40.【证明】** 因为正数的算术平均数不小于几何平均数，所以有

$$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)=\frac{x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^3}}{4}\geqslant\sqrt[4]{x_n\cdot x_n\cdot x_n\cdot\frac{a}{x_n^3}}=\sqrt[4]{a}\,(n=1,2,\cdots),$$

从而 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{x_n^3}-x_n\right)=\dfrac{a-x_n^4}{4x_n^3}\leqslant 0(n=2,3,\cdots)$，

故 $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ 单调减少，再由 $x_n\geqslant 0(n=2,3,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，等式 $x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3}\right)$ 两边令 $n\to\infty$ 得

$A=\dfrac{1}{4}\left(3A+\dfrac{a}{A^3}\right)$，解得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=\sqrt[4]{a}$.

**41.【证明】** 令 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$，因为 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\times\dfrac{1}{(1+x)^2}>0(x>0)$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调.

又因为 $a_1=1,0\leqslant a_{n+1}\leqslant 1$，所以数列 $\{a_n\}$ 有界，从而数列 $\{a_n\}$ 收敛，令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则有

$A=\sqrt{\dfrac{A}{1+A}}\Rightarrow A=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

**42.【证明】**(1) 令 $\varphi(x)=f(x)-1+2x$，$\varphi(0)=-1$，$\varphi(1)=2$，因为 $\varphi(0)\varphi(1)<0$，所以存在 $c\in(0,1)$，使得 $\varphi(c)=0$，于是 $f(c)=1-2c$.

(2) 因为 $f(x)\in C[0,2]$，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上取到最小值 $m$ 和最大值 $M$，

由 $6m\leqslant 2f(0)+f(1)+3f(2)\leqslant 6M$ 得 $m\leqslant\dfrac{2f(0)+f(1)+3f(2)}{6}\leqslant M$，

由介值定理，存在 $\xi\in[0,2]$，使得 $\dfrac{2f(0)+f(1)+3f(2)}{6}=f(\xi)$，

于是 $2f(0)+f(1)+3f(2)=6f(\xi)$.

**43.【证明】** 取 $\varepsilon_0=1$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，根据极限定义，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-A|<1$，所以 $|a_n|\leqslant|A|+1$.

取 $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|A|+1\}$，

则对一切的 $n$，有 $|a_n|\leqslant M$.

**44.【证明】** 对任意的 $x_0\in[0,1]$，因为 $\mathrm{e}^x f(x)$ 与 $\mathrm{e}^{-f(x)}$ 在 $[0,1]$ 上单调增加，

所以当 $x<x_0$ 时，有 $\begin{cases}\mathrm{e}^x f(x)\leqslant\mathrm{e}^{x_0}f(x_0),\\ \mathrm{e}^{-f(x)}\leqslant\mathrm{e}^{-f(x_0)},\end{cases}$ 故 $f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant\mathrm{e}^{x_0-x}f(x_0)$，

令 $x\to x_0^-$，由夹逼定理得 $f(x_0-0)=f(x_0)$；

当 $x>x_0$ 时，有 $\begin{cases}\mathrm{e}^x f(x)\geqslant\mathrm{e}^{x_0}f(x_0),\\ \mathrm{e}^{-f(x)}\geqslant\mathrm{e}^{-f(x_0)},\end{cases}$ 故 $\mathrm{e}^{x_0-x}f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant f(x_0)$，

令 $x\to x_0^+$，由夹逼定理得 $f(x_0+0)=f(x_0)$，故 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$，即 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，由 $x_0$ 的任意性得 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

**45.**【证明】令 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k>0$，取 $\varepsilon_0=\dfrac{k}{2}>0$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k>0$，所以存在 $X_0>0$，当 $x\geqslant X_0$ 时，有 $|f(x)-k|\leqslant\dfrac{k}{2}$，从而 $f(x)\geqslant\dfrac{k}{2}>0$，特别地，$f(X_0)>0$，因为 $f(x)$ 在 $[a,X_0]$ 上连续，且 $f(a)f(X_0)<0$，所以存在 $\xi\in(a,X_0)$，使得 $f(\xi)=0$.

**46.**【解】$x=k(k=0,-1,-2,\cdots)$ 及 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点.

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{\sin\pi x}\cdot(x+2)=\dfrac{2}{\pi}$，　$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x^2-1}=0$，

因为 $f(0-0)\neq f(0+0)$，所以 $x=0$ 为跳跃间断点；

由 $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{\sin[\pi(x+2)]}\cdot x=-\dfrac{2}{\pi}$ 得 $x=-2$ 为可去间断点；

当 $x=k(k=-1,-3,-4,\cdots)$ 时，

由 $\lim\limits_{x\to k} f(x)=\infty$ 得 $x=k(k=-1,-3,-4,\cdots)$ 为第二类间断点；

由 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\infty$ 得 $x=1$ 为第二类间断点.

**47.**【解】$f(x)$ 的间断点为 $x=0,-1,-2,\cdots$ 及 $x=1$.

当 $x=0$ 时，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{\sin\pi x}\cdot(x^2-1)=-\dfrac{1}{\pi}$，

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}\right]=-\sin1$，则 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点.

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\dfrac{2}{\pi}$，则 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点.

当 $x=k(k=-2,-3,\cdots)$ 时，$\lim\limits_{x\to k} f(x)=\infty$，则 $x=k(k=-2,-3,\cdots)$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

当 $x=1$ 时，因为 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 不存在，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

**48.**【解】首先，$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\lim\limits_{t\to x}\left[\left(1+\dfrac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}}\right]^{\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}$，

其次，$f(x)$ 的间断点为 $x=k\pi(k=0,\pm1,\cdots)$，因为 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=e$，所以 $x=0$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点中的可去间断点，$x=k\pi(k=\pm1,\cdots)$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

**49.**【解】令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，

因为 $f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-f(x)$，

所以函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数，于是

$\begin{cases}y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\\-y=\ln(\sqrt{1+x^2}-x),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+\sqrt{1+x^2}=e^y,\\\sqrt{1+x^2}-x=e^{-y},\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}=\operatorname{sh}y$，

即函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数为 $x=\operatorname{sh}y$.

**50.**【解】

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{n^2-1^2}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n^2-n^2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i+\sqrt{n^2-i^2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{i}{n}+\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}\overset{x=\sin t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=I,$$

由 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}dt$，得

原式 $=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}dt\right)=\frac{\pi}{4}.$

(2) 令 $b_n=\frac{\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}}{n+1}+\frac{\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}}{n+\frac{1}{n}}$，则

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}\leqslant b_n\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}},$$

再由 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}$

$$=\int_0^1\sqrt{1+\cos\pi x}\,dx,$$

得原式 $=\int_0^1\sqrt{1+\cos\pi x}\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{1+\cos\pi x}\,d(\pi x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

**51.【解】**$x^x-(\sin x)^x=x^x\left[1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x\right]$，且 $\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=1$，

当 $x\to0$ 时，$1-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x=1-e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}\sim-x\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)\sim x-\sin x$，

则 $\lim_{x\to0^+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$

**52.【证明】**当 $x\in[1,2]$ 时，有 $1\geqslant\frac{1}{x}$，则 $1\geqslant\int_1^2\frac{1}{x}dx$，

当 $x\in[2,3]$ 时，有 $\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{x}$，则 $\frac{1}{2}\geqslant\int_2^3\frac{1}{x}dx$，

⋮

当 $x\in[n,n+1]$ 时，有 $\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{x}$，则 $\frac{1}{n}\geqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$，

从而有 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1).$

又当 $x\in[1,2]$ 时，$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{x}$，则 $\frac{1}{2}\leqslant\int_1^2\frac{1}{x}dx$，

当 $x\in[2,3]$ 时，$\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{x}$，则 $\frac{1}{3}\leqslant\int_2^3\frac{1}{x}dx$，

⋮

当 $x\in[n-1,n]$ 时，$\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{x}$，则 $\frac{1}{n}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x}dx$，

从而有 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant 1+\int_1^n\frac{1}{x}dx=1+\ln n$，

故 $\ln(n+1)\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant 1+\ln n$，于是 $1\leqslant\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n+1)}\leqslant\frac{1+\ln n}{\ln(n+1)}$，

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n+1)}=1$.

**53.【证明】** 当 $x\neq 0$ 时，由 $|f(x)|\leqslant|e^x-1|$ 得 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{e^x-1}{x}\right|$，

$$\text{而}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[a_1\frac{\ln(1+x)}{x}+a_2\frac{\ln(1+2x)}{x}+\cdots+a_n\frac{\ln(1+nx)}{x}\right]$$
$$=a_1+2a_2+\cdots+na_n,$$

且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$，根据极限保号性得 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$.

**54.【解】** 由 $n+\frac{i^2}{n}\leqslant n+\frac{i^2+1}{n}\leqslant n+\frac{(i+1)^2}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，得

$$\sum_{i=1}^n\frac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}}\leqslant\sum_{i=1}^n\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}\leqslant\sum_{i=1}^n\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}},$$

$$\text{而}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{1}{n+\frac{(i+1)^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^n\frac{1}{n+\frac{i^2}{n}}+\frac{1}{n+\frac{(n+1)^2}{n}}-\frac{1}{n+\frac{1^2}{n}}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4},$$

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\frac{\pi}{4}$.

**55.【证明】** $x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=f'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$，因为 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $x_{n+1}-x_n$ 与 $x_n-x_{n-1}$ 同号，故 $\{x_n\}$ 单调.

$$|x_n|=|f(x_{n-1})|=\left|f(x_1)+\int_{x_1}^{x_{n-1}}f'(x)dx\right|$$
$$\leqslant|f(x_1)|+\left|\int_{x_1}^{x_{n-1}}f'(x)dx\right|\leqslant|f(x_1)|+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{1+x^2}dx=|f(x_1)|+\pi k,$$

即 $\{x_n\}$ 有界，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，

根据 $f(x)$ 的可导性得 $f(x)$ 处处连续，等式 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两边令 $n\to\infty$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)$，原命题得证.

**56.【证明】** 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，取 $\varepsilon_0=1$，根据极限的定义，存在 $X_0>0$，当 $x>X_0$ 时，

$$|f(x)-A|<1,$$

从而有

$$|f(x)|<|A|+1.$$

又因为 $f(x)$ 在$[a,X_0]$上连续,根据闭区间上连续函数有界的性质,

存在 $k>0$,当 $x\in[a,X_0]$,有 $|f(x)|\leqslant k$.

取 $M=\max\{|A|+1,k\}$,对一切的 $x\in[a,+\infty)$,有 $|f(x)|<M$.

57.【证明】因为 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,所以 $f(x)$ 在$[a,b]$上取到最小值 $m$ 和最大值 $M$,显然有

$$m\leqslant f(x_i)\leqslant M(i=1,2,\cdots,n),$$

注意到 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,

所以有

$$k_im\leqslant k_if(x_i)\leqslant k_iM(i=1,2,\cdots,n),$$

同向不等式相加,得

$(k_1+k_2+\cdots+k_n)m\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n)\leqslant(k_1+k_2+\cdots+k_n)M,$

即 $m\leqslant\dfrac{k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n)}{k_1+k_2+\cdots+k_n}\leqslant M,$

由介值定理,存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=\frac{k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n)}{k_1+k_2+\cdots+k_n},$$

即 $k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n)=(k_1+k_2+\cdots+k_n)f(\xi)$.

# 二、一元函数微分学

## ◇ 填空题

1.【解】因为两曲线过点$(-1,1)$,所以 $b-a=0$,又由 $y=x^2+ax+b$ 得$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}=a-2$,再由 $-2y=-1+xy^3$ 得 $-2\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}=1-3\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$,且两曲线在点$(-1,1)$处相切,则 $a-2=1$,解得 $a=b=3$.

2.【解】由 $y=f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ 得

$$\frac{dy}{dx}=f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\cdot\frac{-2}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

于是$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}=-2\arctan\sqrt{3}=-\dfrac{2\pi}{3}$.

3.【解】由$\dfrac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x})=-f'(\cos\sqrt{x})\cdot\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$,

得 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x})=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}f'(\cos\sqrt{x})\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{2}f'(1)=1$.

4.【解】由 $f(x)=x^2\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t+x}{t-x}\right)^{4t}=x^2\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2x}{t-x}\right)^{\frac{t-x}{2x}}\right]^{4t\times\frac{2x}{t-x}}$

$=x^2e^{\lim\limits_{t\to\infty}4t\times\frac{2x}{t-x}}=x^2e^{8x}$，

得 $f'(x)=2xe^{8x}+8x^2e^{8x}=2x(1+4x)e^{8x}$.

5.【解】因为在 $(-1,1)$ 内 $f'(x)=|x|$，

所以在 $(-1,1)$ 内 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+C_1, & 0<x<1,\\ -\dfrac{x^2}{2}+C_2, & -1<x\leqslant 0.\end{cases}$

由 $f(0)=0$ 得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & 0<x<1,\\ -\dfrac{x^2}{2}, & -1<x\leqslant 0,\end{cases}$

故 $f\left(\dfrac{7}{2}\right)=f\left(4-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}$.

6.【解】由 $f'(x)=2n(1-x)^n-2n^2x(1-x)^{n-1}=0$ 得 $x=\dfrac{1}{n+1}$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{n+1}\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{n+1},1\right)$ 时，$f'(x)<0$，则 $x=\dfrac{1}{n+1}$ 为最大值点，

$M_n=f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{2n}{n+1}\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{2}{e}$.

7.【解】$\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{(x-a)f'(a)}-\dfrac{1}{f(x)-f(a)}\right]=\dfrac{1}{f'(a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)[f(x)-f(a)]}$

$=\dfrac{1}{f'(a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2}}{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}=\dfrac{1}{f'^2(a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2}$

$=\dfrac{1}{2f'^2(a)}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\dfrac{f''(a)}{2f'^2(a)}$.

8.【解】当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $t=0$ 时，由 $y+e^y=1$，得 $y=0$.

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}$，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+4t^2}$，方程 $y+e^y=\ln(e+t^2)$ 两边对 $t$ 求导数，得

$\dfrac{dy}{dt}+e^y\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t}{e+t^2}$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2t}{(e+t^2)(1+e^y)}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t(1+4t^2)}{(e+t^2)(1+e^y)}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$.

9.【解】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{\cos t^2-2t^2\sin t^2-2t\cdot\dfrac{\cos t^2}{2t}}{-2t\sin t^2}=t$，

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt}=\dfrac{1}{-2t\sin t^2}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

10.【解】当 $x=0$ 时,$y=1$,将 $ye^{xy}+x\cos x-1=0$ 两边对 $x$ 求导得

$$e^{xy}\frac{dy}{dx}+ye^{xy}\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+\cos x-x\sin x=0,$$

将 $x=0,y=1$ 代入上式得 $\frac{dy}{dx}=-2$,故 $dy\big|_{x=0}=-2dx$.

11.【解】$\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=xy$ 两边对 $x$ 求导得

$$e^y\frac{dy}{dx}+\cos x=y+x\frac{dy}{dx},\text{则}\frac{dy}{dx}=\frac{y-\cos x}{e^y-x}.$$

12.【解】当 $x=\ln 2$ 时,$t=\pm 1$;当 $t=\pm 1$ 时,$y=0$.

(1) 当 $t=-1$ 时,

由 $\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{1+t^2}$ 得 $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=-1}=-1$,

$\int_0^y e^{u^2}du+\int_{t^2}^1 \arcsin u du=0$ 两边对 $t$ 求导数得 $e^{y^2}\frac{dy}{dt}-2t\arcsin t^2=0$,

则 $\frac{dy}{dt}\Big|_{t=-1}=-\pi$,$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\ln 2}=\pi$,则法线方程为 $y=-\frac{1}{\pi}(x-\ln 2)$;

(2) 当 $t=1$ 时,

由 $\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{1+t^2}$ 得 $\frac{dx}{dt}\Big|_{t=1}=1$.

$\int_0^y e^{u^2}du+\int_{t^2}^1 \arcsin u du=0$ 两边对 $t$ 求导得 $e^{y^2}\frac{dy}{dt}-2t\arcsin t^2=0$,

则 $\frac{dy}{dt}\Big|_{t=1}=\pi$,$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\ln 2}=\pi$,法线方程为 $y=-\frac{1}{\pi}(x-\ln 2)$,

即法线方程为 $y=-\frac{1}{\pi}(x-\ln 2)$.

13.【解】因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可微,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,

于是 $f(1-0)=f(1)=1=f(1+0)=a+b$,即 $a+b=1$.

又 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2$,

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=a$,

由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可微得 $a=2$,所以 $a=2,b=-1$.

14.【解】$F(x)=x^2\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x t^2 f'(t)dt$, $F'(x)=2x\int_0^x f'(t)dt$,

因为当 $x\to 0$ 时,$F'(x)\sim x^2$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^2}=1$,

而 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f'(t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}2f'(x)=2f'(0)$,故 $f'(0)=\frac{1}{2}$.

15.【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$,

由 $f(x)-f(x-1)=f'(\xi)$，其中 $\xi$ 介于 $x-1$ 与 $x$ 之间，

令 $x\to\infty$，由 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e^2$，得 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{\xi\to\infty}f'(\xi)=e^2$，即 $e^{2a}=e^2$，所以 $a=1$.

16.【解】因为 $\varphi'(x)=f'_x[x,f(x,2x)]+f'_y[x,f(x,2x)]\times[f'_x(x,2x)+2f'_y(x,2x)]$，

所以 $\varphi'(1)=f'_x[1,f(1,2)]+f'_y[1,f(1,2)]\times[f'_x(1,2)+2f'_y(1,2)]$

$=3+4\times(3+8)=47$.

17.【解】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-4x^4+1}{x^5+x}=2$，

$\lim\limits_{x\to\infty}(y-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^5-4x^4+1}{x^4+1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^4-2x+1}{x^4+1}=-4$，

曲线 $y=\dfrac{2x^5-4x^4+1}{x^4+1}$ 的斜渐近线为 $y=2x-4$.

## ◇ 选择题

18.【解】不妨设 $f(a)>0$，因为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，于是存在 $\delta>0$，当 $|x-a|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$，于是 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$，即 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导，同理当 $f(a)<0$ 时，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 处也可导，选(A).

19.【解】令 $f(a)-f(0)=f'(\xi)a$，即 $\arctan a=\dfrac{1}{1+\xi^2}a$，或者 $\xi^2=\dfrac{a}{\arctan a}-1$，

$$\lim_{a\to0}\frac{\xi^2}{a^2}=\lim_{a\to0}\frac{a-\arctan a}{a^2\arctan a}=\lim_{a\to0}\frac{a-\arctan a}{a^3}=\lim_{a\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+a^2}}{3a^2}=\frac{1}{3}\text{，选(C).}$$

20.【解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}-f'(a)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x)-f(a)-f'(a)x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(a+x)-f'(a)}{2x}=\dfrac{1}{2}f''(a)$，选(D).

21.【解】由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=2$，得 $f(0)+f'(0)=0$，于是 $f'(0)=0$.

再由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}\right]=f'(0)+f''(0)=2$，得 $f''(0)=2>0$，故 $f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值，选(B).

22.【解】因为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处右可导，所以 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在，于是 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$，即 $f(x)$ 在 $x=a$ 处右连续，同理，由 $f(x)$ 在 $x=a$ 处左可导，得 $f(x)$ 在 $x=a$ 处左连续，故 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，由于左、右导数不一定相等，选(D).

23.【解】令 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\-1, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-1, & x\in\mathbf{Q},\\1, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\end{cases}$ 显然 $f(x),g(x)$ 在每点都不连续，当然也不可导，但 $f(x)g(x)\equiv-1$ 在任何一点都可导，选(D).

24.【解】由 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导得 $|f(x)|$ 在 $x_0$ 处连续,但 $|f(x)|$ 在 $x_0$ 处不一定可导,如 $f(x)=x$ 在 $x=0$ 处可导,但 $|f(x)|=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导,选(C).

25.【解】因为 $f(x)$ 为二阶可导的奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$, $f'(-x)=f'(x)$, $f''(-x)=-f''(x)$,即 $f'(x)$ 为偶函数, $f''(x)$ 为奇函数,故由 $x<0$ 时有 $f''(x)>0$, $f'(x)<0$,得当 $x>0$ 时有 $f''(x)<0$, $f'(x)<0$,选(A).

26.【解】因为 $g'(4)=\dfrac{1}{f'(2)}$,所以选(B).

27.【解】因为 $f'_+(a)$ 存在,所以 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在,于是 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$,即 $f(x)$ 在 $x=a$ 处右连续,同理由 $f'_-(a)$ 存在可得 $f(x)$ 在 $x=a$ 处左连续,故 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续,选(B).

28.【解】设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Q},\\ x^2, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\end{cases}$ 显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,对任意的 $x_0\neq 0$,因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在,所以 $f(x)$ 在 $x_0$ 处不连续,(A) 不对;

同理 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,对任意的 $x_0\neq 0$,因为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处不连续,所以 $f(x)$ 在 $x_0$ 处也不可导,(B) 不对;

因为 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$,其中 $\xi$ 介于 $x_0$ 与 $x$ 之间,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在,

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}f'(\xi)=\lim\limits_{\xi\to x_0}f'(\xi)$ 也存在,即 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$,选(C);

令 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$ 显然 $f'(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$ 而 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在,(D) 不对.

29.【解】显然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{|x|}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{\pi}{2}$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,当 $x>0$ 时, $f'(x)=\arctan\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}$,当 $x<0$ 时, $f'(x)=-\arctan\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{1+x^2}$,因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\dfrac{\pi}{2}$, $f'(0)=\dfrac{\pi}{2}$,所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,选(D).

30.【解】(A) 不对,例如: $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 显然 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$ 存在,但 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续,所以也不可导;

(B) 不对,因为 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f[1+\ln(1+2h^2)]-f(1)}{e^{h^2}-1}$ 存在只能保证 $f(x)$ 在 $x=1$ 处右导数存在;

(C) 不对,因为 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-\cos h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f[1+(1-\cos h)]-f(1)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h}$,

而$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1-\cosh}{h}=0$，所以$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f[1+(1-\cosh)]-f(1)}{1-\cosh}$不一定存在，于是$f(x)$在$x=1$处不一定右可导，也不一定可导；

由$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(e^h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f[1+(e^h-1)]-f(1)}{e^h-1}\cdot\dfrac{e^h-1}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f[1+(e^h-1)]-f(1)}{e^h-1}$

存在，所以$f(x)$在$x=1$处可导. 所以选(D).

**31.【解】** 由$\int_0^x g(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$得$f'(x)=-2x^2+\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，$f''(x)=-4x+g(x)$，

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4x+g(x)}{x}=-4<0$，

所以存在$\delta>0$，当$0<|x|<\delta$时，$\dfrac{f''(x)}{x}<0$，

即当$x\in(-\delta,0)$时，$f''(x)>0$；当$x\in(0,\delta)$时，$f''(x)<0$，故$(0,f(0))$为$y=f(x)$的拐点，应选(C).

**32.【解】** 设$f(x)=\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\infty$，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\left(1+\cos\dfrac{1}{x}\right)$，当$x=\dfrac{1}{(2k+1)\pi}$时，$f'(x)=0$，其中$k\in\mathbf{Z}$，则$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)\neq\infty$，(A) 不对；

设$f(x)=\sqrt{x}$，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\infty$，但$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0\neq\infty$，(B) 不对；

设$f(x)=x$，$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\infty$，但$f'(x)=1$，$\lim\limits_{x\to +\infty}f'(x)=1\neq\infty$，(C) 不对，选(D).

**33.【解】** $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2}+x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-\dfrac{1}{2}<0$，

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & x=0,\\ -\dfrac{1}{2}+2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$$

当$x=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}(n\in\mathbf{N})$时，$f'(x)=\dfrac{1}{2}>0$则$f(x)$在$x=0$的任意邻域内都不单调减少，(A) 不对；

$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$ $f(x)$在$x=0$处取得极大值，但其在$x=0$的任一邻域内皆不单调，(B) 不对；

$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ 2, & x=1,\\ 2-x, & 1<x<2,\end{cases}$ $f(x)$在$x=1$处取得极大值，但$f(x)$在$x=1$处不连续，(C) 不对；

由 $f''(0)$ 存在,得 $f'(0)$ 存在,又 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f'(0)=0$,所以 $x=0$ 一定为 $f(x)$ 的极值点,选(D).

34.【解】由 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f'(x)}{(x-2)^3}=\dfrac{2}{3}$,得 $f'(2)=0$,又由 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f'(x)}{(x-2)^3}=\dfrac{2}{3}>0$,则存在 $\delta>0$,当 $0<|x-2|<\delta$ 时,有 $\dfrac{f'(x)}{(x-2)^3}>0$,即当 $x\in(2-\delta,2)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(2,2+\delta)$ 时,$f'(x)>0$,于是 $x=2$ 为 $f(x)$ 的极小值点,选(A).

35.【解】由 $\int_0^x g(x-t)\mathrm{d}t\overset{x-t=u}{=}\int_0^x g(u)\mathrm{d}u$ 得 $f'(x)=-\sin2x+\int_0^x g(u)\mathrm{d}u$,$f'(0)=0$,

$$\text{因为 } f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin2x+\int_0^x g(u)\mathrm{d}u}{x}$$

$$=-2+\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x g(u)\mathrm{d}u}{x}=-2+\lim_{x\to0}g(x)=-2+g(0)=-1<0,$$

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点,应选(A).

36.【解】因为 $f(x)$ 二阶连续可导,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{x}=-1$,所以 $\lim\limits_{x\to0}f''(x)=0$,即 $f''(0)=0$. 又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{x}=-1<0$,由极限的保号性,存在 $\delta>0$,当 $0<|x|<\delta$ 时,有 $\dfrac{f''(x)}{x}<0$,即当 $x\in(-\delta,0)$ 时,$f''(x)>0$,当 $x\in(0,\delta)$ 时,$f''(x)<0$,所以 $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点,选(C).

37.【解】由 $f'(0)=0$ 得 $f''(0)=0$,$f'''(x)=1-2f'(x)f''(x)$,$f'''(0)=1>0$,由极限保号性,存在 $\delta>0$,当 $0<|x|<\delta$ 时,$f'''(x)>0$,再由 $f''(0)=0$,得

$\begin{cases}f''(x)<0,-\delta<x<0,\\ f''(x)>0,0<x<\delta,\end{cases}$ 故 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点,选(C).

38.【解】令 $f'(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x},x<0,\\ x^2,\qquad x\geqslant0,\end{cases}$ $f''(0)=0$,但 $\lim\limits_{x\to0}f''(x)$ 不存在,所以(A)不对;若最大值在端点取到则不是极大值,所以(B)不对;(C)显然不对,选(D).

39.【解】因为 $f'(a)=0$,且 $f''(x)\geqslant k(k>0)$,所以 $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2\geqslant f(a)+\dfrac{k}{2}(x-a)^2$,其中 $\xi$ 介于 $a$ 与 $x$ 之间. 而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(a)+\dfrac{k}{2}(x-a)^2=+\infty$,故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,再由 $f(a)<0$ 得 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内至少有一个零点. 又因为 $f'(a)=0$,且 $f''(x)\geqslant k(k>0)$,所以 $f'(x)>0(x>a)$,即 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 单调增加,所以零点是唯一的,选(B).

40.【解】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}=0$ 得 $x=\mathrm{e}$,当 $0<x<\mathrm{e}$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>\mathrm{e}$ 时,$f'(x)<0$,由驻点的唯一性知 $x=\mathrm{e}$ 为函数 $f(x)$ 的最大值点,最大值为 $f(\mathrm{e})=k>0$,又 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,于是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个零点,选(C).

*41*.【解】设当 $x<0$ 时,$f'(x)$ 与 $x$ 轴的两个交点为 $(x_1,0),(x_2,0)$,其中 $x_1<x_2$;当 $x>0$ 时,$f'(x)$ 与 $x$ 轴的两个交点为 $(x_3,0),(x_4,0)$,其中 $x_3<x_4$.

当 $x<x_1$ 时,$f'(x)>0$,当 $x\in(x_1,x_2)$ 时,$f'(x)<0$,则 $x=x_1$ 为 $f(x)$ 的极大值点;当 $x\in(x_2,0)$ 时,$f'(x)>0$,则 $x=x_2$ 为 $f(x)$ 的极小值点;当 $x\in(0,x_3)$ 时,$f'(x)<0$,则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点;当 $x\in(x_3,x_4)$ 时,$f'(x)>0$,则 $x=x_3$ 为 $f(x)$ 的极小值点;当 $x>x_4$ 时,$f'(x)<0$,则 $x=x_4$ 为 $f(x)$ 的极大值点,即 $f(x)$ 有三个极大值点,两个极小值点,又 $f''(x)$ 有两个零点,根据一阶导数在两个零点两侧的增减性可得,$y=f(x)$ 有两个拐点,选(C).

## ◇ 解答题

*42*.【解】当 $|x|<1$ 时,$y'=-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$;

当 $x>1$ 时,$y'=1$;当 $x<-1$ 时,$y'=-1$;

由 $\lim\limits_{x\to-1^-}y=\lim\limits_{x\to-1^-}(1-x)=2$, $\lim\limits_{x\to-1^+}y=\lim\limits_{x\to-1^+}\cos\frac{\pi}{2}x=0$ 得 $y$ 在 $x=-1$ 处不连续,

故 $y'(-1)$ 不存在;

由 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{y(x)-y(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}{1}=-\frac{\pi}{2}$ 得 $y'_-(1)=-\frac{\pi}{2}$,

由 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{y(x)-y(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}=1$ 得 $y'_+(1)=1$,

因为 $y'_-(1)\neq y'_+(1)$,所以 $y$ 在 $x=1$ 处不可导,

故 $y'=\begin{cases}-1, & x<-1\\ -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x, & -1<x<1.\\ 1, & x>1\end{cases}$

*43*.【解】将 $t=0$ 代入 $\sin t-\int_1^{x-t}e^{-u^2}du=0$ 得 $\int_1^x e^{-u^2}du=0$,

再由 $e^{-u^2}>0$ 得 $x=1$,

$\sin t-\int_1^{x-t}e^{-u^2}du=0$ 两边对 $t$ 求导得 $\cos t-e^{-(x-t)^2}(\frac{dx}{dt}-1)=0$,从而 $\frac{dx}{dt}\big|_{t=0}=e+1$,

$\cos t-e^{-(x-t)^2}(\frac{dx}{dt}-1)=0$ 两边再对 $t$ 求导得

$-\sin t+2(x-t)e^{-(x-t)^2}\left(\frac{dx}{dt}-1\right)^2-e^{-(x-t)^2}\frac{d^2x}{dt^2}=0$,

将 $t=0,x=1,\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=e+1$ 代入得 $\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0}=2e^2$.

*44*.【解】$x^3-3xy+y^3=3$ 两边对 $x$ 求导得

$3x^2-3y-3x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0$,解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x-y^2}(x\neq y^2)$,

令 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x-y^2}=0$ 得 $y=x^2$,代入 $x^3-3xy+y^3=3$ 得 $x=-1$ 或 $x=\sqrt[3]{3}$,

$x=-1$ 时，$y=1$；$x=\sqrt[3]{3}$ 时，$y=\sqrt[3]{9}$.

当 $x=y^2$ 时，代入原方程解得 $y=-1$ 或 $y=\sqrt[3]{3}$.

所以，曲线上纵坐标最大的点为$(\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{9})$，最小的点为$(1,-1)$.

**45.【解】**$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{xe^x+1-1}{x}=1$，

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x\ln x}{x}=-\infty$，

因为 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

于是 $f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(1+\ln x), & x>0,\\(x+1)e^x, & x<0.\end{cases}$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1,x=\dfrac{1}{e}$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$；当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x>\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$，

故 $x=-1$ 为极小值点，极小值为 $f(-1)=1-\dfrac{1}{e}$；$x=0$ 为极大值点，极大值为 $f(0)=1$；

$x=\dfrac{1}{e}$ 为极小值点，极小值为 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{2}{e}}$.

**46.【解】**令 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x\geqslant1)$，

由 $f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}$ 得 $f'(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=e$.

当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，则 $x=e$ 为 $f(x)$ 的最大值点，

于是 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项为 $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt[3]{3}$，

因为 $\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}<\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}$，所以最大项为 $\sqrt[3]{3}$.

**47.【解】**当 $x\neq0$ 时，$\varphi(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}(xt)\overset{xt=u}{=}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x^2}\left[xf(x)-\displaystyle\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right]$.

当 $x=0$ 时，$\varphi(0)=\displaystyle\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=0$，

$\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{A}{2}$，

则 $\varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\left[xf(x)-\displaystyle\int_0^x f(u)\mathrm{d}u\right], & x\neq0,\\ \dfrac{A}{2}, & x=0.\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to0}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}\right]=A-\dfrac{A}{2}=\dfrac{A}{2}=\varphi'(0)$，所以 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处

连续.

*48*.【解】把 $x=1$ 代入不等式中，得 $f(1)=2\mathrm{e}$.

当 $x\neq 1$ 时，不等式两边同除以 $|x-1|$，得

$$0\leqslant\frac{|f(x)-2\mathrm{e}^x|}{|x-1|}\leqslant|x-1|\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2\mathrm{e}^x}{x-1}=0.$$

而 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2\mathrm{e}^x}{x-1}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}+\dfrac{2\mathrm{e}-2\mathrm{e}^x}{x-1}\right]=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=2\mathrm{e}.$

*49*.【解】由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{\sin x}$ 得 $f(0)=f'(0)=0$，

又 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)=2$，

则 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的曲率为 $K=\dfrac{2}{(1+0)^{\frac{3}{2}}}=2.$

*50*.【解】因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $c=0$，即 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0,\\ ax^2+bx, & x\leqslant0.\end{cases}$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^2+bx}{x}=b,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，得 $b=1$，即 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0,\\ ax^2+x, & x\leqslant0,\end{cases}$

于是 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x>0,\\ 2ax+1, & x\leqslant0.\end{cases}$

$$f''_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2ax+1-1}{x}=2a,$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{x}=-1,$$

由 $f''(0)$ 存在，得 $a=-\dfrac{1}{2}$，即 $a=-\dfrac{1}{2},b=1,c=0.$

*51*.【证明】(1) 令 $\varphi(x)=f(x)-x$，$\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}>0,\varphi(1)=-1<0$，

由零点定理，存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $\varphi(\eta)=0$，即 $f(\eta)=\eta$.

(2) 设 $F(x)=\mathrm{e}^{-kx}\varphi(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内可导，且 $F(0)=F(\eta)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $F'(\xi)=0$，整理得 $f'(\xi)-k[f(\xi)-\xi]=1.$

*52*.【证明】由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[f(x)+2]}{\cos\frac{\pi}{2}x}=0$，得 $f(1)=-1$，

又 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[f(x)+2]}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+1}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}$，所以 $f'(1)=0.$

由积分中值定理得 $f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)\mathrm{d}x=f(c)$，其中 $c\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$，

由罗尔定理，存在 $x_0\in(c,2)\subset(1,2)$，使得 $f'(x_0)=0$.

令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x f'(x)$，则 $\varphi(1)=\varphi(x_0)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi\in(1,x_0)\subset(0,2)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，

而 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)+f''(x)]$ 且 $\mathrm{e}^x\neq 0$，所以 $f'(\xi)+f''(\xi)=0$.

**53.【证明】** 因为 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导，所以 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，从而 $|f(x)|$ 在$[0,1]$上连续，故 $|f(x)|$ 在$[0,1]$上取到最大值 $M$，即存在 $x_0\in[0,1]$，使得 $|f(x_0)|=M$.

当 $x_0=0$ 时，则 $M=0$，所以 $f(x)\equiv 0, x\in[0,1]$；

当 $x_0\neq 0$ 时，$M=|f(x_0)|=|f(x_0)-f(0)|=|f'(\xi)|x_0\leqslant|f'(\xi)|\leqslant\frac{1}{2}|f(\xi)|\leqslant\frac{M}{2}$，

其中 $\xi\in(0,x_0)$，故 $M=0$，于是 $f(x)\equiv 0, x\in[0,1]$.

**54.【证明】** 令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，由微分中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}=\mathrm{e}^\eta[f'(\eta)+f(\eta)],$$

再由 $f(a)=f(b)=1$，得 $\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}=\mathrm{e}^\eta[f'(\eta)+f(\eta)]$，

从而 $\frac{\mathrm{e}^{2b}-\mathrm{e}^{2a}}{b-a}=(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b)\mathrm{e}^\eta[f'(\eta)+f(\eta)]$，

令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{2x}$，由微分中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{\mathrm{e}^{2b}-\mathrm{e}^{2a}}{b-a}=2\mathrm{e}^{2\xi}$，

即 $2\mathrm{e}^{2\xi}=(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b)\mathrm{e}^\eta[f'(\eta)+f(\eta)]$，或 $2\mathrm{e}^{2\xi-\eta}=(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b)[f'(\eta)+f(\eta)]$.

**55.【分析】** 在使用泰勒中值定理时，若已知条件中给出某点的一阶导数，则函数在该点展开；若结论中是关于某点的一阶导数，则在该点展开；若既未给出某点的一阶导数的条件，结论中又不涉及某点的一阶导数，往往函数在区间的中点处展开.

**【证明】** 因为 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，所以 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$，由闭区间上连续函数最值定理知，$f(x)$ 在$[0,1]$取到最小值且最小值在$(0,1)$内达到，即存在 $c\in(0,1)$，使得 $f(c)=-1$，再由费马定理知 $f'(c)=0$，

根据泰勒公式

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-c)^2, \xi_1\in(0,c)$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2, \xi_2\in(c,1)$$

整理得

$$f''(\xi_1)=\frac{2}{c^2},\quad f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-c)^2}.$$

当 $c\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 时，$f''(\xi_1)=\frac{2}{c^2}\geqslant 8$，取 $\xi=\xi_1$；

当 $c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 时，$f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-c)^2}\geqslant 8$，取 $\xi=\xi_2$.

所以存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f''(\xi) \geqslant 8$.

**56.**【证明】设运动规律为 $S=S(t)$，显然 $S(0)=0, S'(0)=0, S(1)=1, S'(1)=0$. 由泰勒公式

$S\left(\frac{1}{2}\right)=S(0)+\frac{S''(\xi_1)}{2!}\cdot\frac{1}{4}, S\left(\frac{1}{2}\right)=S(1)+\frac{S''(\xi_2)}{2!}\cdot\frac{1}{4}, \xi_1 \in \left(0,\frac{1}{2}\right), \xi_2 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$

两式相减，得 $S''(\xi_2)-S''(\xi_1)=-8 \Rightarrow |S''(\xi_1)|+|S''(\xi_2)| \geqslant 8$.

当 $|S''(\xi_1)| \geqslant |S''(\xi_2)|$ 时，$|S''(\xi_1)| \geqslant 4$；当 $|S''(\xi_1)| < |S''(\xi_2)|$ 时，$|S''(\xi_2)| \geqslant 4$.

**57.**【证明】由泰勒公式得

$$f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2, \xi_1 \in (0,x),$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2, \xi_2 \in (x,1),$$

两式相减，得 $f'(x)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x)^2$.

两边取绝对值，再由 $|f''(x)| \leqslant 1$，得

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}[x^2+(1-x)^2]=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2}.$$

**58.**【证明】(1) 对任意 $x \in (-1,1)$，根据微分中值定理，得

$$f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x], \text{其中 } 0<\theta(x)<1.$$

因为 $f''(x) \in C(-1,1)$ 且 $f''(x) \neq 0$，所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内保号，不妨设 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内单调增加，又由于 $x \neq 0$，所以 $\theta(x)$ 是唯一的.

(2) 由泰勒公式，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2, \text{其中 } \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间},$$

而 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x]$，所以有

$f'[\theta(x)x]=f'(0)+\frac{f''(\xi)}{2!}x \Rightarrow \frac{f'[x\theta(x)]-f'(0)}{x\theta(x)}\cdot\theta(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}$,

令 $x \to 0$，再由二阶导数的连续性及非零性，得 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

**59.**【证明】由泰勒公式得

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2, \xi_1 \in \left(a,\frac{a+b}{2}\right)$,

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2, \xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2},b\right)$,

即 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_1)$，　$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(\xi_2)$,

两式相减得 $f(b)-f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$,

取绝对值得 $|f(b)-f(a)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]$.

(1) 当 $|f''(\xi_1)| \geqslant |f''(\xi_2)|$ 时，取 $\xi=\xi_1$，则有 $|f''(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$；

(2) 当 $|f''(\xi_1)|<|f''(\xi_2)|$ 时,取 $\xi=\xi_2$,则有 $|f''(\xi)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

**60.【证明】** 由泰勒公式得

$$f(-1)=f(0)+f'(0)(-1-0)+\frac{f''(0)}{2!}(-1-0)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(-1-0)^3,\xi_1\in(-1,0),$$

$$f(1)=f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{f''(0)}{2!}(1-0)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(1-0)^3,\xi_2\in(0,1),$$

即 $f(0)+\dfrac{f''(0)}{2!}-\dfrac{f'''(\xi_1)}{6}=0$, $f(0)+\dfrac{f''(0)}{2!}+\dfrac{f'''(\xi_2)}{6}=1$,

两式相减得 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$.

因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三阶连续可导,所以 $f'''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续,由连续函数最值定理,$f'''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上取到最小值 $m$ 和最大值 $M$,故 $2m\leqslant f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\leqslant 2M$,即 $m\leqslant 3\leqslant M$.

由闭区间上连续函数介值定理,存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$,使得 $f'''(\xi)=3$.

**61.【证明】** 因为 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内二阶可导,所以有

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

其中 $\xi_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$,$\xi_2\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$.

两式相加得 $f(a)+f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\dfrac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$.

因为 $f''(x)$ 在 $(a,b)$ 内连续,所以 $f''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续,从而 $f''(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上取到最小值 $m$ 和最大值 $M$,故 $m\leqslant\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}\leqslant M$,

由介值定理,存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$,使得 $\dfrac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}=f''(\xi)$,

故 $f(a)+f(b)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\dfrac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$.

**62.** (1)**【解】** $f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$,其中 $\xi$ 介于 $c$ 与 $x$ 之间.

(2)**【证明】** 分别令 $x=0,x=1$,得

$$f(0)=f(c)-f'(c)c+\frac{f''(\xi_1)}{2!}c^2,\xi_1\in(0,c),$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2,\xi_2\in(c,1),$$

两式相减,得 $f'(c)=f(1)-f(0)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2!}c^2-\dfrac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2$,利用已知条件,得

$$|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}[c^2+(1-c)^2],$$

因为 $c^2+(1-c)^2\leqslant 1$，所以 $|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.

**63.** (1)**【解】** 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$ 存在，得 $f(0)=0,f'(0)=0,f''(0)=0$，

则 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的麦克劳林公式为

$$f(x)=\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

其中 $\xi$ 介于 0 与 $x$ 之间.

(2)**【证明】** 上式两边积分得 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{24}\int_{-a}^{a}f^{(4)}(\xi)x^4\mathrm{d}x$.

因为 $f^{(4)}(x)$ 在 $[-a,a]$ 上为连续函数，所以 $f^{(4)}(x)$ 在 $[-a,a]$ 上取到最大值 $M$ 和最小值 $m$，于是有 $mx^4\leqslant f^{(4)}(\xi)x^4\leqslant Mx^4$，

两边在 $[-a,a]$ 上积分得 $\frac{2m}{5}a^5\leqslant\int_{-a}^{a}f^{(4)}(\xi)x^4\mathrm{d}x\leqslant\frac{2M}{5}a^5$，

从而 $\frac{ma^5}{60}\leqslant\frac{1}{24}\int_{-a}^{a}f^{(4)}(\xi)x^4\mathrm{d}x\leqslant\frac{Ma^5}{60}$，或 $\frac{ma^5}{60}\leqslant\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{Ma^5}{60}$，

于是 $m\leqslant\frac{60}{a^5}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$，

根据介值定理，存在 $\xi_1\in[-a,a]$，使得

$f^{(4)}(\xi_1)=\frac{60}{a^5}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$，或 $a^5f^{(4)}(\xi_1)=60\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

再由积分中值定理，存在 $\xi_2\in[-a,a]$，使得

$a^5f^{(4)}(\xi_1)=60\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=120af(\xi_2)$，即 $a^4f^{(4)}(\xi_1)=120f(\xi_2)$.

**64.** **【证明】** 由 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+$

$$\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}(x-x_0)^4,$$

$$f(x')=f(x_0)+f'(x_0)(x'-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x'-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x'-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}(x'-x_0)^4,$$

两式相加得

$$f(x)+f(x')-2f(x_0)=f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{24}[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)](x-x_0)^4,$$

于是 $\left|f''(x_0)-\frac{f(x)+f(x')-2f(x_0)}{(x-x_0)^2}\right|\leqslant\frac{1}{24}[|f^{(4)}(\xi_1)|+|f^{(4)}(\xi_2)|](x-x_0)^2$，

再由 $|f^{(4)}(x)|\leqslant M$，得

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(x)+f(x')-2f(x_0)}{(x-x_0)^2}\right|\leqslant\frac{M}{12}(x-x_0)^2.$$

**65.** **【证明】** 设 $f'_+(a)>0,f'_-(b)>0$，

由 $f'_+(a)>0$，得存在 $x_1\in(a,b)$，使得 $f(x_1)>f(a)=0$；

由 $f'_-(b)>0$，得存在 $x_2\in(a,b)$，使得 $f(x_2)<f(b)=0$，

因为 $f(x_1)f(x_2)<0$，所以由零点定理，存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$.

令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，显然 $h(x)$ 在$[a,b]$上连续，由 $h(a)=h(c)=h(b)=0$，

存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得 $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$，

而 $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$，所以 $\begin{cases}f'(\xi_1)g(\xi_1)-f(\xi_1)g'(\xi_1)=0,\\ f'(\xi_2)g(\xi_2)-f(\xi_2)g'(\xi_2)=0.\end{cases}$

令 $\varphi(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$，　$\varphi(\xi_1)=\varphi(\xi_2)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，

而 $\varphi'(x)=f''(x)g(x)-f(x)g''(x)$，所以 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

**66.【证明】** 因为 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_+(a)>0$，所以存在 $\delta>0$，当 $0<x-a<\delta$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，从而 $f(x)>f(a)$，于是存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)>f(a)=0$.

由微分中值定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\quad f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0.$$

再由微分中值定理及 $f(x)$ 的二阶可导性，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

**67.【证明】** 不妨设 $a\leqslant b$，由微分中值定理，存在 $\xi_1\in(0,a)$，$\xi_2\in(b,a+b)$，使得

$$\begin{cases}f(a)-f(0)=f'(\xi_1)a,\\ f(a+b)-f(b)=f'(\xi_2)a,\end{cases}$$

两式相减得 $f(a+b)-f(a)-f(b)=[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]a$.

因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 单调增加，而 $\xi_1<\xi_2$，所以 $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$，

故 $f(a+b)-f(a)-f(b)=[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]a>0$，即

$$f(a+b)>f(a)+f(b).$$

**68.【证明】** 令 $x_0=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，则 $x_0\in[a,b]$，由泰勒公式得

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$，其中 $\xi$ 介于 $x_0$ 与 $x$ 之间，

因为 $f''(x)>0$，所以 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，

于是 $\begin{cases}\lambda f(x_1)\geqslant\lambda f(x_0)+\lambda f'(x_0)(x_1-x_0),\\ (1-\lambda)f(x_2)\geqslant(1-\lambda)f(x_0)+(1-\lambda)f'(x_0)(x_2-x_0),\end{cases}$

两式相加，得 $f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

**69.【证明】** 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，得 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，

又由 $f''(x)>0$ 且 $x\neq0$，所以 $f(x)>f(0)+f'(0)x=x$.

**70.【证明】** 令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，则 $\varphi(x)$ 在$[0,+\infty)$内可导，

又 $\varphi(0)=1$，$\varphi'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)]<0(x>0)$，所以当 $x>0$ 时，$\varphi(x)<\varphi(0)=1$，

所以有 $f(x)<\mathrm{e}^{x}(x>0)$.

71.【证明】令 $x_0=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n$，显然 $x_0\in[a,b]$.

因为 $f''(x)>0$，所以 $f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，

分别取 $x=x_i(i=1,2,\cdots,n)$，得

$$\begin{cases}f(x_1)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0),\\ f(x_2)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0),\\ \vdots\\ f(x_n)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_n-x_0),\end{cases}$$

由 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，上述各式分别乘以 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$，得

$$\begin{cases}k_1f(x_1)\geqslant k_1f(x_0)+f'(x_0)k_1(x_1-x_0),\\ k_2f(x_2)\geqslant k_2f(x_0)+f'(x_0)k_2(x_2-x_0),\\ \vdots\\ k_nf(x_n)\geqslant k_nf(x_0)+f'(x_0)k_n(x_n-x_0),\end{cases}$$

将上述各式分别相加，得 $f(x_0)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n)$，即

$$f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n).$$

72.【证明】令 $\varphi(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$，$\varphi(1)=0$.

$\varphi'(x)=2x\ln x-x+2-\dfrac{1}{x}$，$\varphi'(1)=0$，　$\varphi''(x)=2\ln x+1+\dfrac{1}{x^2}$，$\varphi''(1)=2>0$，

$\varphi'''(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x^3}$，

则 $\begin{cases}\varphi'''(x)<0,0<x<1,\\ \varphi'''(x)>0,x>1,\end{cases}$ 故 $x=1$ 为 $\varphi''(x)$ 的极小值点，由其唯一性得其也为最小值点，而最小值为 $\varphi''(1)=2>0$，故 $\varphi''(x)>0(x>0)$.

由 $\begin{cases}\varphi'(1)=0,\\ \varphi''(x)>0(x>0),\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\varphi'(x)<0,0<x<1,\\ \varphi'(x)>0,x>1,\end{cases}$

故 $x=1$ 为 $\varphi(x)$ 的极小值点，也为最小值点，而最小值为 $\varphi(1)=0$，

所以 $x>0$ 时，$\varphi(x)\geqslant 0$，即 $(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

73.【证明】**方法一**　令 $f(x)=(\sqrt{2}+1)\ln(1+x)-2\arctan x$，$f(0)=0$.

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{2}+1}{1+x}-\dfrac{2}{1+x^2}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)x^2-2x+\sqrt{2}-1}{(1+x)(1+x^2)}$，

对 $(\sqrt{2}+1)x^2-2x+\sqrt{2}-1$，因为 $\Delta=4-4(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=0$ 且 $\sqrt{2}+1>0$，

所以 $(\sqrt{2}+1)x^2-2x+\sqrt{2}-1\geqslant 0$，从而 $f'(x)\geqslant 0(x>0)$.

由 $\begin{cases}f'(x)\geqslant 0(x>0),\\ f(0)=0,\end{cases}$ 得 $f(x)\geqslant f(0)=0(x>0)$，即 $\dfrac{\arctan x}{\ln(1+x)}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}(x>0)$.

**方法二**　令 $f(x)=\arctan x$，$F(x)=\ln(1+x)$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，$F'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，

显然 $f(0)=0$，$F(0)=0$.

由柯西中值定理，存在 $\xi\in(0,x)$，使得

$$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}=\frac{f(x)-f(0)}{F(x)-F(0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{1+\xi}{1+\xi^2}.$$

令 $\varphi(x)=\dfrac{1+x}{1+x^2}$,由 $\varphi'(x)=\dfrac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}=0$,得 $x=\sqrt{2}-1$.

当 $x\in(0,\sqrt{2}-1)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(\sqrt{2}-1,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,则 $x=\sqrt{2}-1$ 为 $\varphi(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内的最大值点,最大值为 $M=\varphi(\sqrt{2}-1)=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$,

所以
$$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}=\frac{1+\xi}{1+\xi^2}\leqslant\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

74.【证明】首先证明 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

因为 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\Leftrightarrow(\ln b-\ln a)-\dfrac{b-a}{\sqrt{ab}}<0$,所以令 $\varphi(x)=\ln x-\ln a-\dfrac{x-a}{\sqrt{xa}}$,

$\varphi(a)=0,\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{a}{2x\sqrt{x}}\right)=-\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0(x>a)$,

由 $\begin{cases}\varphi(a)=0\\ \varphi'(x)<0(x>a)\end{cases}\Rightarrow\varphi(x)<0(x>a)$,而 $b>a$,所以 $\varphi(b)<0$,即 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

再证 $\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$.

**方法一** 因为 $\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}\Leftrightarrow(b^2+a^2)(\ln b-\ln a)-2a(b-a)>0$,所以令 $f(x)=(x^2+a^2)(\ln x-\ln a)-2a(x-a)$,$f(a)=0$,

$f'(x)=2x(\ln x-\ln a)+x+\dfrac{a^2}{x}-2a=2x(\ln x-\ln a)+\dfrac{(x-a)^2}{x}>0(x>a)$.

由 $\begin{cases}f(a)=0\\ f'(x)>0(x>a)\end{cases}\Rightarrow f(x)>0(x>a)$,因为 $b>a$,所以 $f(b)>f(a)=0$,

即 $\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$.

**方法二** 令 $f(x)=\ln x$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}=\dfrac{1}{\xi}$,其中 $0<a<\xi<b$,则 $\dfrac{1}{\xi}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{2a}{a^2+b^2}$,所以 $\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$.

75.【解】根据隐函数求导法,得 $y'=\dfrac{y-2x}{3y^2-x}$.

令 $y'=\dfrac{y-2x}{3y^2-x}=0$,得 $y=2x$,再将 $y=2x$ 代入原方程得 $x=\dfrac{1}{8}$,函数值为 $y=\dfrac{1}{4}$.

$y''=\dfrac{(y'-2)(3y^2-x)-(y-2x)(6yy'-1)}{(3y^2-x)^2}$,将 $x=\dfrac{1}{8},y=\dfrac{1}{4},y'=0$ 代入 $y''$ 得

$y''\Big|_{x=\frac{1}{8}}=-32<0$,所以 $x=\dfrac{1}{8}$ 为函数的极大值点,且极大值为 $y=\dfrac{1}{4}$.

76.【证明】令 $\varphi(x)=e^{-x}[f(x)+f'(x)]$.

因为 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$,所以由罗尔定理,存在 $c\in(0,1)$ 使得 $\varphi'(c)=0$,

而 $\varphi'(x)=e^{-x}[f''(x)-f(x)]$ 且 $e^{-x}\neq 0$，所以方程 $f''(c)-f(c)=0$ 在 $(0,1)$ 内有根.

**77.**【解】$f(x)\geqslant 20$ 等价于 $A\geqslant 20x^3-3x^5$，

令 $\varphi(x)=20x^3-3x^5$，由 $\varphi'(x)=60x^2-15x^4=0$，得 $x=2$，

$\varphi''(x)=120x-60x^3$，因为 $\varphi''(2)=-240<0$，所以 $x=2$ 为 $\varphi(x)$ 的最大值点，最大值为 $\varphi(2)=64$，故 $A$ 至少取 64 时，有 $f(x)\geqslant 20$.

**78.**【证明】因为 $f''(x)\geqslant 0$，所以 $f'(x)$ 单调不减，当 $x>0$ 时，$f'(x)\geqslant f'(0)=1$.

当 $x>0$ 时，$f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，从而 $f(x)\geqslant f(0)+x$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(0)+x]=+\infty$，

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)=-2<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，则 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少有一个根，又由 $f'(x)\geqslant 1>0$，得方程的根是唯一的.

**79.** (1)【证明】令 $\varphi_n(x)=f_n(x)-1$，因为 $\varphi_n(0)=-1<0$，$\varphi_n(1)=n-1>0$，所以 $\varphi_n(x)$ 在 $(0,1)\subset(0,+\infty)$ 内有一个零点，即方程 $f_n(x)=1$ 在 $(0,+\infty)$ 内有一个根.

因为 $\varphi'_n(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0$，所以 $\varphi_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，所以 $\varphi_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点唯一，所以方程 $f_n(x)=1$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一正根，记为 $x_n$.

(2)【解】由 $f_n(x_n)-f_{n+1}(x_{n+1})=0$，得

$(x_n-x_{n+1})+(x_n^2-x_{n+1}^2)+\cdots+(x_n^n-x_{n+1}^n)=x_{n+1}^{n+1}>0$，从而 $x_n>x_{n+1}$，所以 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调减少，又 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，显然 $A\leqslant x_n\leqslant x_1=1$，

由 $x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=1$，得 $\dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1$，

两边求极限得 $\dfrac{A}{1-A}=1$，解得 $A=\dfrac{1}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$.

**80.**【解】$ae^x=x^2$ 等价于 $x^2e^{-x}-a=0$.

令 $f(x)=x^2e^{-x}-a$，由 $f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}=0$ 得 $x=0,x=2$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $0<x<2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，

于是 $x=0$ 为极小值点，极小值为 $f(0)=-a<0$；$x=2$ 为极大值点，极大值为 $f(2)=\dfrac{4}{e^2}-a$，

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-a<0$.

(1) 当 $\dfrac{4}{e^2}-a>0$，即 $0<a<\dfrac{4}{e^2}$ 时，方程有三个根；

(2) 当 $\dfrac{4}{e^2}-a=0$，即 $a=\dfrac{4}{e^2}$ 时，方程有两个根.

(3) 当 $\dfrac{4}{e^2}-a<0$，即 $a>\dfrac{4}{e^2}$ 时，方程只有一个根.

**81.**【解】令 $f(x)=x^3-3x+k$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

由 $f'(x)=3x^2-3=0$，得驻点为 $x_1=-1,x_2=1$. $f''(x)=6x$，由 $f''(-1)=-6$，$f''(1)=6$，得 $x_1=-1,x_2=1$ 分别为 $f(x)$ 的极大值点和极小值点，极大值和极小值分别为 $f(-1)=2+k$，$f(1)=k-2$.

(1) 当 $k<-2$ 时，方程只有一个根；

(2) 当 $k=-2$ 时,方程有两个根,其中一个为 $x=-1$,另一个位于 $(1,+\infty)$ 内;

(3) 当 $-2<k<2$ 时,方程有三个根,分别位于 $(-\infty,-1)$,$(-1,1)$,$(1,+\infty)$ 内;

(4) 当 $k=2$ 时,方程有两个根,一个位于 $(-\infty,-1)$ 内,另一个为 $x=1$;

(5) 当 $k>2$ 时,方程只有一个根.

82.【解】令 $f(x)=kx-\dfrac{1}{x}+1$,$f'(x)=k+\dfrac{1}{x^2}$,$x\in(0,+\infty)$.

(1) 若 $k>0$,由 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,又 $f'(x)=k+\dfrac{1}{x^2}>0$,所以原方程在 $(0,+\infty)$ 内恰有一个实根;

(2) 若 $k=0$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1>0$,又 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$,所以原方程也恰有一个实根;

(3) 若 $k<0$,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$,令 $f'(x)=k+\dfrac{1}{x^2}=0\Rightarrow x_0=\dfrac{1}{\sqrt{-k}}$,又 $f''(x)=-\dfrac{2}{x^3}<0$,所以 $f(x_0)=1-2\sqrt{-k}$ 为 $f(x)$ 的最大值,令 $1-2\sqrt{-k}=0$,得 $k=-\dfrac{1}{4}$,所以 $k$ 的取值范围是 $\left\{k\,\middle|\,k=-\dfrac{1}{4}\text{ 或 }k\geqslant0\right\}$.

83.【解】

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)}{x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\xi)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}=\frac{1}{2}f''(0)\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{\xi}{x}.$$

对 $x>0$,有 $\ln(1+x)<\xi<x\Rightarrow\dfrac{\ln(1+x)}{x}<\dfrac{\xi}{x}<1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\xi}{x}=1$,同理 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\xi}{x}=1$,所以原式 $=2$.

84.【解】曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$,令 $Y=0$ 得 $u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$,由泰勒公式得

$$f(u)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)u^2\text{,其中 }\xi_1\text{ 介于 0 与 }u\text{ 之间,}$$
$$f(x)=\frac{1}{2}f''(\xi_2)x^2\text{,其中 }\xi_2\text{ 介于 0 与 }x\text{ 之间,}$$

于是
$$\lim_{x\to0}\frac{xf(u)}{uf(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f''(\xi_1)}{f''(\xi_2)}\cdot\frac{u}{x}=\lim_{x\to0}\frac{u}{x}=\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)-f(x)}{xf'(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{xf''(x)}{xf''(x)+f'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{f''(x)+\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\frac{f''(0)}{f''(0)+f''(0)}=\frac{1}{2}.$$

85.【解】(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{g(x)-g(0)}{x}+\dfrac{1-\cos x}{x}\right]=g'(0)$,

当 $a=g'(0)$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 当 $x\neq0$ 时,$f'(x)=\dfrac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}$

而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\cos x-g'(0)x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{g'(x)-g'(0)}{x}+\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[g''(0)+1]$$

所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}[g''(0)+1], & x=0.\end{cases}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{x[g'(x)+\sin x]-[g(x)-\cos x]}{x^2}\right\}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x+x[g''(x)+\cos x]-g'(x)-\sin x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}[g''(x)+1]=\frac{1}{2}[g''(0)+1],$$

因为$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$,所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

***86***.**【证明】**令 $\varphi(x)=e^{-x}\int_0^x f(t)dt$,

因为 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$,所以存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$,

而 $\varphi'(x)=e^{-x}[f(x)-\int_0^x f(t)dt]$ 且 $e^{-x}\neq 0$,故 $f(\xi)=\int_0^{\xi}f(t)dt$.

***87***.**【证明】方法一** 先作一个函数 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,使得

$P(0)=f(0)=1$, $P'(1)=f'(1)=0$, $P(2)=f(2)=\dfrac{5}{3}$, $P(1)=f(1)$.

则 $P(x)=\dfrac{x^3}{3}+\left[\dfrac{1}{3}-f(1)\right]x^2+\left[2f(1)-\dfrac{5}{3}\right]x+1$,

令 $g(x)=f(x)-P(x)$,则 $g(x)$ 在$[0,2]$上三阶可导,且 $g(0)=g(1)=g(2)=0$,所以存在 $c_1\in(0,1)$,$c_2\in(1,2)$,使得 $g'(c_1)=g'(1)=g'(c_2)=0$,又存在 $d_1\in(c_1,1)$,$d_2\in(1,c_2)$ 使得 $g''(d_1)=g''(d_2)=0$,再由罗尔定理,存在 $\xi\in(d_1,d_2)\subset(0,2)$,使得 $g'''(\xi)=0$,而 $g'''(x)=f'''(x)-2$,所以 $f'''(\xi)=2$.

**方法二** 由泰勒公式,得

$$1=f(0)=f(1)+\frac{f''(1)}{2}-\frac{f'''(\xi_1)}{6},\xi_1\in(0,1),$$

$$\frac{5}{3}=f(2)=f(1)+\frac{f''(1)}{2}+\frac{f'''(\xi_2)}{6},\xi_2\in(1,2),$$

两式相减,得$\dfrac{2}{3}=\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{6}$,而$f'''(x)\in C[0,2]$,所以存在$\xi\in(0,2)$,使得$f'''(\xi)=2$.

***88***.**【证明】**令 $h=\dfrac{b-a}{n}$,因为 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续且单调增加,且 $f(a)=a<b=f(b)$,

所以 $f(a)=a<a+h<\cdots<a+(n-1)h<b=f(b)$,由端点介值定理和函数单调性,

存在 $a<c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}<b$,使得

$$f(c_1)=a+h,f(c_2)=a+2h,\cdots,f(c_{n-1})=a+(n-1)h,$$

再由微分中值定理,得

$$f(c_1)-f(a)=f'(\xi_1)(c_1-a),\xi_1\in(a,c_1),$$
$$f(c_2)-f(c_1)=f'(\xi_2)(c_2-c_1),\xi_2\in(c_1,c_2),$$
$$\vdots$$
$$f(b)-f(c_{n-1})=f'(\xi_n)(b-c_{n-1}),\xi_n\in(c_{n-1},b),$$

从而有 $h\left[\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}+\cdots+\frac{1}{f'(\xi_n)}\right]=b-a\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f'(\xi_i)}=1.$

**89.【解】**因为函数的一阶导数与其反函数的一阶导数互为倒数,所以 $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$,

于是 $\varphi''(y)=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}=\frac{\left[\frac{1}{f'(x)}\right]'}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}.$

**90.【证明】**由微分中值定理得 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$,其中 $\xi$ 介于 $x_0$ 与 $x$ 之间,则 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$,由 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=M$ 得 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}f'(\xi)=\lim\limits_{\xi\to x_0}f'(\xi)=M$,即 $f'(x_0)=M$.

**91.【证明】**令 $\varphi(x)=(x-1)^2f'(x)$,显然 $\varphi(x)$ 在$[0,1]$上可导.由 $f(0)=f(1)=0$,根据罗尔定理,存在 $c\in(0,1)$,使得 $f'(c)=0$,再由 $\varphi(c)=\varphi(1)=0$,根据罗尔定理,存在 $\xi\in(c,1)\subset(0,1)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$,而 $\varphi'(x)=2(x-1)f'(x)+(x-1)^2f''(x)$,所以 $2(\xi-1)f'(\xi)+(\xi-1)^2f''(\xi)=0$,整理得 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

**92.【证明】**因为 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,$f(0)=0,f(1)=1$,且 $f(0)<\frac{a}{a+b}<f(1)$,所以由端点介值定理,存在 $c\in(0,1)$,使得 $f(c)=\frac{a}{a+b}$.

由微分中值定理,存在 $\xi\in(0,c),\eta\in(c,1)$,使得

$$\begin{cases}f(c)-f(0)=f'(\xi)c,\\ f(1)-f(c)=f'(\eta)(1-c),\end{cases}\text{即}\begin{cases}\frac{a}{a+b}=f'(\xi)c,\\ \frac{b}{a+b}=f'(\eta)(1-c),\end{cases}\text{整理得}$$

$$\begin{cases}\frac{a}{f'(\xi)}=(a+b)c,\\ \frac{b}{f'(\eta)}=(a+b)(1-c),\end{cases}\text{两式相加得}$$

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

**93.【证明】**(1) 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,在$(a,b)$内可导,且 $F'(x)=f(x)$.故存在 $c\in(a,b)$,使得

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a) = 0$，即 $f(c)=0$.

(2) 令 $h(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，因为 $h(a)=h(c)=h(b)=0$，所以由罗尔定理，存在 $\xi_1 \in (a,c)$，$\xi_2 \in (c,b)$，使得 $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)=0$，

而 $h'(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)+f(x)]$ 且 $\mathrm{e}^x \neq 0$，所以 $f'(\xi_i)+f(\xi_i)=0(i=1,2)$.

(3) 令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)+f(x)]$，$\varphi(\xi_1)=\varphi(\xi_2)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，

而 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f''(x)-f(x)]$ 且 $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$，所以 $f''(\xi)=f(\xi)$.

(4) 令 $g(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，　$g(a)=g(c)=g(b)=0$，

由罗尔定理，存在 $\eta_1 \in (a,c)$，$\eta_2 \in (c,b)$，使得 $g'(\eta_1)=g'(\eta_2)=0$，

而 $g'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)]$ 且 $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$，所以 $f'(\eta_1)-f(\eta_1)=0$，$f'(\eta_2)-f(\eta_2)=0$.

令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-2x}[f'(x)-f(x)]$，　$\varphi(\eta_1)=\varphi(\eta_2)=0$，

由罗尔定理，存在 $\eta \in (\eta_1,\eta_2) \subset (a,b)$，使得 $\varphi'(\eta)=0$，

而 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{-2x}[f''(x)-3f'(x)+2f(x)]$ 且 $\mathrm{e}^{-2x} \neq 0$，

所以 $f''(\eta)-3f'(\eta)+2f(\eta)=0$.

**94.【证明】** 当 $c=a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时，对任意的 $\xi \in (a_1,a_n)$，结论成立；

设 $c$ 为异于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的数，不妨设 $a_1 < c < a_2 < \cdots < a_n$.

令 $k=\dfrac{f(c)}{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}$，

构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-k(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$，显然 $\varphi(x)$ 在 $[a_1,a_n]$ 上 $n$ 阶可导，且 $\varphi(a_1)=\varphi(c)=\varphi(a_2)=\cdots=\varphi(a_n)=0$，

由罗尔定理，存在 $\xi_1^{(1)} \in (a_1,c)$，$\xi_2^{(1)} \in (c,a_2)$，$\cdots$，$\xi_n^{(1)} \in (a_{n-1},a_n)$，使得 $\varphi'(\xi_1^{(1)})=\varphi'(\xi_2^{(1)})=\cdots=\varphi'(\xi_n^{(1)})=0$，即 $\varphi'(x)$ 在 $(a_1,a_n)$ 内至少有 $n$ 个不同零点，重复使用罗尔定理，则 $\varphi^{(n-1)}(x)$ 在 $(a_1,a_n)$ 内至少有两个不同零点，设为 $c_1,c_2 \in (a_1,a_n)$，使得 $\varphi^{(n-1)}(c_1)=\varphi^{(n-1)}(c_2)=0$，

再由罗尔定理，存在 $\xi \in (c_1,c_2) \subset (a_1,a_n)$，使得 $\varphi^{(n)}(\xi)=0$.

而 $\varphi^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-n!\,k$，所以 $f^{(n)}(\xi)=n!\,k$，从而有

$$f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi).$$

**95.【证明】** 由泰勒公式得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2!}h^2，其中\ \xi\ 介于\ x\ 与\ x+h\ 之间.$$

由已知条件得

$$f'(x+\theta h)h=f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2!}h^2，或\ f'(x+\theta h)-f'(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}h，$$

两边同除以 $h$，得 $\dfrac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{h}=\dfrac{f''(\xi)}{2}$，

而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+\theta h)-f'(x)}{\theta h}\cdot\theta=f''(x)\lim\limits_{h\to 0}\theta$，

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(\xi)}{2}=\dfrac{f''(x)}{2}$,两边取极限得 $f''(x)\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{f''(x)}{2}$,而 $f''(x)\neq 0$,故$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

**96.**【证明】因为 $f'(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,所以 $f'(x)$ 在区间$[0,1]$上取到最大值 $M$ 和最小值 $m$,对 $f(x)-f(0)=f'(c)x$(其中 $c$ 介于 0 与 $x$ 之间)两边积分得

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f'(c)x\,\mathrm{d}x$,

由 $m\leqslant f'(c)\leqslant M$ 得 $m\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f'(c)x\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$,

即 $m\leqslant 2\int_0^1 f'(c)x\,\mathrm{d}x\leqslant M$ 或 $m\leqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant M$,

由介值定理,存在 $\xi\in[0,1]$,使得 $f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

# 三、一元函数积分学

## ◇ 填空题

**1.**【解】由 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$,得 $f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,

$$\text{于是}\int\frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=2\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}(\sqrt{x})=\arcsin^2\sqrt{x}+C.$$

**2.**【解】由 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,得 $f(x)=\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}$,

$$\text{则}\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}+\int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}-\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{-x})=-\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}-\ln(1+\mathrm{e}^{-x})+C.$$

**3.**【解】由$\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$,得 $xf(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,所以 $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

**4.**【解】由$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=f(x)+x\sin x$,得$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}(xt)=xf(x)+x^2\sin x$,即

$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=xf(x)+x^2\sin x$,两边求导得 $f'(x)=-2\sin x-x\cos x$,积分得

$f(x)=\cos x-x\sin x+C.$

**5.【解】**$\int\frac{1+x}{x^2e^x(1+xe^x)}dx=\int\frac{(1+x)e^x}{(xe^x)^2(1+xe^x)}dx=\int\frac{1}{(xe^x)^2(1+xe^x)}d(xe^x)$

$$\overset{xe^x=t}{=\!=}\int\frac{1}{t^2(1+t)}dt=\int\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\ln|1+t|-\ln|t|-\frac{1}{t}+C$$

$$=\ln\left|\frac{1+xe^x}{xe^x}\right|-\frac{1}{xe^x}+C.$$

**6.【解】** $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$=\int\frac{1}{2\sqrt{x^2+x+1}}d(x^2+x+1)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$$

**7.【解】**$\int\frac{1}{3\sin^2x+2\cos^2x}dx=\int\frac{\sec^2x}{2+3\tan^2x}dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}\tan x)^2}d(\sqrt{3}\tan x)=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right)+C.$$

**8.【解】**$\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\int\left[\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}\right]dx=\arctan x-\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx,$

而$\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx\overset{x=\tan t}{=\!=}\int\frac{1}{\sec^4t}\sec^2t\,dt=\int\cos^2t\,dt$

$$=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}+C,$$

所以$\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\arctan x-\frac{x}{2(1+x^2)}+C.$

**9.【解】**$\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x\,dx=\int\arctan x\,dx-\int\arctan x\,d(\arctan x)$

$$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.$$

**10.【解】**$\max\{x+2,x^2\}=\begin{cases}x^2, & x\leqslant -1,\\ x+2, & -1<x<2,\\ x^2, & x\geqslant 2,\end{cases}$

当 $x \leqslant -1$ 时，$\int \max\{x+2,x^2\}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+C_1$；

当 $-1 < x < 2$ 时，$\int \max\{x+2,x^2\}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}+2x+C_2$；

当 $x \geqslant 2$ 时，$\int \max\{x+2,x^2\}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+C_3$.

由 $-\frac{1}{3}+C_1=\frac{1}{2}-2+C_2, 2+4+C_2=\frac{8}{3}+C_3$，得

$C_1=C_2-\frac{7}{6}, C_3=C_2+\frac{10}{3}$，取 $C_2=C$，

则 $\int \max\{x+2,x^2\}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{x^3}{3}+C-\frac{7}{6}, & x \leqslant -1 \\ \frac{x^2}{2}+2x+C, & -1<x<2. \\ \frac{x^3}{3}+C+\frac{10}{3}, & x \geqslant 2 \end{cases}$

**11.【解】** $\int \frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x\sec^2 x+\tan x}{(1-x\tan x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1-x\tan x)^2}\mathrm{d}(x\tan x)$

$$= -\int \frac{1}{(1-x\tan x)^2}\mathrm{d}(1-x\tan x) = \frac{1}{1-x\tan x}+C.$$

**12.【解】** 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n-1}} = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2, & 1<x \leqslant 2 \end{cases}$

所以 $\int_0^2 \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n-1}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}+\frac{7}{3}=\frac{17}{6}$.

**13.【解】** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^4\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x = 4-\pi.$$

**14.【解】** $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x = f(1)-\int_0^1\left[f(x)+\sqrt{2x-x^2}\right]\mathrm{d}x$

$$= 4-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \sqrt{1-(1-x)^2}\,\mathrm{d}(1-x)$$

$$= 4-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 4-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 4-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{\pi}{4},$$

于是 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2-\frac{\pi}{8}$.

15.【解】因为 $\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，于是

$$y(x)=\int\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}dx=\int\frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}d(2x-x^2)=\sqrt{2x-x^2}+C,$$

由 $y(1)=1$ 得 $C=0$，故 $y(x)=\sqrt{2x-x^2}$，

$$\int_0^1 y(x)dx=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,d(x-1)$$

$$\overset{t=x-1}{=}\int_{-1}^0\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}.$$

16.【解】因为 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=-2\int\frac{1}{\sqrt{1-(e^{-\frac{x}{2}})^2}}d(e^{-\frac{x}{2}})=-2\arcsin e^{-\frac{x}{2}}+C$，

所以 $\displaystyle\int_a^{2\ln2}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=-2\arcsin e^{-\frac{x}{2}}\Big|_a^{2\ln2}=-2\left(\frac{\pi}{6}-\arcsin e^{-\frac{a}{2}}\right)=\frac{\pi}{6}$，

则 $\arcsin e^{-\frac{a}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$，故 $a=\ln2$.

17.【解】$\displaystyle\int_0^\pi x\sqrt{\cos^2x-\cos^4x}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\sqrt{\cos^2x-\cos^4x}\,dx$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2x-\cos^4x}\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2x-\cos^4x}\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

18.【解】$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{1+f(x)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos x}{1+f(x)}+\frac{\cos x}{1+f(-x)}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left[\frac{1}{1+f(x)}+\frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}}\right]dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\left[\frac{1}{1+f(x)}+\frac{f(x)}{1+f(x)}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1.$$

19.【解】令 $I'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$，当 $x\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$I'(x)<0$，

当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]$ 时，$I'(x)>0$，所以 $x=\dfrac{1}{2}$ 为 $I(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值点，又

$$I(1)=\int_0^1\frac{2u-1}{u^2-u+1}du=\ln(u^2-u+1)\Big|_0^1=0,$$

$$I(-1)=\int_0^{-1}\frac{2u-1}{u^2-u+1}du=-\ln(u^2-u+1)\Big|_{-1}^0=-(0-\ln3)=\ln3,$$

故 $I(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 $\ln3$.

20.【解】$f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\,df(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx$$

$$=-1+\frac{2}{\pi}-\frac{\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-1+\frac{2}{\pi}-\left(0-\frac{2}{\pi}\right)=\frac{4}{\pi}-1.$$

21.【解】$\overline{y}=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=(\sqrt{3}+1)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\,dt$

$$=(\sqrt{3}+1)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 t\,dt=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2t)dt=\frac{\sqrt{3}+1}{12}\pi.$$

## ◇ 选择题

22.【解】$F(x)=\int_0^x f(x-t)dt=-\int_0^x f(x-t)d(x-t)\overset{x-t=u}{=}\int_0^x f(u)du$,

$G(x)=\int_0^1 xg(xt)dt\overset{xt=u}{=}\int_0^x g(u)du$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{G(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,选(D).

23.【解】由周期函数的平移性质,$F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$,再由对称区间积分性质得 $F(x)=\int_0^{\pi}(e^{\sin t}\sin t-e^{-\sin t}\sin t)dt=\int_0^{\pi}(e^{\sin t}-e^{-\sin t})\sin t\,dt$,

又$(e^{\sin t}-e^{-\sin t})\sin t$ 连续、非负、不恒为零,所以 $F(x)>0$,选(A).

24.【解】因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt}{\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}dt}=\dfrac{e}{5}\neq1$,所以两无穷小同阶但非等价,选(C).

25.【解】因为 $f(x)$ 在$(0,2)$ 内只有第一类间断点,所以 $g(x)$ 在$(0,2)$ 内连续,选(C).

26.【解】设 $\varphi(x)=\int_{-x}^{x}tf(t)dt=2\int_0^x tf(t)dt$,

$\varphi(x+T)=2\int_0^{x+T}tf(t)dt=2\int_0^x tf(t)dt+2\int_x^{x+T}tf(t)dt\neq\varphi(x)$,选(D).

27.【解】因为 $t[f(t)-f(-t)]$ 为偶函数,所以$\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$ 为奇函数,(A) 不对;

因为 $f(t^2)$ 为偶函数,所以$\int_0^x f(t^2)dt$ 为奇函数,(C) 不对;

因为不确定 $f^2(t)$ 的奇偶性,所以(D) 不对;

令 $F(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$,

$F(-x)=\int_0^{-x}t[f(t)+f(-t)]dt=\int_0^x(-u)[f(u)+f(-u)](-du)=F(x)$,选(B).

28.【解】$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2dx\overset{x^2=t}{=}\int_0^{2\pi}\dfrac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt=\int_0^{\pi}\dfrac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt+\int_{\pi}^{2\pi}\dfrac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{2\sqrt{t+\pi}}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t+\pi}}\right)\sin t\,dt>0,\text{选(B)}.$$

29.【解】曲线 $y=2\sqrt{x}$ 在点$(t,2\sqrt{t})$ 处的切线方程为 $y=2\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}(x-t)=\dfrac{x}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}$,

由于切线位于曲线 $y=2\sqrt{x}$ 的上方,所以由曲线 $y=2\sqrt{x}$,切线及 $x=1,x=3$ 围成的区域面积为 $S=S(t)=\int_1^3\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}-2\sqrt{x}\right)dx=\dfrac{4}{\sqrt{t}}+2\sqrt{t}-2\int_1^3\sqrt{x}\,dx$.

$S'(t)=-\frac{2}{t\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}}=0\Rightarrow t=2.$

当 $t\in(0,2)$ 时，$S'(t)<0$；当 $t\in(2,3)$ 时，$S'(t)>0$，则当 $t=2$ 时，$S(t)$ 取最小值，此时切线方程为 $y=\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$，选(A).

## ◇ 解答题

**30.【解】** $\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}x^3f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1+x^4)}{2\sqrt{1+x^4}}$$

$$=-\frac{1}{6}\sqrt{1+x^4}\Big|_0^1=\frac{1-\sqrt{2}}{6}.$$

**31.【解】** $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t\xlongequal{x-t=u}\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，

$f(x)=2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+\mathrm{e}^x$ 两边求导数得 $f'(x)-2f(x)=\mathrm{e}^x$，

则 $f(x)=(\int\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\int-2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)\mathrm{e}^{-\int-2\mathrm{d}x}=C\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$，

因为 $f(0)=1$，所以 $C=2$，故 $f(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$.

**32.【解】** $\int_0^{\sqrt{2}}x(4-x^4)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}(4-x^4)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int_0^2(4-x^2)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{x=2\sin t}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}32\cos^5t\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6t\,\mathrm{d}t$$

$$=32\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=5\pi.$$

**33.【解】** $I=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\xlongequal{x=a\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos t}{a\sin t+a\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x,$$

则 $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，

即 $\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{4}$.

**34.【解】** 因为 $[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，

所以 $\int\frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]$

$$=\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5]^{\frac{3}{2}}+C.$$

35.【解】$\int \frac{1+2\ln x}{x\ln x}dx=\int \frac{x+2x\ln x}{x^2\ln x}dx=\int \frac{1}{x^2\ln x}d(x^2\ln x)=\ln|x^2\ln x|+C.$

36.【解】因为$(x^2e^x)'=(x^2+2x)e^x$，

所以$\int \frac{x+2}{x(1+x^2e^x)}dx=\int \frac{(x^2+2x)e^x}{x^2e^x(1+x^2e^x)}dx=\int \frac{1}{x^2e^x(1+x^2e^x)}d(x^2e^x)$

$$=\int\left(\frac{1}{x^2e^x}-\frac{1}{1+x^2e^x}\right)d(x^2e^x)=\ln\frac{x^2e^x}{1+x^2e^x}+C.$$

37.【解】因为$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot x^4\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\sqrt{2}$ 且$\frac{1}{2}<1$，所以$\int_0^1 x^4\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ 收敛，

于是$\int_0^1 x^4\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\int_0^1\frac{x^4(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4t(1+\sin t)}{\cos t}\cdot\cos t\,dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4t+\sin^5t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5t\,dt$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times1=\frac{3\pi}{16}+\frac{8}{15}.$$

38.【解】由$\int_0^x tf(2x-t)dt\xlongequal{2x-t=u}\int_{2x}^x(2x-u)f(u)(-du)$

$$=\int_x^{2x}(2x-u)f(u)du=2x\int_x^{2x}f(u)du-\int_x^{2x}uf(u)du,$$

得 $2x\int_x^{2x}f(u)du-\int_x^{2x}uf(u)du=\frac{1}{2}\arctan x^2$，等式两边对 $x$ 求导，得

$2\int_x^{2x}f(u)du+2x[2f(2x)-f(x)]-4xf(2x)+xf(x)=\frac{x}{1+x^4}$，整理得

$2\int_x^{2x}f(u)du-xf(x)=\frac{x}{1+x^4}$，

取 $x=1$，得 $2\int_1^2 f(u)du-f(1)=\frac{1}{2}$，故$\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{4}$.

39.【解】$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}dx=\frac{1}{a}\int_0^{\pi}\frac{d(1-2a\cos x+a^2)}{2\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{1-2a\cos x+a^2}\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{a}[(a+1)-(a-1)]=\frac{2}{a}.$$

40.【解】$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\xlongequal{x=\tan t}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2t}{\sec^3t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt=\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

41.【解】两边积分得 $F^2(x)=\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$，解得 $F^2(x)=\frac{e^x}{1+x}+C$，由 $F(0)=1$，$F(x)>0$，

得 $F(x)=\sqrt{\frac{e^x}{1+x}}$，于是 $f(x)=\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$.

42.【解】令 $\ln x=t$，则 $f'(t)=\begin{cases}1,t\leqslant0\\e^t,t>0\end{cases}$，当 $t\leqslant0$ 时，$f(t)=t+C_1$；当 $t>0$ 时，$f(t)=e^t+C_2$.

显然 $f'(t)$ 为连续函数，所以 $f(t)$ 也连续，于是有 $C_1=1+C_2$，

故 $f(x)=\begin{cases}x+1+C, x<0,\\ e^x+C, \quad x>0.\end{cases}$

**43.【解】**$\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}=\int_{e^{\frac{1}{2}}}^{e^{\frac{3}{4}}}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}\xlongequal{\ln x=t}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}=2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\frac{d(\sqrt{t})}{\sqrt{1-(\sqrt{t})^2}}$

$$=2\arcsin\sqrt{t}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

**44.【解】**$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,dx=\int_0^{\pi}f(x)d(\sin x)=f(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)\sin x\,dx$

$$=-\int_0^{\pi}e^{\cos x}\sin x\,dx=e^{\cos x}\Big|_0^{\pi}=e^{-1}-e.$$

**45.【解】**令 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}}$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}}=x$，当 $1<x\leqslant 2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}}=x^2$，则 $\int_0^2\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}}dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 x^2dx=\frac{1}{2}+\frac{7}{3}=\frac{17}{6}$.

**46.【解】**由 $\int_0^x tf(x-t)dt\xlongequal{x-t=u}\int_x^0(x-u)f(u)(-du)=\int_0^x(x-u)f(u)du$

$$=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du,$$

得 $x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=1-\cos x$，

两边求导得 $\int_0^x f(u)du=\sin x$，令 $x=\frac{\pi}{2}$ 得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=1$.

**47.** (1)**【证明】**当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，$\int_0^{n\pi}|\cos t|dt\leqslant\int_0^x|\cos t|dt<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt$，

$\int_0^{n\pi}|\cos t|dt=n\int_0^{\pi}|\cos t|dt=n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|dt=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=2n$，

$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt=2(n+1)$，则 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$.

(2)**【解】**由 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$，得 $\frac{1}{(n+1)\pi}<\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n\pi}$，

从而 $\frac{2n}{(n+1)\pi}\leqslant\frac{S(x)}{x}\leqslant\frac{2(n+1)}{n\pi}$，根据夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}$.

**48.【证明】**对充分大的 $x$，存在自然数 $n$，使得 $nT\leqslant x<(n+1)T$，

因为 $f(x)\geqslant 0$，所以 $\int_0^{nT}f(t)dt\leqslant\int_0^x f(t)dt\leqslant\int_0^{(n+1)T}f(t)dt$，

即 $n\int_0^T f(t)dt\leqslant\int_0^x f(t)dt\leqslant(n+1)\int_0^T f(t)dt$，由 $\frac{1}{(n+1)T}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{nT}$，得

$$\frac{n\int_0^T f(t)dt}{(n+1)T}\leqslant\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}\leqslant\frac{(n+1)\int_0^T f(t)dt}{nT},$$

注意到当 $x\to+\infty$ 时，$n\to\infty$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\int_0^T f(t)dt}{(n+1)T}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\int_0^T f(t)dt}{nT}=\frac{\int_0^T f(x)dx}{T}$，

由夹逼定理得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\dfrac{\int_0^T f(x)\mathrm{d}x}{T}$.

**49.【证明】** 令 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & x=0\end{cases}$,因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,又 $\varphi(0)=0,\varphi(1)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,由罗尔定理,存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$,而 $\varphi'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^2}$,所以 $\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi)$.

**50.** (1)**【证明】** 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t$,显然 $F(x)$ 在 $[0,x]$ 上可导,且 $F(0)=0$,由微分中值定理,存在 $0<\theta<1$,使得 $F(x)=F(x)-F(0)=F'(\theta x)x$,即

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)].$$

(2)**【解】** 令 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta=A$,由 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$,得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x},$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{x^2}&=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f(-x)-f(0)}{-x}\right]\\&=f'(0)=2,\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\left[\theta\frac{f(\theta x)-f(0)}{\theta x}+\theta\frac{f(-\theta x)-f(0)}{-\theta x}\right]=4A,$$

于是 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$.

**51.【证明】** $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2x)\tan^nx\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^nx\,\mathrm{d}(\tan x)=\dfrac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{n+1}$,

同理 $a_n+a_{n-2}=\dfrac{1}{n-1}$. 因为 $\tan^nx,\tan^{n+2}x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上连续,$\tan^nx\geqslant\tan^{n+2}x$,且 $\tan^nx$,$\tan^{n+2}x$ 不恒等,所以 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^nx\,\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\,\mathrm{d}x$,即 $a_n>a_{n+2}$,

于是 $\dfrac{1}{n+1}=a_n+a_{n+2}<2a_n$,即 $a_n>\dfrac{1}{2(n+1)}$,同理可证 $a_n<\dfrac{1}{2(n-1)}$.

**52.【证明】** 令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^xf(x)$,则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x[f(x)+f'(x)]$,

由 $|f(x)+f'(x)|\leqslant1$ 得 $|\varphi'(x)|\leqslant\mathrm{e}^x$,又由 $f(x)$ 有界得 $\varphi(-\infty)=0$,则

$\varphi(x)=\varphi(x)-\varphi(-\infty)=\int_{-\infty}^x\varphi'(x)\mathrm{d}x$,两边取绝对值得

$e^x|f(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{x}|\varphi'(x)|\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{x}e^x\,dx=e^x$，所以 $|f(x)|\leqslant 1$.

**53.【证明】**因为 $(b-a)f(a)=\int_a^b f(a)dx$，

所以 $\left|\int_a^b f(x)dx-(b-a)f(a)\right|=\left|\int_a^b[f(x)-f(a)]dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)-f(a)|\,dx$

$$\leqslant\int_a^b(x-a)dx=\frac{1}{2}(x-a)^2\Big|_a^b=\frac{1}{2}(b-a)^2.$$

**54.【证明】**因为 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$，所以 $f(x)-m\geqslant 0, f(x)-M\leqslant 0$，从而 $\frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)}\leqslant 0$，于是 $f(x)+\frac{Mm}{f(x)}\leqslant M+m$，对其两边积分得

$$\int_0^1 f(x)dx+Mm\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\leqslant M+m,$$

因为 $\int_0^1 f(x)dx+Mm\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\geqslant 2\sqrt{Mm\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx}$，

所以 $2\sqrt{Mm}\sqrt{\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx}\leqslant M+m$，于是 $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx\right)\leqslant\frac{(M+m)^2}{4Mm}$.

**55.【证明】方法一**　令 $\varphi(x)=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$，

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，所以 $\int_a^b\varphi(x)dx\geqslant 0$，

而 $\int_a^b\varphi(x)dx=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]dx$

$$=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)dx$$

$$=\int_a^b xf(x)dx-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx,$$

故 $\int_a^b xf(x)dx\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

**方法二**　令 $\varphi(x)=\int_a^x tf(t)dt-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$，显然 $\varphi(a)=0$.

$$\varphi'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt-\frac{a+x}{2}f(x)=\frac{1}{2}\left[(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)dt\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_a^x f(x)dt-\int_a^x f(t)dt\right]=\frac{1}{2}\int_a^x[f(x)-f(t)]dt\geqslant 0,$$

由 $\begin{cases}\varphi(a)=0\\ \varphi'(x)\geqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)\end{cases}$，得 $\varphi(b)\geqslant\varphi(a)=0$，所以 $\int_a^b xf(x)dx\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

**56.【证明】**$\int_1^{n+1}f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\cdots+\int_n^{n+1}f(x)dx$，

当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)\leqslant f(1)$，两边积分得 $\int_1^2 f(x)dx\leqslant f(1)$，

同理 $\int_2^3 f(x)dx\leqslant f(2),\cdots,\int_n^{n+1}f(x)dx\leqslant f(n)$，相加得 $\int_1^{n+1}f(x)dx\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)$；

当 $x\in[1,2]$ 时，$f(2)\leqslant f(x)$，两边积分得 $f(2)\leqslant\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$，

同理 $f(3)\leqslant\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x,\cdots,f(n)\leqslant\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x$，

相加得 $f(2)+\cdots+f(n)\leqslant\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$，于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)\leqslant f(1)+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$.

**57.【证明】方法一**

$$\begin{aligned}\int_0^k f(x)\mathrm{d}x-k\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^k f(x)\mathrm{d}x-k\left[\int_0^k f(x)\mathrm{d}x+\int_k^1 f(x)\mathrm{d}x\right]\\&=(1-k)\int_0^k f(x)\mathrm{d}x-k\int_k^1 f(x)\mathrm{d}x\\&=k(1-k)[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\end{aligned}$$

其中 $\xi_1\in[0,k]$，$\xi_2\in[k,1]$. 因为 $0<k<1$ 且 $f(x)$ 单调减少，

所以 $\int_0^k f(x)\mathrm{d}x-k\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=k(1-k)[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\geqslant 0$，故 $\int_0^k f(x)\mathrm{d}x\geqslant k\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**方法二**

$\int_0^k f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=kt}k\int_0^1 f(kt)\mathrm{d}t=k\int_0^1 f(kx)\mathrm{d}x$，当 $x\in[0,1]$ 时，因为 $0<k<1$，所以 $kx\leqslant x$，

又因为 $f(x)$ 单调减少，所以 $f(kx)\geqslant f(x)$，两边积分得 $\int_0^1 f(kx)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，

故 $k\int_0^1 f(kx)\mathrm{d}x\geqslant k\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_0^k f(x)\mathrm{d}x\geqslant k\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**58.【证明】**$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$=\left[\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right]+\left[\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right]+\cdots+\left[\int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right],$$

因为
$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right|&=\left|\int_0^{\frac{1}{n}}\left[f(x)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\left|f'(\xi_1)\left(x-\frac{1}{n}\right)\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant M\int_0^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{M}{2n^2}\quad\left(\xi_1\in\left(x,\frac{1}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

同理 $\left|\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n^2},\cdots,\left|\int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n^2}$，

于是 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}$.

**59.【证明】**由微分中值定理得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$，其中 $\xi$ 介于 0 与 $x$ 之间，

因为 $f(0)=0$，所以 $|f(x)|=|f'(\xi)x|\leqslant Mx$，$x\in[0,a]$，

从而 $\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^a Mx\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}M$.

**60.【证明】**由 $1=f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$，

得 $1^2=1=\left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_0^1 1^2\mathrm{d}x\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 1$.

**61.**【证明】由 $f(a)=0$，得 $f(x)-f(a)=f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$，由柯西不等式得

$$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^x 1^2\mathrm{d}t\int_a^x f'^2(t)\mathrm{d}t \leqslant (x-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

积分得 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b (x-a)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x = \dfrac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x$.

**62.**【证明】因为 $\begin{cases} f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t, \\ f(x)-f(b)=\int_b^x f'(t)\mathrm{d}t, \end{cases}$ 且 $f(a)=f(b)=0$，所以

$\begin{cases} |f(x)|=\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t, \\ |f(x)|=\left|\int_b^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^b |f'(t)|\mathrm{d}t, \end{cases}$ 两式相加得 $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$.

**63.**【证明】因为 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，所以 $|f(x)|$ 在$[a,b]$上连续，令 $|f(c)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$.

根据积分中值定理，$\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)$，其中 $\xi\in[a,b]$.

由积分基本定理，$f(c)=f(\xi)+\int_\xi^c f'(x)\mathrm{d}x$，取绝对值得

$|f(c)| \leqslant |f(\xi)|+\left|\int_\xi^c f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant |f(\xi)|+\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$，即

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \leqslant \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

**64.**【证明】由泰勒公式，得 $f(t)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(t-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2$，其中 $\xi$ 介于 $\dfrac{1}{3}$ 与 $t$ 之间，从而 $f(x^2)\leqslant f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{3}\right)$，积分得 $\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x \leqslant f\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

**65.**【证明】由泰勒公式得 $f(x)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，

其中 $\xi$ 介于 $x$ 与 $\dfrac{a+b}{2}$ 之间，

因为 $f''(x)\geqslant 0$，所以有 $f(x)\geqslant f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right)$，两边积分得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant (b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

令 $\varphi(x)=\dfrac{x-a}{2}[f(x)+f(a)]-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，且 $\varphi(a)=0$，

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(a)]+\frac{x-a}{2}f'(x)-f(x)=\frac{x-a}{2}f'(x)-\frac{1}{2}[f(x)-f(a)]$$

$$=\frac{1}{2}(x-a)[f'(x)-f'(\eta)]，其中 a\leqslant\eta\leqslant x,$$

因为 $f''(x)\geqslant 0$，所以 $f'(x)$ 单调不减，于是 $\varphi'(x)\geqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)$，

由 $\begin{cases}\varphi'(x)\geqslant 0(a\leqslant x\leqslant b), \\ \varphi(a)=0,\end{cases}$ 得 $\varphi(b)\geqslant 0$，于是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$，

故$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$.

**66.【证明】** 令$g(t)=\ln t(t>0)$，$g''(t)=-\frac{1}{t^2}<0$，再令$x_0=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则有

$g(t)\leqslant g(x_0)+g'(x_0)(t-x_0)\Rightarrow g[f(x)]\leqslant g(x_0)+g'(x_0)[f(x)-x_0]$，两边积分，

得$\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x\leqslant\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**67.【解】**(1) 直线$y=ax$与抛物线$y=x^2$的交点为$(0,0)$，$(a,a^2)$.

当$0<a<1$时，$S=S_1+S_2=\int_0^a(ax-x^2)\mathrm{d}x+\int_a^1(x^2-ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}a^3-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$，

令$S'=a^2-\frac{1}{2}=0$得$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$，因为$S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}>0$，所以$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$S_1+S_2$取到最小值，

此时最小值为$\frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

当$a\leqslant0$时，$S=\int_a^0(ax-x^2)\mathrm{d}x+\int_0^1(x^2-ax)\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}a^3-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$，

因为$S'=-\frac{1}{2}(a^2+1)<0$，所以$S(a)$单调减少，故$a=0$时$S_1+S_2$取最小值，

而$S(0)=\frac{1}{3}$，因为$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}<\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=S(0)$，所以当$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$S_1+S_2$最小.

(2) 旋转体的体积为$V_x=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{x^2}{2}-x^4\right)\mathrm{d}x+\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\left(x^4-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi$.

**68.【解】** 显然所给的函数为偶函数，只研究曲线的右半部分绕$y=3$旋转所成的体积.

当$x\geqslant0$时，$y=\begin{cases}x^2+2,0\leqslant x\leqslant1,\\4-x^2,1\leqslant x\leqslant2,\end{cases}$

对$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,1]$，$\mathrm{d}V_1=\pi\{3^2-[3-(x^2+2)]^2\}\mathrm{d}x=\pi(2x^2-x^4+8)\mathrm{d}x$，

$V_1=\pi\int_0^1(2x^2-x^4+8)\mathrm{d}x=\frac{127\pi}{15}$；

对$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[1,2]$，$\mathrm{d}V_2=\pi\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}\mathrm{d}x=\pi(2x^2-x^4+8)\mathrm{d}x$，

$V_2=\pi\int_1^2(2x^2-x^4+8)\mathrm{d}x=\frac{97\pi}{15}$，则$V=2(V_1+V_2)=\frac{448\pi}{15}$.

**69.【解】** 根据对称性，所求面积为第一象限围成面积的4倍，先求第一象限的面积.

令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\end{cases}$则

$L_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的极坐标形式为$L_1:r^2=r_1^2(\theta)=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$，

$L_2:\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$的极坐标形式为$L_2:r^2=r_2^2(\theta)=\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$，

令$\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}=\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$，得$\theta=\frac{\pi}{4}$，

则第一象限围成的面积为

$$A_1=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta\right],$$

而 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=a^2b^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{a^2+(b\tan\theta)^2}\mathrm{d}\theta$

$$=a^2b\times\frac{1}{a}\arctan\frac{b\tan\theta}{a}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=ab\arctan\frac{b}{a},$$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=a^2b^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\theta}{b^2+(a\tan\theta)^2}\mathrm{d}\theta$

$$=ab\arctan\frac{a\tan\theta}{b}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=ab\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{a}{b}\right),$$

所以 $A_1=\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{b}{a}-\arctan\frac{a}{b}\right)$，所求面积为

$$A=4A_1=2ab\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{b}{a}-\arctan\frac{a}{b}\right).$$

**70.【解】**(1)$\overrightarrow{AB}=\{-1,1,1\}$，直线 $AB$ 的方程为 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

设对任意的 $M(x,y,z)\in S$，过 $M$ 垂直于 $z$ 轴的截口为圆，其与直线 $AB$ 及 $z$ 轴的交点为 $M_0(x_0,y_0,z)$，$T(0,0,z)$，由 $|MT|=|M_0T|$，得 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$，

因为 $M_0$ 在直线 $AB$ 上，所以有 $\frac{x_0-1}{-1}=\frac{y_0}{1}=\frac{z}{1}$，

从而 $\begin{cases}x_0=1-z,\\ y_0=z,\end{cases}$ 代入 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$ 中得曲面方程为

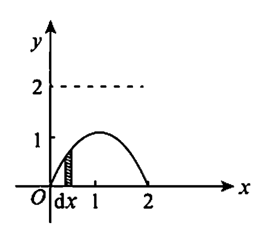
$S:x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$，即 $S:x^2+y^2=2z^2-2z+1$.

(2) 对任意的 $z\in[0,1]$，垂直于 $z$ 轴的截口圆面积为

$$A(z)=\pi(x^2+y^2)=\pi(2z^2-2z+1),$$

于是 $V=\int_0^1A(z)\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{3}$.

**71.【解】**如图，取 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,2]$，




第 71 题图

$$\mathrm{d}V=[\pi\cdot2^2-\pi(2-y)^2]\mathrm{d}x=[4\pi-\pi(2-\sqrt{2x-x^2})^2]\mathrm{d}x,$$

$$V=8\pi-\pi\int_0^2[2-\sqrt{1-(x-1)^2}]^2\mathrm{d}(x-1)$$

$$=8\pi-\pi\int_{-1}^1(2-\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=8\pi-2\pi\int_0^1(2-\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x$$

$$\overset{x=\sin t}{=}8\pi-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2-\cos t)^2\cos t\,\mathrm{d}t=8\pi-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos t-4\cos^2t+\cos^3t)\mathrm{d}t$$

$$=8\pi-2\pi(4-4I_2+I_3)=8\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-2\pi\times\frac{2}{3}=2\pi^2-\frac{4\pi}{3}.$$

**72.【解】**$I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}=\frac{1}{5}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x^5)}{x^5\sqrt{1+x^5+x^{10}}}=\frac{1}{5}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x+x^2}}$

$$\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=}\frac{1}{5}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t+t^2}}=\frac{1}{5}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{1+t+t^2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{5}\left[\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\ln\frac{3}{2}\right]=\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

73.【解】方法一　令 $x=\frac{1-t}{1+t}$,则 $\mathrm{d}x=-\frac{2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$.

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_1^0\frac{\ln\left(\frac{2}{1+t}\right)}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}\cdot\left[-\frac{2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\right]=\int_0^1\frac{\ln2-\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\ln2\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t-\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\ln2-I,$$

则 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln2.$

方法二　令 $x=\tan t$,则

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan t)}{\sec^2t}\cdot\sec^2t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x\overset{x+t=\frac{\pi}{4}}{=\!=\!=}\int_{\frac{\pi}{4}}^0\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\ln2-I,$$

所以 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln2.$

74.【证明】因为 $\int_0^{\pi}xa^{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}a^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\cos x}\mathrm{d}x$,

所以 $\int_0^{\pi}xa^{\sin x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\mathrm{d}x=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\cos x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^{\frac{\cos x}{2}}\right)^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a^{-\frac{\cos x}{2}}\right)^2\mathrm{d}x\geqslant\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\frac{\cos x}{2}}\cdot a^{-\frac{\cos x}{2}}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{\pi^3}{4}.$$

75.【证明】当 $x>0$ 时,令 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x=0$ 得 $x=1,x=k\pi(k=1,2,\cdots)$,当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>1$ 时,$f'(x)\leqslant0$(除 $x=k\pi(k=1,2,\cdots)$ 外 $f'(x)<0$),于是 $x=1$ 为 $f(x)$ 的最大值点,$f(x)$ 的最大值为 $f(1)$. 因为当 $x\geqslant0$ 时,$\sin x\leqslant x$,所以当 $x\in[0,1]$ 时,$(x-x^2)\sin^{2n}x\leqslant(x-x^2)x^{2n}=x^{2n+1}-x^{2n+2}$,

于是 $f(x)\leqslant f(1)=\int_0^1(x-x^2)\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x$

$$\leqslant\int_0^1(x^{2n+1}-x^{2n+2})\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

76.【证明】因为 $\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\overset{x=at+(1-t)b}{=}(b-a)\int_0^1f[ta+(1-t)b]\mathrm{d}t$

$$\leqslant(b-a)\left[f(a)\int_0^1t\mathrm{d}t+f(b)\int_0^1(1-t)\mathrm{d}t\right]=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2},$$

所以$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

又$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{a+b}{2}}^b [f(a+b-x)+f(x)]\mathrm{d}x$

$$= 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left[\frac{1}{2}f(a+b-x)+\frac{1}{2}f(x)\right]\mathrm{d}x \geqslant 2\int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left[\frac{1}{2}(a+b-x)+\frac{1}{2}x\right]\mathrm{d}x$$

$$=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

所以$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，故$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

**77.【证明】** 因为$f''(x)\geqslant 0$，所以有$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

取$x_0=\int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x$，因为$\varphi(x)\geqslant 0$，所以$a\varphi(x)\leqslant x\varphi(x)\leqslant b\varphi(x)$，又$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x=1$，

于是有$a\leqslant \int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x = x_0 \leqslant b$.

把$x_0=\int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x$代入$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$中，再由$\varphi(x)\geqslant 0$，得

$$f(x)\varphi(x)\geqslant f(x_0)\varphi(x)+f'(x_0)[x\varphi(x)-x_0\varphi(x)],$$

上述不等式两边再在区间$[a,b]$上积分，得$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant f\left[\int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x\right]$.

**78.【解】** 因为$[x+m]=[x]+m$（其中$m$为整数），所以$f(x)=x-[x]$是以1为周期的函数，又$[x]\leqslant x$，故$f(x)\geqslant 0$，且$f(x)$在$[0,1]$上的表达式为$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$

对充分大的$x$，存在自然数$n$，使得$n\leqslant x<n+1$，则

$$\int_0^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^x f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{n+1} f(x)\mathrm{d}x,$$

而$\int_0^n f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}$，同理$\int_0^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{n+1}{2}$，

所以$\frac{n}{2}\leqslant \int_0^x f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{n+1}{2}$，由$\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n}$，得$\frac{n}{2(n+1)}\leqslant \frac{\int_0^x f(x)\mathrm{d}x}{x}\leqslant\frac{n+1}{2n}$，

显然当$x\to+\infty$时，$n\to\infty$，由夹逼定理得$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\frac{1}{2}$.

**79.【解】** 设拉力对空斗所做的功为$W_1$，则$W_1=400\times 30=12\ 000(\mathrm{J})$.

设拉力对绳所做的功为$W_2$，任取$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,30]$，

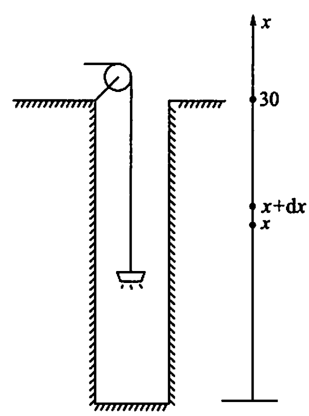
$$\mathrm{d}W_2=50(30-x)\mathrm{d}x,$$

则$W_2=\int \mathrm{d}W_2=22\ 500(\mathrm{J})$.

设拉力对污泥做功为$W_3$，任取$[t,t+\mathrm{d}t]\subset[0,10]$，

$$\mathrm{d}W_3=(2\ 000-20t)\times 3\mathrm{d}t,$$

则$W_3=\int \mathrm{d}W_3=57\ 000(\mathrm{J})$，拉力克服重力所做的功为



第79题图

$$W=W_1+W_2+W_3=91\ 500(\mathrm{J}).$$

# 四、向量代数与空间解析几何

## ◇ 填空题

1.【解】所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{1,0,-1\}\times\{2,1,1\}=\{1,-3,1\}$，又平面过点$(1,2,3)$，则所求平面方程为 $\pi:(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0$，即 $\pi:x-3y+z+2=0$.

2.【解】直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{1,1,-1\}\times\{2,-1,1\}=\{0,-3,-3\}$，显然直线经过点 $M_0(1,-1,1)$，$\overrightarrow{M_0M}=\{2,0,1\}$，$\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}=\{3,6,-6\}$，则点 $M(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

3.【解】$\boldsymbol{s}_1=\{4,-3,1\}$，$\boldsymbol{s}_2=\{-2,9,2\}$，$\boldsymbol{n}=\{4,-3,1\}\times\{-2,9,2\}=\{-15,-10,30\}$，过直线 $L_2$ 且与 $L_1$ 平行的平面方程为 $\pi:-15x-10(y+7)+30(z-2)=0$，即
$\pi:3x+2y-6z+26=0$，$d=\dfrac{|3\times9+2\times(-2)-6\times0+26|}{\sqrt{9+4+36}}=7$.

4.【解】$\overrightarrow{M_1M_2}=\{0,1,5\}$，$\overrightarrow{M_1M_3}=\{1,2,4\}$，$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\{-6,5,-1\}$，
由点 $M_1,M_2,M_3$ 构成的三角形的面积为$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}|=\dfrac{\sqrt{62}}{2}$，
设所求距离为 $d$，又 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{26}$，所以有 $\dfrac{1}{2}d|\overrightarrow{M_1M_2}|=\dfrac{\sqrt{62}}{2}$，故 $d=\sqrt{\dfrac{31}{13}}$.

5.【解】设 $M(x,y,z)$ 为旋转曲面 $\Sigma$ 上的任意一点，该点所在的圆对应于直线 $L$ 上的点为 $M_0(x_0,y_0,z)$，圆心为 $T(0,0,z)$，由 $|\overrightarrow{MT}|=|\overrightarrow{M_0T}|$，得 $x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$.
因为 $M_0(x_0,y_0,z)\in L$，所以$\dfrac{x_0-1}{0}=\dfrac{y_0-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$，即 $x_0=1,y_0=z$，
于是曲面方程为 $\Sigma:x^2+y^2-z^2=1$.

6.【解】直线 $l_1$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=\{2,0,1\}\times\{1,-1,3\}=\{1,-5,-2\}$，
直线 $l_2$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=\{1,-4,0\}$，则直线 $l$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\{-8,-2,1\}$，
直线 $l$ 的方程为$\dfrac{x-1}{-8}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{1}$，参数方程为 $l:\begin{cases}x=1-8t\\y=-2-2t\\z=t\end{cases}$.

7.【解】过直线$\begin{cases}x+2y-z=2\\2x-y+z=3\end{cases}$的平面束为$(x+2y-z-2)+k(2x-y+z-3)=0$，即
$(1+2k)x+(2-k)y+(k-1)z-2-3k=0$，由$\{1+2k,2-k,k-1\}\cdot\{1,1,1\}=0$，得
$k=-1$，则投影直线为 $L:\begin{cases}x+y+z=0\\x-3y+2z-1=0\end{cases}$，$\boldsymbol{s}=\{1,1,1\}\times\{1,-3,2\}=\{5,-1,-4\}$，对称式方程为 $L:\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-4}$，令 $M_0,M_1$ 的坐标分别为$(-1,0,1)$，$(1,2,1)$，
$\overrightarrow{M_0M_1}=\{2,2,0\}$，则 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\sqrt{\dfrac{136}{21}}$.

8.【解】由$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z^2=2x\end{cases}$消去$z$得$x^2+y^2=2x$，所以曲线$\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z^2=2x\end{cases}$在$xOy$平面上的投影曲线为$\begin{cases}x^2+y^2=2x\\z=0\end{cases}$.

9.【解】由$f(x,y+1)=1+2x+3y+o(\rho)$得$f(x,y)$在点$(0,1)$处可微，且

$$f(0,1)=1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=3,$$

而曲面$\Sigma:z=f(x,y)$在点$(0,1,1)$的法向量为$\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right)_{0,1,1}=(2,3,-1)$，

所以切平面方程为$\pi:2(x-0)+3(y-1)-(z-1)=0$，即$\pi:2x+3y-z-2=0$.

## ◇ 选择题

10.【解】设所求平面为$\pi:x-2y+z+D=0$，在平面$\pi:x-2y+z+D=0$上取一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，$d_1=\frac{|x_0-2y_0+z_0-2|}{\sqrt{6}}$，$d_2=\frac{|x_0-2y_0+z_0-6|}{\sqrt{6}}$，因为$d_1:d_2=1:3$，所以$D=0$或$D=-3$，选(C).

11.【解】三条直线的方向向量为

$\boldsymbol{s}_1=\{-2,-5,3\}$，$\boldsymbol{s}_2=\{3,3,7\}$，$\boldsymbol{s}_3=\{1,3,-1\}\times\{2,1,-1\}=\{-2,-1,-5\}$，因为$\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0$，所以$L_1\perp L_2$，选(D).

## ◇ 解答题

12.【解】(1) 设切点为$M_0(x_0,y_0,z_0)$，令$F(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}-1$，

则切平面的法向量为$\boldsymbol{n}=\left\{x_0,2y_0,\frac{z_0}{2}\right\}$，

因为切平面与平面$\pi$平行，所以$\frac{x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{z_0}{2}$，令$\frac{x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{z_0}{2}=t$，

得$x_0=2t,y_0=t,z_0=2t$，将其代入曲面方程，得$t=\pm\frac{1}{2}$，所以切点为$\left(1,\frac{1}{2},1\right)$及$\left(-1,-\frac{1}{2},-1\right)$，平行于平面$\pi$的切平面为

$$\pi_1:2(x-1)+2\left(y-\frac{1}{2}\right)+(z-1)=0，即\pi_1:2x+2y+z-4=0$$

$$\pi_2:2(x+1)+2\left(y+\frac{1}{2}\right)+(z+1)=0，即\pi_2:2x+2y+z+4=0$$

(2) $$d_1=\frac{\left|2\times1+2\times\frac{1}{2}+1+5\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=3,$$

$$d_2=\frac{\left|2\times(-1)+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times(-1)+5\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\frac{1}{3},$$

则曲面 $\Sigma$ 与平面 $\pi$ 之间的最短和最长距离分别为 $\frac{1}{3}$ 与 3.

13.【解】(1) 方法一　令 $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}=t$，即 $x=1+t, y=t, z=1-t$，将 $x=1+t, y=t, z=1-t$ 代入平面 $x-y+2z-1=0$，解得 $t=1$，从而直线 $L$ 与平面 $\pi$ 的交点为 $M_1(2,1,0)$.

过直线 $L$ 且垂直于平面 $\pi$ 的平面法向量为 $s_1=\{1,1,-1\}\times\{1,-1,2\}=\{1,-3,-2\}$，平面方程为

$$\pi_1: 1\times(x-2)-3\times(y-1)-2\times z=0, \text{即 } \pi_1: x-3y-2z+1=0$$

从而直线 $L$ 在平面 $\pi$ 上的投影直线的一般式方程为

$$L_0: \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$$

方法二　直线 $L$ 转化成一般式方程为 $L: \begin{cases} \frac{x-1}{1}=\frac{y}{1} \\ \frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1} \end{cases}$，即 $L: \begin{cases} x-y-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$.

过直线 $L$ 的平面束为 $(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0$，即 $x+(\lambda-1)y+\lambda z-(\lambda+1)=0$，当 $\{1,\lambda-1,\lambda\}\perp\{1,-1,2\}$，即 $\lambda=-2$ 时，过直线 $L$ 的平面与平面 $\pi$ 垂直，把 $\lambda=-2$ 代入平面束方程，则与 $\pi$ 垂直的平面方程为 $\pi_1: x-3y-2z+1=0$，直线 $L$ 在平面 $\pi$ 上的投影直线为

$$L_0: \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$$

方法三　设过直线 $L$ 且与平面 $\pi$ 垂直的平面方程为 $\pi_1: A(x-1)+By+C(z-1)=0$，则有 $\{A,B,C\}\perp\{1,-1,2\}$，$\{A,B,C\}\perp\{1,1,-1\}$，即 $\begin{cases} A-B+2C=0 \\ A+B-C=0 \end{cases}$，解得 $A=-\frac{C}{2}, B=\frac{3C}{2}$，平面 $\pi_1: -\frac{C}{2}(x-1)+\frac{3C}{2}y+C(z-1)=0$，即

$$\pi_1: x-3y-2z+1=0$$

从而 $L$ 在平面 $\pi$ 的投影直线为

$$L_0: \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}.$$

(2) 设 $M(x,y,z)$ 为所求旋转曲面 $\Sigma$ 上任意一点，过该点作垂直于 $y$ 轴的平面，该平面与 $\Sigma$ 相交于一个圆，且该平面与直线 $L$ 及 $y$ 轴的交点分别为 $M_0(x_0,y,z_0)$ 及 $T(0,y,0)$，由 $|M_0T|=|MT|$，得 $x_0^2+z_0^2=x^2+z^2$，注意到 $M_0(x_0,y,z_0)\in L$，即 $\frac{x_0-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z_0-1}{-1}$，于是 $\begin{cases} x_0=y+1 \\ z_0=1-y \end{cases}$，将其代入上式得

$$\Sigma: x^2+z^2=(y+1)^2+(1-y)^2, \text{即 } \Sigma: x^2-2y^2+z^2=2.$$

14. (1)【证明】$M_1(1,0,-1)\in L_1$，　$M_2(-2,1,2)\in L_2$，　$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-3,1,3\}$，

$s_1=\{-1,2,1\}$，　$s_2=\{0,1,-2\}$，　$s_1\times s_2=\{-5,-2,-1\}$.

因为$(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\{-5,-2,-1\}\cdot\{-3,1,3\}=10\neq 0$，所以$L_1,L_2$异面.

**注解**　设$L_1:\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$，$L_2:\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$，其中$M_1(x_1,y_1,z_1)\in L_1$，$M_2(x_2,y_2,z_2)\in L_2$，$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$，$\boldsymbol{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\}$，$\boldsymbol{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\}$分别为$L_1,L_2$的方向向量，则$L_1,L_2$共面的充分必要条件是$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\perp\overrightarrow{M_1M_2}$.

(2)【解】与$L_1,L_2$同时平行的平面的法向量为$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\{-5,-2,-1\}$，

设与$L_1,L_2$等距离的平面方程为$\pi:5x+2y+z+D=0$，

则有$\dfrac{|5\times1+2\times0+1\times(-1)+D|}{\sqrt{5^2+2^2+1^2}}=\dfrac{|5\times(-2)+2\times1+1\times2+D|}{\sqrt{5^2+2^2+1^2}}$，解得$D=1$，

所求的平面方程为$\pi:5x+2y+z+1=0$.

**15.**【解】过直线$\begin{cases}3x-2y+2=0\\x-2y-z+6=0\end{cases}$的平面束方程为$\pi:(3x-2y+2)+\lambda(x-2y-z+6)=0$，

或$\pi:(3+\lambda)x-2(1+\lambda)y-\lambda z+2+6\lambda=0$，点$(1,2,1)$到平面$\pi$的距离为

$$d=\frac{|3+\lambda-4(1+\lambda)-\lambda+2+6\lambda|}{\sqrt{(3+\lambda)^2+4(1+\lambda)^2+\lambda^2}}=\frac{|1+2\lambda|}{\sqrt{6\lambda^2+14\lambda+13}}=1,$$

解得$\lambda=-2$或$\lambda=-3$，于是所求的平面方程为

$$\pi:x+2y+2z-10=0,\text{或}\ \pi:4y+3z-16=0.$$

**16.**【解】(1) 记直线$L$绕$z$轴旋转所得的旋转曲面为$\Sigma$，设$M(x,y,z)$为曲面$\Sigma$上的一点，过点$M$作与$z$轴垂直的平面，分别交直线$L$及$z$轴于点$M_0(x_0,y_0,z)$及$T(0,0,z)$，

由$|M_0T|=|MT|$得$x^2+y^2=x_0^2+y_0^2$，

注意到$M_0\in L$，则$\dfrac{x_0-1}{2}=\dfrac{y_0-2}{1}=\dfrac{z}{1}$，即$\begin{cases}x_0=1+2z\\y_0=2+z\end{cases}$，将$\begin{cases}x_0=1+2z\\y_0=2+z\end{cases}$代入上式得

$$\Sigma:x^2+y^2=(1+2z)^2+(2+z)^2,\text{即}\ \Sigma:x^2+y^2=5z^2+8z+5.$$

(2) **方法一**　对任意的$z\in[0,1]$，截口面积为$A(z)=\pi(x^2+y^2)=\pi(5z^2+8z+5)$，

则$V=\int_0^1A(z)\mathrm{d}z=\pi\int_0^1(5z^2+8z+5)\mathrm{d}z=\dfrac{32\pi}{3}$.

**方法二**　令$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}=t$，则$\begin{cases}x=1+2t\\y=2+t\\z=t\end{cases}$，当$z=0$时，$t=0$；当$z=1$时，$t=1$.

设$M(1+2t,2+t,t)$为曲面$\Sigma$上任意一点，则截口面积为

$$S(t)=\pi r^2=\pi[(1+2t)^2+(2+t)^2]=\pi(5t^2+8t+5),$$

则体积为
$$V=\int_0^1S(t)\mathrm{d}t=\frac{32}{3}\pi.$$

**17.**【解】把点$P$及点$Q$的坐标代入$x-2y+z-12$得$1-1-12=-12$及$3-2+2-12=-9$，则点$P$及$Q$位于平面$\pi$的同侧. 过点$P$且垂直于平面$\pi$的直线方程为

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1},$$

令$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}=t$,得 $x=1+t,y=-2t,z=t-1$,

把 $x=1+t,y=-2t,z=t-1$ 代入平面$\pi$得$t=2$,所以直线 $L_1$ 与平面 $\pi$ 的交点坐标为 $T(3,-4,1)$.令点 $P$ 关于平面$\pi$ 的对称点为 $P'(x_0,y_0,z_0)$,

则有$\frac{x_0+1}{2}=3,\frac{y_0}{2}=-4,\frac{z_0-1}{2}=1$,解得对称点的坐标为 $P'(5,-8,3)$.

$\overrightarrow{QP'}=\{2,-9,1\}$,过点 $P'$ 及点$Q$ 的直线为$L_2$:$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-9}=\frac{z-2}{1}$,

令$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-9}=\frac{z-2}{1}=t$,得 $x=3+2t,y=1-9t,z=2+t$,

把 $x=3+2t,y=1-9t,z=2+t$ 代入平面$\pi$ 得$t=\frac{3}{7}$,

所求点 $M$ 的坐标为$M\left(\frac{27}{7},-\frac{20}{7},\frac{17}{7}\right)$.

18.【解】过 $A(-1,0,4)$ 且与平面 $\pi:3x-4y+z+10=0$ 平行的平面方程为

$\pi_1:3(x+1)-4y+(z-4)=0$,即 $\pi_1:3x-4y+z-1=0$.

令$\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}=t$,则$\begin{cases}x=t-1\\y=t+3\\z=2t\end{cases}$,代入 $\pi_1:3x-4y+z-1=0$,得 $t=16$,

则直线 $L$ 与 $\pi_1$ 的交点为 $M_0(15,19,32)$,所求直线的方向向量为$s=\{16,19,28\}$,

所求直线为$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$.

# 五、多元函数微分学

## ◇ 填空题

1.【解】由 $z=xf(x+y)+g(x^y,x^2+y^2)$,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(x+y)+xf'(x+y)+yx^{y-1}g'_1(x^y,x^2+y^2)+2xg'_2(x^y,x^2+y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'+xf''+x^{y-1}g'_1+yx^{y-1}\ln xg'_1+yx^{2y-1}\ln xg''_{11}+2y^2x^{y-1}g''_{12}+2x^{y+1}\ln xg''_{21}+4xyg''_{22}.$$

2.【解】$f(tx,ty)=t^3f(x,y)$ 两边对 $t$ 求导得

$$xf'_1(tx,ty)+yf'_2(tx,ty)=3t^2f(x,y),$$

取 $t=1,x=1,y=2$ 得 $f'_1(1,2)+2f'_2(1,2)=3f(1,2)$,故 $f(1,2)=3$.

3.【解】由$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ 得$\frac{\partial z}{\partial y}=2y+\varphi(x)$,因为 $f'_y(x,0)=x$,所以 $\varphi(x)=x$,即$\frac{\partial z}{\partial y}=2y+x$,

$z=y^2+xy+C$,因为 $f(x,0)=1$,所以 $C=1$,于是 $z=y^2+xy+1$.

4.【解】令 $P(x,y)=ay-2xy^2,Q(x,y)=bx^2y+4x+3$,

因为$(ay-2xy^2)\mathrm{d}x+(bx^2y+4x+3)\mathrm{d}y$ 为某个二元函数的全微分,

所以$\frac{\partial Q}{\partial x}=2bxy+4=\frac{\partial P}{\partial y}=a-4xy$，于是 $a=4,b=-2$.

5.【解】函数 $u=x^2-2yz$ 在点$(1,-2,2)$处的方向导数的最大值即为函数 $u=x^2-2yz$ 在点$(1,-2,2)$处的梯度的模，而 $\mathbf{grad}u\,|_{(1,-2,2)}=\{2x,-2z,-2y\}\,|_{(1,-2,2)}=\{2,-4,4\}$，方向导数的最大值为$\sqrt{4+16+16}=6$.

## ◇ 选择题

6.【解】因为$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处连续；

因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x^2}=0$，所以 $f'_x(0,0)=0$，根据对称性，$f'_y(0,0)=0$，即 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处可偏导；

由$\lim\limits_{\rho\to0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\rho\sin\frac{1}{\rho^2}=0$，得 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处可微；

当$(x,y)\neq(0,0)$时，$f'_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$，

则 $f'_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，

因为$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f'_x(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right)$不存在，所以 $f'_x(x,y)$ 在点$(0,0)$处不连续，同理 $f'_y(x,y)$ 在点$(0,0)$处也不连续，选(C).

7.【解】因为若函数 $f(x,y)$ 一阶连续可偏导，则 $f(x,y)$ 一定可微，反之则不对，所以若函数 $f(x,y)$ 偏导数不连续不一定不可微，选(C).

8.【解】若 $f(x,y)$ 的最大点在 $D$ 内，不妨设其为 $M_0$，则有$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}=0,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}=0$，因为 $M_0$ 为最大值点，所以 $AC-B^2$ 非负，而在 $D$ 内有$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}>0,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，即 $AC-B^2<0$，所以最大值点不可能在 $D$ 内，同理最小值点也不可能在 $D$ 内，正确答案为(B).

## ◇ 解答题

9.【解】$\int_{xy}^{z}h(xy+z-t)\mathrm{d}t\xlongequal{xy+z-t=u}\int_{z}^{xy}h(u)(-\mathrm{d}u)=\int_{xy}^{z}h(u)\mathrm{d}u$，

$\begin{cases}u=f(x,y,xyz),\\ \mathrm{e}^{xyz}=\int_{xy}^{z}h(u)\mathrm{d}u\end{cases}$ 关于 $x$ 求偏导得 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x})f'_3,\\ \mathrm{e}^{xyz}(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x})=h(z)\frac{\partial z}{\partial x}-yh(xy),\end{cases}$

解得$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+[yz+xy\cdot\frac{yz\mathrm{e}^{xyz}+yh(xy)}{h(z)-xy\mathrm{e}^{xyz}}]f'_3$，

由对称性得 $\frac{\partial u}{\partial y}=f'_2+[xz+xy\cdot\frac{xze^{xyz}+xh(xy)}{h(z)-xye^{xyz}}]f'_3$,

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=xf'_1+[xyz+x^2y^2\cdot\frac{ze^{xyz}+h(xy)}{h(z)-xye^{xyz}}]f'_3-yf'_2-[xyz+x^2y^2\cdot\frac{ze^{xyz}+h(xy)}{h(z)-xye^{xyz}}]f'_3=xf'_1-yf'_2.$$

*10.*【解】$0\leqslant|f(x,y)|\leqslant|xy|$,

因为$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|xy|=0$,由夹逼定理得$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$,即 $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处连续.

由$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ 得 $f'_x(0,0)=0$,同理 $f'_y(0,0)=0$,

即 $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可偏导.

令 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\frac{xy}{\rho}\sin\frac{1}{\rho^2}$,

$0\leqslant\left|\frac{xy}{\rho}\sin\frac{1}{\rho^2}\right|\leqslant|x|\frac{|y|}{\rho}\leqslant|x|$,由夹逼定理得$\lim\limits_{\rho\to0}\frac{xy}{\rho}\sin\frac{1}{\rho^2}=0$,

即 $f(x,y)$ 在$(0,0)$ 处可微.

*11.*【解】(1) 因为 $0\leqslant|f(x,y)|\leqslant\sqrt{|xy|}$,所以$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$,故 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处连续.

(2)$\Delta f(x,y)=f(x,y)-f(0,0)=\frac{\sqrt{|xy|}}{\rho^2}\sin\rho^2\ (\rho=\sqrt{x^2+y^2})$,

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, $f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$,

因为$\lim\limits_{\substack{\rho\to0\\y=x}}\frac{\Delta f(x,y)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\rho\to0\\y=x}}\frac{\sin\rho^2}{\rho^2}\cdot\frac{\sqrt{|xy|}}{\rho}=\frac{1}{\sqrt2}\neq0$,所以 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$ 处不可微.

*12.*【解】由 $z=(x^2+y^2)^{\sec^2(x+y)}$,得 $z=e^{\sec^2(x+y)\ln(x^2+y^2)}$,

则$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\sec^2(x+y)\ln(x^2+y^2)}\left[2\sec^2(x+y)\tan(x+y)\ln(x^2+y^2)+\frac{2x}{x^2+y^2}\sec^2(x+y)\right]$,

$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\sec^2(x+y)\ln(x^2+y^2)}\left[2\sec^2(x+y)\tan(x+y)\ln(x^2+y^2)+\frac{2y}{x^2+y^2}\sec^2(x+y)\right]$.

*13.*【证明】(1) 因为$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$

$$=\frac{1}{r}(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z})=0,$$

所以 $u$ 是不含 $r$ 的函数,即 $u$ 仅为 $\theta$ 与 $\varphi$ 的函数.

(2) 因为$\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta}$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta)\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot(r\cos\theta\sin\varphi)$$

$$=-y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=xy\left(-\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot(r\cos\theta\cos\varphi)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot(r\sin\theta\cos\varphi)+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot(-r\sin\varphi),$$

令$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=t$，则$\frac{\partial u}{\partial x}=tx$，$\frac{\partial u}{\partial y}=ty$，$\frac{\partial u}{\partial z}=tz$，

从而$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=t(r^2\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi)+t(r^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi)+t(-r^2\sin\varphi\cos\varphi)=0$，

故 $u$ 仅是 $r$ 的函数，即 $u$ 不含 $\theta$ 与 $\varphi$.

*14*.【证明】令 $u=tx,v=ty,w=tz,f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$ 两边对 $t$ 求导得

$$x\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial u}+y\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial v}+z\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial w}=kt^{k-1}f(x,y,z),$$

当 $t=1$ 时，有 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$.

*15*.【解】$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2}$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2e^{x^2+y^2}+4x^2e^{x^2+y^2}$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{x^2+y^2}$，　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2e^{x^2+y^2}+4y^2e^{x^2+y^2}$，

则$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4[1+(x^2+y^2)]e^{x^2+y^2}$.

*16*.【解】方程组由五个变量三个方程构成，故确定了三个二元函数，其中 $x,y$ 为自变量，由 $u=f(x,y,z,t),g(y,z,t)=0,h(z,t)=0$，得

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+f'_3\frac{\partial z}{\partial x}+f'_4\frac{\partial t}{\partial x},\\ \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=0,\end{cases}$$

因为$\begin{vmatrix}\frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t}\\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}\neq 0$，所以$\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial t}{\partial x}=0$，于是$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1$.

三个方程两边对 $y$ 求偏导得

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial y}=f'_2+f'_3\frac{\partial z}{\partial y}+f'_4\frac{\partial t}{\partial y},\\ \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}=0,\end{cases}$$　解得$\frac{\partial u}{\partial y}=f'_2+\dfrac{f'_4\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}-f'_3\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}}{\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial z}}$.

*17*.【解】$z=f(u)$ 两边对 $x$ 及 $y$ 求偏导，得$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}$，　$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$.

方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\mathrm{d}t$ 两边对 $x$ 及 $y$ 求偏导,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+P(x),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-P(y),\text{解得}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{P(x)}{1-\varphi'(u)},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{P(y)}{1-\varphi'(u)},\text{于是 } P(y)\frac{\partial z}{\partial x}+P(x)\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

**18.**【证明】由 $\begin{cases}u=x,\\ v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=u,\\ y=\dfrac{u}{1+uv},\end{cases}$ 则

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{1}{z^2}\left[\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{(1+uv)^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right]+\frac{1}{u^2}$$

$$=-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{1}{u^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{u^2}=0.$$

**19.**【解】(1) 求 $f(x,y)$ 在区域 $D$ 的边界上的最值,

在 $L_1: y=0(0\leqslant x\leqslant 6)$ 上,$z=0$;

在 $L_2: x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 上,$z=0$;

在 $L_3: y=6-x(0\leqslant x\leqslant 6)$ 上,$z=-2x^2(6-x)=2x^3-12x^2$,

由 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=6x^2-24x=0$ 得 $x=4$,因为 $f(0,6)=0,f(6,0)=0,f(4,2)=-64$,所以 $f(x,y)$ 在 $L_3$ 上最小值为 $-64$,最大值为 0.

(2) 在区域 $D$ 内,由 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy(4-x-y)-x^2y=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2(4-x-y)-x^2y=0\end{cases}$ 得驻点为(2,1),

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(2,1)}=-6,\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(2,1)}=-4,\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(2,1)}=-8,$$

因为 $AC-B^2>0$ 且 $A<0$,所以(2,1)为 $f(x,y)$ 的极大值点,极大值为 $f(2,1)=4$,

故 $z=f(x,y)$ 在 $D$ 上的最小值为 $m=f(4,2)=-64$,最大值为 $M=f(2,1)=4$.

**20.**【解】球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在点 $(x_0,y_0,z_0)$ 处的外法向量为 $\boldsymbol{n}=\{2x_0,2y_0,2z_0\}$,

方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2x_0}{\sqrt{4(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}}=x_0,\quad \cos\beta=y_0,\quad \cos\gamma=z_0$,

又 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1,\dfrac{\partial u}{\partial y}=1,\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$,所求的方向导数为 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=x_0+y_0+z_0$.

令 $F=x+y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$,

由 $\begin{cases}F'_x=1+2\lambda x=0\\ F'_y=1+2\lambda y=0\\ F'_z=1+2\lambda z=0\\ F'_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0\end{cases}$ 得 $\lambda=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,从而 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$ 及 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ z=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$,

当$(x,y,z)=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$时，方向导数取最大值$\sqrt{3}$；当$(x,y,z)=(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$时，方向导数取最小值$-\sqrt{3}$.

21.【证明】(必要性) 设$f(x,y)$在点(0,0)处可微，则$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$存在.

因为$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}$，

且$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}=\varphi(0,0)$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x}=-\varphi(0,0)$，所以$\varphi(0,0)=0$.

(充分性) 若$\varphi(0,0)=0$，则$f'_x(0,0)=0$，$f'_y(0,0)=0$.

因为$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

又$\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant 2$，

所以$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{|x-y|\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，即$f(x,y)$在点(0,0)处可微.

22.【证明】$\frac{\partial f(P_0)}{\partial\tau}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta$，其中$\cos\alpha,\cos\beta$为切线$\tau$的方向余弦.

当$(x,y)\in\Gamma$时，$f(x,y)$为$t$的一元函数$f[x(t),y(t)]$，记$P_0$对应的参数为$t_0$，

因为$t_0$为一元函数$f[x(t),y(t)]$的极值点，所以$\frac{d}{dt}f[x(t),y(t)]\Big|_{t=t_0}=0$，

而$\frac{d}{dt}f[x(t),y(t)]=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}y'(t)$，

$\Gamma$在点$P_0$处的切向量为$\{x'(t_0),y'(t_0)\}$，其对应的单位向量为

$$e=\frac{1}{\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)}}\{x'(t_0),y'(t_0)\}=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$$

所以$\frac{d}{dt}f[x(t),y(t)]\Big|_{t=t_0}=\left[\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta\right]\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)}=0$，

又因为$\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)}\neq 0$，

所以$\frac{\partial f(P_0)}{\partial\tau}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta=0$.

23.【解】$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=v\frac{\partial f}{\partial x}+u\frac{\partial f}{\partial y}$，

$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=u\frac{\partial f}{\partial x}-v\frac{\partial f}{\partial y}$，

$a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2=a\left(v\frac{\partial f}{\partial x}+u\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-b\left(u\frac{\partial f}{\partial x}-v\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$

$=(av^2-bu^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+(au^2-bv^2)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+2uv(a+b)\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=u^2+v^2$，

又$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，所以有

$$(a+b)(v^2-u^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+2uv(a+b)\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+4(au^2-bv^2)=u^2+v^2,$$

于是$\begin{cases}a+b=0,\\4a=1,\\4b=-1,\end{cases}$ 故 $a=\frac{1}{4},b=-\frac{1}{4}$.

# 六、重积分

## ◇ 填空题

1.【解】$\int_u^1 vf(u^2-v^2)\mathrm{d}v=-\frac{1}{2}\int_u^1 f(u^2-v^2)\mathrm{d}(u^2-v^2)\overset{t=u^2-v^2}{=}-\frac{1}{2}\int_0^{u^2-1}f(t)\mathrm{d}t$,

则$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\mathrm{d}u\int_u^1 vf(u^2-v^2)\mathrm{d}v=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2-1}f(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^{x^2-1}f(t)\mathrm{d}t$,

$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_0^x\mathrm{d}u\int_u^1 vf(u^2-v^2)\mathrm{d}v=-xf(x^2-1)$.

2.【解】由 $t\to 0$ 时,$t-\ln(1+t)=t-[t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)]\sim\frac{1}{2}t^2(t\to 0)$,

由积分中值定理得$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\cdot\pi t^2$,其中$(\xi,\eta)\in D$,

于是$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{t-\ln(1+t)}=2\pi\lim\limits_{t\to 0}f(\xi,\eta)=2\pi f(0,0)=8\pi$.

3.【解】$\int_0^r tf(r^2-t^2)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int_0^r f(r^2-t^2)\mathrm{d}(r^2-t^2)=\frac{1}{2}\int_0^{r^2}f(u)\mathrm{d}u$,

$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}\cos(x+y)\mathrm{d}\sigma=\pi r^2\cos(\xi+\eta)$,

原式$=\frac{1}{2\pi}\lim\limits_{r\to 0}\frac{\int_0^{r^2}f(u)\mathrm{d}u}{r^2}\cdot\frac{1}{\cos(\xi+\eta)}=\frac{1}{2\pi}\lim\limits_{r\to 0}\frac{\int_0^{r^2}f(u)\mathrm{d}u}{r^2}=\frac{1}{2\pi}\lim\limits_{r\to 0}\frac{2rf(r^2)}{2r}=\frac{f(0)}{2\pi}$.

4.【解】由 $f(x)g(y-x)=\begin{cases}a^2,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y-x\leqslant 1,\\0,\quad\text{其他},\end{cases}$

得 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a^2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{x+1}\mathrm{d}y=a^2$.

5.【解】在 $D_1=\{(x,y)\mid-\infty<x<+\infty,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上,$f(y)=y$;

在 $D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x+y\leqslant 1\}$ 上,$f(x+y)=x+y$,

则在 $D_0=D_1\cap D_2=\{(x,y)\mid -y\leqslant x\leqslant 1-y,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上,$f(y)f(x+y)=y(x+y)$,

所以$\iint\limits_D f(y)f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{1-y}y(x+y)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

6.【解】$F(t)=\iiint\limits_{\Omega_t}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t[z^2+f(r^2)]r\mathrm{d}r$

$$=2\pi\int_0^1 dz\int_0^t [z^2+f(r^2)]r\,dr=2\pi\int_0^t\left[\frac{r}{3}+rf(r^2)\right]dr,$$

则 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}=2\pi\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\int_0^t\left[\frac{r}{3}+rf(r^2)\right]dr}{t^2}=\pi\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\frac{t}{3}+tf(t^2)}{t}=\dfrac{\pi}{3}$.

## ◇ 选择题

7.【解】积分所对应的直角坐标平面的区域为 $D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\sqrt{x-x^2}$，选(D).

8.【解】根据对称性，令 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant x\}$,

$$\iint_D \sin x\sin y\cdot\max\{x,y\}d\sigma=2\iint_{D_1}x\sin x\sin y\,d\sigma=2\int_0^\pi x\sin x\,dx\int_0^x\sin y\,dy$$

$$=2\int_0^\pi x\sin x(1-\cos x)dx=2\int_0^\pi x\sin x\,dx-2\int_0^\pi x\sin x\cos x\,dx$$

$$=\pi\int_0^\pi\sin x\,dx-\int_0^\pi x\,d(\sin^2x)=\frac{5\pi}{2},$$

选(B).

9.【解】由 $\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr=-\pi\int_0^a(a^2-r^2)^{\frac12}d(a^2-r^2)$

$$=-\pi\times\frac23(a^2-r^2)^{\frac32}\Big|_0^a=\frac{2\pi a^3}{3}=\frac{16\pi}{3},$$

解得 $a=2$，选(B).

## ◇ 解答题

10.【解】由 $F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t rf(r^2)dr=2\pi\int_0^t rf(r^2)dr=\pi\int_0^{t^2}f(u)du$,

得 $F'(t)=2\pi tf(t^2)$，　$F'(0)=0$,

$$F''(0)=\lim_{t\to0}\frac{F'(t)-F'(0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2\pi tf(t^2)}{t}=2\pi f(0)=2\pi.$$

11.【解】$I=\iint_D\dfrac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4-x^2-y^2}}$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,-x\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}-1\}$,

令 $\begin{cases}x=r\cos t,\\y=r\sin t,\end{cases}$ 则 $D=\left\{(r,t)\mid -\dfrac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant 0,0\leqslant r\leqslant -2\sin t\right\}$,

于是 $I=\iint_D\dfrac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4-x^2-y^2}}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0dt\int_0^{-2\sin t}\dfrac{dr}{\sqrt{4-r^2}}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0-t\,dt=\dfrac{\pi^2}{32}$.

12.【解】令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)$，则

$$\int_0^1dx\int_{x^2}^x(x^2+y^2)^{-\frac12}dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}dr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{\cos\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt2-1.$$

13.【解】当 $t<0$ 时，$F(t)=0$；

当 $0\leqslant t<1$ 时，$F(t)=\iint_D 1\,dx\,dy=\dfrac12t^2$；

当 $1 \leqslant t < 2$ 时，$F(t)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1-\frac{1}{2}(2-t)^2$；

当 $t \geqslant 2$ 时，$F(t)=1$，则 $F(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ \frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t<1, \\ 1-\frac{1}{2}(2-t)^2, & 1\leqslant t<2, \\ 1, & t\geqslant 2. \end{cases}$

**14.【解】** 令 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x\}$，$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，则

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由 $\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$，

$\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}x=\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}-1}{2}$，得

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{e}-1.$$

**15.【解】** 令 $D_1=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x^2\}$，

$D_2=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant 2\}$，

则 $I=\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

而 $\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(x^2-y)$

$$=-\frac{2}{3}\int_{-1}^1(x^2-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_{-1}^1|x|^3\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{3};$$

$\iint\limits_{D_2}\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2(y-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(y-x^2)$

$$=\frac{2}{3}\int_{-1}^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$\overset{x=\sqrt{2}\sin t}{=}\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sqrt{2}\cos^3 t\cdot\sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)^2\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)^2\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}+2+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3},$$

故 $\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}$.

**16.【解】** 令 $\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2}=2(x^2+y^2)$，解得 $x^2+y^2=\frac{1}{8}$，

则 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{3}{16}} \min\left\{\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2},2(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{8}} 2(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{\frac{1}{8}\leqslant x^2+y^2\leqslant\frac{3}{16}}\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}r^3\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}r\sqrt{\frac{3}{16}-r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{64}+\frac{\pi}{96}=\frac{5\pi}{192}.$$

**17.【解】**将 $D$ 分成两部分 $D_1,D_2$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\sqrt{x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\}$，

$D_2=\left\{(x,y)\mid -\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant 0,-x\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\right\}$，

则 $I=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}y\,\mathrm{d}y+\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 x\,\mathrm{d}x\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}}y\,\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 x(1-2x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{48}.$$

**18.【解】**令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 则 $I=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\mathrm{d}r=\frac{9\pi}{4}.$

**19.【解】**令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 1\right)$，

则 $\iint\limits_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\mathrm{d}(r^2)$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\mathrm{d}t,$$

令 $\frac{1-t}{1+t}=u^2$，则 $t=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，$\mathrm{d}t=\frac{-4u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u$，

原式 $=\frac{\pi}{4}\int_1^0\frac{-4u^2}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u=\pi\int_0^1\frac{u^2}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u=\pi\int_0^1\left[\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{(1+u^2)^2}\right]\mathrm{d}u$

$$=\pi\int_0^1\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u-\pi\int_0^1\frac{1}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u=\frac{\pi^2}{4}-\pi\int_0^1\frac{1}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u.$$

因为 $\int_0^1\frac{1}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u\xlongequal{u=\tan\theta}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sec^4\theta}\cdot\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4},$$

所以原式 $=\frac{\pi^2}{4}-\pi\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}.$

**20.【解】**根据对称性 $\iint\limits_D(x^2+4x+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D_1$ 是 $D$ 位于第一象限的区域.

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},0\leqslant r\leqslant a\sqrt{\cos2\theta}\right)$，

则$\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}r^3\mathrm{d}r=\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\mathrm{d}(2\theta)=\frac{\pi a^4}{32}$,

故$\iint\limits_{D}(x^2+4x+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi a^4}{8}$.

**21.【解】**设球面$S:x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$,

由$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x^2+y^2+(z-a)^2=R^2\end{cases}$得球面$S$在定球内的部分在$xOy$面上的投影区域为

$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant\frac{R^2}{4a^2}(4a^2-R^2)$,

球面$S$在定球内的方程为$S:z=a-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,$(x,y)\in D_{xy}$,

$\mathrm{d}S=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,所求面积为$S(R)=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^2-\frac{\pi}{a}R^3$.

令$S'(R)=4\pi R-\frac{3\pi}{a}R^2=0$,得$R=\frac{4a}{3}$,

因为$S''\left(\frac{4a}{3}\right)=-4\pi<0$,所以当$R=\frac{4a}{3}$时球面$S$在定球内的面积最大.

**22.【证明】**令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,

$$\text{则}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)[F(b)-F(x)]\mathrm{d}x$$
$$=F(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)F(x)\mathrm{d}x=F^2(b)-\int_a^b F(x)\mathrm{d}F(x)$$
$$=F^2(b)-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_a^b=\frac{1}{2}F^2(b)=\frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2.$$

**23.【证明】**因为$f(x,y)$在$D$上连续,所以$f(x,y)$在$D$上取到最大值$M$和最小值$m$,故$m\leqslant f(x,y)\leqslant M$,又由$g(x,y)\geqslant 0$得

$$mg(x,y)\leqslant f(x,y)g(x,y)\leqslant Mg(x,y)$$

积分得

$$m\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

(1) 当$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$时,$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$,则对任意的$(\xi,\eta)\in D$,有

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

(2) 当$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma>0$时,

由$m\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$,得

$$m\leqslant\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma\Big/\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M,$$

由介值定理,存在$(\xi,\eta)\in D$,使得

$$f(\xi,\eta)=\frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma},$$

即
$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

24.【证明】$\bar{x}=\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma/\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x/\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$，$\bar{x}>\frac{2a}{3}\Leftrightarrow\int_0^a\left(x-\frac{2a}{3}\right)f(x)\mathrm{d}x>0.$

令 $\varphi(x)=\int_0^x\left(t-\frac{2x}{3}\right)f(t)\mathrm{d}t$，$\varphi(0)=0$，$\varphi'(x)=\frac{xf(x)}{3}-\frac{2}{3}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$\varphi'(0)=0$，

$\varphi''(x)=\frac{xf'(x)}{3}-\frac{xf'(\xi)}{3}$，$0<\xi<x$. 因为 $f''(x)>0$，所以 $f'(x)$ 单调增加，所以

$\varphi''(x)>0$. 由 $\begin{cases}\varphi''(x)>0(x>0)\\ \varphi'(0)=0\end{cases}\Rightarrow\varphi'(x)>0(x>0)$，再由 $\begin{cases}\varphi'(x)>0(x>0)\\ \varphi(0)=0\end{cases}\Rightarrow$

$\varphi(x)>0(x>0)\Rightarrow\varphi(a)>0$，原不等式得证.

25.【证明】因为积分区域关于直线 $y=x$ 对称，

所以 $\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是 $\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

又因为 $f(x)>0$，所以 $\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\geqslant 2$，从而

$$\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(b-a)^2.$$

26.【解】$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t r\mathrm{d}r\int_0^h[z^2+f(r^2)]\mathrm{d}z=2\pi\int_0^t r\left[\frac{h^3}{3}+hf(r^2)\right]\mathrm{d}r$，

$$\lim_{t\to0}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{F'(t)}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{2\pi t\left[\frac{h^3}{3}+hf(t^2)\right]}{2t}=\pi\left[\frac{h^3}{3}+hf(0)\right].$$

27.【证明】令 $f(x,y,z)=x+2y-2z+5$，

因为 $f'_x=1\neq0$，$f'_y=2\neq0$，$f'_z=-2\neq0$，

所以 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega$ 的边界 $x^2+y^2+z^2=1$ 上取到最大值和最小值.

令 $F(x,y,z,\lambda)=x+2y-2z+5+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$，

由 $\begin{cases}F'_x=1+2\lambda x=0,\\ F'_y=2+2\lambda y=0,\\ F'_z=-2+2\lambda z=0,\\ F'_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0,\end{cases}$ 得驻点为 $P_1\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$，$P_2\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

因为 $f(P_1)=8$，$f(P_2)=2$，所以 $\sqrt[3]{f(x,y,z)}$ 在 $\Omega$ 上的最大值与最小值分别为 2 和 $\sqrt[3]{2}$，于是

$$\frac{4\sqrt[3]{2}\pi}{3}\leqslant\iiint\limits_\Omega\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\leqslant\frac{8\pi}{3}.$$

28.【解】设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$，则

$\iint\limits_D x[\sqrt{1-x^2}+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^{1}x\,dx\int_{x^3}^{1}[\sqrt{1-x^2}+yf(x^2+y^2)]dy$$

$$=\int_{-1}^{1}x\,dx\int_{x^3}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dy+\int_{-1}^{1}x\,dx\int_{x^3}^{1}yf(x^2+y^2)dy$$

$$=\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}(1-x^3)dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\,dx\int_{x^3}^{1}f(x^2+y^2)d(x^2+y^2)$$

$$=-\int_{-1}^{1}x^4\sqrt{1-x^2}\,dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[F(x^2+1)-F(x^2+x^6)]dx$$

$$=-2\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx\overset{x=\sin t}{=\!=}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=-2(I_4-I_6)=-\frac{\pi}{16}.$$

**29.【解】** $\int_0^a dx\int_0^x\frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy=\int_0^a f'(y)dy\int_y^a\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx$,

而 $\int_y^a\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dx=\int_y^a\frac{d\left(x-\frac{a+y}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a-y}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+y}{2}\right)^2}}=\arcsin\frac{x-\frac{a+y}{2}}{\frac{a-y}{2}}\Bigg|_y^a=\pi$,

于是 $\int_0^a dx\int_0^x\frac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dy=\pi\int_0^a f'(y)dy=\pi[f(a)-f(0)]$.

**30.【证明】** $\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}\leqslant\dfrac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$ 等价于 $\int_0^1 f^2(x)dx\int_0^1 xf(x)dx\geqslant\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 xf^2(x)dx$,

等价于 $\int_0^1 f^2(x)dx\int_0^1 yf(y)dy\geqslant\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 yf^2(y)dy$,或者

$$\int_0^1 dx\int_0^1 yf(x)f(y)[f(x)-f(y)]dy\geqslant 0.$$

令 $I=\int_0^1 dx\int_0^1 yf(x)f(y)[f(x)-f(y)]dy$,

根据对称性,$I=\int_0^1 dx\int_0^1 xf(x)f(y)[f(y)-f(x)]dy$,

$2I=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)f(y)(y-x)[f(x)-f(y)]dy$,

因为 $f(x)>0$ 且单调减少,所以 $(y-x)[f(x)-f(y)]\geqslant 0$,于是 $2I\geqslant 0$,或 $I\geqslant 0$,

所以 $\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}\leqslant\dfrac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$.

**31.【证明】** 令 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,

$S=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant R,0\leqslant y\leqslant R\}$,

$D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$

$\varphi(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$,

因为 $\varphi(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}\geqslant 0$ 且 $D_1\subset S\subset D_2$,

所以 $\iint\limits_{D_1}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy\leqslant\iint\limits_{S}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy\leqslant\iint\limits_{D_2}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$,

而$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$，　$\iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$，

$$\iint\limits_{S} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^R e^{-x^2}\,dx\int_0^R e^{-y^2}\,dy = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

于是$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \leqslant \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$，

令 $R\to+\infty$，同时注意到$\int_0^R e^{-x^2}\,dx > 0$，根据夹逼定理得$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

# 七、曲线积分与曲面积分

## ◇ 填空题

**1.【解】**$L:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1}$，参数形式为 $L:\begin{cases}x=t,\\ y=-1+t,\\ z=1+t,\end{cases}$

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt=\sqrt{3}\,dt,$$

则$\int_L (x+y+z)\,ds = 3\sqrt{3}\int_0^1 t\,dt = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

**2.【解】** 
$$\oint_L (x^2+2y^2+z)\,ds = \oint_L (x^2+2y^2)\,ds = \oint_L (x^2+y^2+z^2)\,ds$$
$$=\oint_L a^2\,ds = a^2\oint_L ds = 2\pi a^3.$$

**3.【解】**$L$ 的极坐标形式为 $L:r^2=a^2\cos 2\theta$，　$ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$，

$$\int_L |y|\,ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,d\theta = 2a^2(2-\sqrt{2}).$$

**4.【解】**$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=6x^2yz-2x^2yz-2x^2yz=2x^2yz$，

$\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\boldsymbol{A})_M=8$，$\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\boldsymbol{A})_M=4$，$\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\boldsymbol{A})_M=2$，$\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=\frac{2}{3}$，$\cos\gamma=-\frac{1}{3}$，

则$\frac{\partial}{\partial l}(\operatorname{div}\boldsymbol{A})\big|_M = 8\times\frac{2}{3}+4\times\frac{2}{3}+2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{22}{3}$.

**5.【解】**$P(x,y)=ye^x-e^{-y}+y$，　$Q(x,y)=xe^{-y}+e^x$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^{-y}+e^x,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=e^x+e^{-y}+1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-1,$$

令 $L_0:y=0$（起点 $x=2$，终点 $x=0$），

则$\int_L (ye^x-e^{-y}+y)dx+(xe^{-y}+e^x)dy=\left(\oint_{L+L_0}-\int_{L_0}\right)(ye^x-e^{-y}+y)dx+(xe^{-y}+e^x)dy$，

而$\oint_{L+L_0}(ye^x-e^{-y}+y)dx+(xe^{-y}+e^x)dy$

$=\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{x(2-x)}\mathrm{d}y=\int_0^2 x(2-x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$,

$\int_{L_0}(ye^x-e^{-y}+y)\mathrm{d}x+(xe^{-y}+e^x)\mathrm{d}y=\int_2^0 -\mathrm{d}x=2$,

于是$\int_L(ye^x-e^{-y}+y)\mathrm{d}x+(xe^{-y}+e^x)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}-2=-\frac{2}{3}$.

*6*.【解】$P(x,y)=xf(x^2+y^2)$,  $Q(x,y)=yf(x^2+y^2)$,

因为$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2xyf'(x^2+y^2)$,所以曲线积分与路径无关,

故 $I=\int_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=\frac{1}{2}\int_{(0,0)}^{(2,0)}f(x^2+y^2)\mathrm{d}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t=1$.

## ◇ 选择题

*7*.【解】$\Phi=\oiint\limits_S(x^3+2y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=-3\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$

$=-6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\mathrm{d}r=-\frac{192\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi=-\frac{32\pi}{5}$,选(D).

## ◇ 解答题

*8*.【解】曲面 $2z=x^2+y^2$ 上任一点$(x,y,z)$指向上侧的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{-x,-y,1\}$,法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\quad \cos\beta=-\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

则$\iint\limits_\Sigma[yf(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[xf(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[2xyf(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iint\limits_\Sigma\{[yf(x,y,z)+x]\cos\alpha+[xf(x,y,z)+y]\cos\beta+[2xyf(x,y,z)+z]\cos\gamma\}\mathrm{d}S$

$=-\iint\limits_\Sigma\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}S=-\frac{1}{2}\iint\limits_\Sigma\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}S$,

因为 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

所以原式$=-\frac{1}{2}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_2^4 r^3\mathrm{d}r=-60\pi$.

*9*.【解】因为曲线积分与路径无关,所以有 $\cos y=f'_y(x,y)$,则 $f(x,y)=\sin y+C(x)$,而$\int_{(0,0)}^{(t,t^2)}f(x,y)\mathrm{d}x+x\cos y\mathrm{d}y=t^2$,即$\int_0^t C(x)\mathrm{d}x+\int_0^{t^2}t\cos y\mathrm{d}y=t^2$,两边对 $t$ 求导数得 $C(t)=2t-\sin t^2-2t^2\cos t^2$,于是 $f(x,y)=\sin y+2x-\sin x^2-2x^2\cos x^2$.

*10*.【解】$P=\frac{x-y}{x^2+4y^2}$,$Q=\frac{x+4y}{x^2+4y^2}$,$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$,令 $C:x^2+4y^2=r^2(r>0)$ 逆时针且 $C$ 在曲线 $L$ 内,则有

$$\oint_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\oint_C \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_C (x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{r^2}\iint_D 2\mathrm{d}\sigma=2\times\frac{1}{r^2}\times\pi\times r\times\frac{r}{2}=\pi.$$

*11*.【解】任取 $M(x,y)\in L, r=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$,

两质点的引力大小为 $|\boldsymbol{F}|=\frac{k}{r^2}=\frac{k}{x^2+(y-1)^2}$,

$\overrightarrow{MA}=\{-x,1-y\}$,　$\boldsymbol{F}^0=\overrightarrow{MA}^0=\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}\{-x,1-y\}$,

则 $\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{F}^0=\frac{k}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{3}{2}}}\{-x,1-y\}$,

则 $W=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$,

其中 $P(x,y)=-\frac{kx}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{3}{2}}}$,　$Q(x,y)=\frac{k(1-y)}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{3}{2}}}$,

因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{3kx(y-1)}{[x^2+(y-1)^2]^{\frac{5}{2}}}$,所以曲线积分与路径无关,从而

$$W=\int_{\overline{BO}} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-k\int_2^0 \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{k}{\sqrt{1+x^2}}\bigg|_0^2=k\left(1-\frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

*12*.【解】设原点 $O$ 到点 $M(\xi,\eta,\zeta)$ 的直线为 $L$,$L$ 的参数方程为

$$L:\begin{cases}x=\xi t\\ y=\eta t(\text{起点 } t=0,\text{终点 } t=1)\\ z=\zeta t\end{cases}$$

$$W=\int_L yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=\int_0^1 3\xi\eta\zeta t^2\mathrm{d}t=\xi\eta\zeta$$

令 $F(\xi,\eta,\zeta)=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right)$,

由 $\begin{cases}F'_\xi=\eta\zeta+\frac{2\lambda\xi}{a^2}=0,\\ F'_\eta=\xi\zeta+\frac{2\lambda\eta}{b^2}=0,\\ F'_\zeta=\xi\eta+\frac{2\lambda\zeta}{c^2}=0,\\ F'_\lambda=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$　得 $\xi=\frac{a}{\sqrt{3}},\eta=\frac{b}{\sqrt{3}},\zeta=\frac{c}{\sqrt{3}}$.

所以当点 $M$ 的坐标为 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 时,力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功最大,且最大功为 $\frac{\sqrt{3}}{9}abc$.

13.【解】因为曲线积分与路径无关，所以有

$f''(x)=3f'(x)-2f(x)+xe^{2x}$，即 $f''(x)-3f'(x)+2f(x)=xe^{2x}$，

由特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$ 得 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，

则方程 $f''(x)-3f'(x)+2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$，

令特解 $f_0(x)=x(ax+b)e^{2x}$，代入原微分方程得 $a=\dfrac{1}{2},b=-1$，

故所求 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)e^{2x}$.

14.【解】$\iint\limits_S \dfrac{dS}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_S \dfrac{dS}{a^2+z^2}$，

令 $S_1:y=-\sqrt{a^2-x^2},S_2:y=\sqrt{a^2-x^2},D_{xz}=\{(x,z)\mid -a\leqslant x\leqslant a,-a\leqslant z\leqslant a\}$，

$dS=\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\,dz$，

由对称性得

$$\iint\limits_S \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_S \frac{dS}{a^2+z^2}=2\iint\limits_{S_1} \frac{dS}{a^2+z^2}=2a\iint\limits_{D_{xz}} \frac{dx\,dz}{(a^2+z^2)\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=2a\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-a}^{a}\frac{dz}{a^2+z^2}=8a\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^a\frac{dz}{a^2+z^2}$$

$$=8a\times\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{a}\times\frac{\pi}{4}=\pi^2.$$

15.【解】由对称性得 $\iint\limits_S x^2dS=\iint\limits_S y^2dS=\iint\limits_S z^2dS=\dfrac{1}{3}\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dS$，

而 $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dS=a^2\iint\limits_S dS=4\pi a^4$，

所以 $\iint\limits_S (x^2+4y^2+9z^2)dS=14\iint\limits_S x^2dS=14\times\dfrac{1}{3}\times 4\pi a^4=\dfrac{56\pi a^4}{3}$.

16.【解】曲面 $\Sigma:z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$，补充曲面 $\Sigma_0:z=0(x^2+y^2\leqslant 1)$，取下侧，由高斯公式得

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}(x^3+z)dy\,dz+(y^3+x)dz\,dx+dx\,dy=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$$

$$=3\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)dx\,dy\int_0^{1-x^2-y^2}dz=3\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)dx\,dy$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3(1-r^2)dr=\frac{\pi}{2},$$

$$\iint\limits_{\Sigma_0}(x^3+z)dy\,dz+(y^3+x)dz\,dx+dx\,dy=\iint\limits_{\Sigma_0}dx\,dy=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}dx\,dy=-\pi,$$

则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+z)dy\,dz+(y^3+x)dz\,dx+dx\,dy=\dfrac{3\pi}{2}$.

17.【解】方法一　$\boldsymbol{n}=\{0,-1,1\},\cos\alpha=0,\cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

由斯托克斯公式得$\oint_C xyz\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & xyz\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma yz\mathrm{d}S$，

$\Sigma:z=y((x,y)\in D_{xy})$，其中 $D_{xy}:x^2+2y^2\leqslant 1$，

故$\oint_C xyz\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$.

**方法二**　令 $C:\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,\\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t,\end{cases}$

则$\oint_C xyz\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$.

18.【解】设由 $L$ 所围成的平面为 $\Sigma$，按右手准则，$\Sigma$ 取上侧，

$\boldsymbol{n}=\{0,-3,1\}$，$\cos\alpha=0$，$\cos\beta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{10}}$，由斯托克斯公式得

$$\oint_L yz\mathrm{d}x+3xz\mathrm{d}y-xy\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{10}}\iint_\Sigma\begin{vmatrix}0 & -3 & 1\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ yz & 3xz & -xy\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{10}}\iint_\Sigma\begin{vmatrix}0 & -3 & 1\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ yz & 3xz & -xy\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{2}{\sqrt{10}}\iint_\Sigma(-3y+z)\mathrm{d}S=\frac{2}{\sqrt{10}}\iint_\Sigma\mathrm{d}S$$

因为 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{10}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 4y$，

所以$\oint_L yz\mathrm{d}x+3xz\mathrm{d}y-xy\mathrm{d}z=2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\pi$.

19.【解】取平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 上被折线 $C$ 所围的上侧部分为 $S$，其法向量的方向余弦为

$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 设 $D_{xy}$ 表示曲面 $S$ 在平面 $xOy$ 上的投影区域，其面积为 $A=\frac{3}{4}$，

由斯托克斯公式得

$$\left|\oint_C(z^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z\right|$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z^2-y^2 & x^2-z^2 & y^2-x^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_S(x+y+z)\mathrm{d}S=\frac{6}{\sqrt{3}}\iint_S\mathrm{d}S=\frac{9}{2}.$$

20.【解】令 $P(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=-\frac{x-y}{x^2+y^2}=\frac{y-x}{x^2+y^2}$，显然$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

令 $L_r:x^2+y^2=r^2$，其中 $r>0$，$L_r$ 在 $L$ 内，方向取逆时针，由格林公式得

$$\oint_{L+L_r^-}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

其中 $D$ 为 $L$ 与 $L_r^-$ 所围成的平面区域,则

$$I=\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{L_r}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

而

$$\oint_{L_r}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{-r(r\cos\theta+r\sin\theta)\sin\theta-r(r\cos\theta-r\sin\theta)\cos\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta=-2\pi,$$

所以 $I=\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=-2\pi.$

**21.【证明】** 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$

由 $\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\theta$,得 $r\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot r\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot r\sin\theta=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$,

于是

$$I=\iint_{D_r}\frac{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_r^1\frac{r\frac{\partial f}{\partial r}}{r^2}\times r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}[f(\cos\theta,\sin\theta)-f(r\cos\theta,r\sin\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

再根据积分中值定理得 $I=-2\pi f(r\cos\xi,r\sin\xi)$,其中 $\xi$ 是介于 0 与 $2\pi$ 之间的值.

故原式 $=-\frac{1}{2\pi}\times\lim\limits_{r\to0}[-2\pi f(r\cos\xi,r\sin\xi)]=\lim\limits_{r\to0}f(r\cos\xi,r\sin\xi)=f(0,0).$

**22.【解】** $I=\oint_L\frac{y\mathrm{d}x}{(2-x)^2+y^2}+\frac{(2-x)\mathrm{d}y}{(2-x)^2+y^2}+\oint_L\frac{y\mathrm{d}x}{(2+x)^2+y^2}-\frac{(2+x)\mathrm{d}y}{(2+x)^2+y^2}$

$=I_1+I_2$,

显然曲线积分 $I_1,I_2$ 都满足柯西-黎曼条件.

(1) 当(2,0),(−2,0) 都在 $L$ 所围成的区域之外时,$I_1=I_2=0$,因此 $I=0$;

(2) 当(2,0),(−2,0) 都在 $L$ 所围成的区域之内时,分别以这两个点为中心以 $r_1,r_2$ 为半径作圆 $C_1,C_2$,使它们都在 $L$ 内,则 $I_1=\oint_{C_1}\frac{y\mathrm{d}x}{(2-x)^2+y^2}+\frac{(2-x)\mathrm{d}y}{(2-x)^2+y^2}=-2\pi$,同理 $I_2=-2\pi$,因此 $I=-4\pi$;

(3) 当(2,0),(−2,0) 有一个点在 $L$ 围成的区域内,一个点在 $L$ 围成的区域外时,$I=-2\pi$.

**23.【解】** 由 $f\cdot g=v\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$$=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}-\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial(uv)}{\partial x}-\frac{\partial(uv)}{\partial y},$$

得 $\iint_D f\cdot g\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left[\frac{\partial(uv)}{\partial x}-\frac{\partial(uv)}{\partial y}\right]\mathrm{d}\sigma=\oint_L uv\mathrm{d}x+uv\mathrm{d}y=\oint_L y\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta)d\theta=-\pi$$（其中 $L$ 为单位圆周的正向）.

*24.*【证明】$Pdx+Qdy=\{P,Q\}\cdot\{dx,dy\}$，

因为 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，

所以有 $|Pdx+Qdy|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\cdot\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\leqslant Mds$，

于是 $\left|\int_L Pdx+Qdy\right|\leqslant\int_L|Pdx+Qdy|\leqslant\int_L Mds=M\int_L ds=Ml$.

# 八、无穷级数

## ◇ 填空题

*1.*【解】$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$，

由 $\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{1+(x-3)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-3)^n(2<x<4)$，

$\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{2+(x-3)}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-3)^n(1<x<5)$ 得

$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})(x-3)^n(2<x<4)$，

由 $\dfrac{f^{(n)}(3)}{n!}=(-1)^n(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})$ 得 $f^{(n)}(3)=(-1)^n(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})n!$.

*2.*【解】令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!}x^n(-\infty<x<+\infty)$，

则 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n+e^x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n+e^x$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)+1}{(n-1)!}x^n+e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{(n-1)!}x^n+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+e^x$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^n+(x+1)e^x=(x^2+x+1)e^x,$$

于是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!}=S(1)=3e$.

*3.*【解】令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}x^{n+1}(-1<x<1)$，

则 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'=x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{x}{(1-x)^2}$，

因为 $S(0)=0$，

所以 $S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x\dfrac{t}{(1-t)^2}dt=\int_0^x\left[\dfrac{1}{t-1}+\dfrac{1}{(t-1)^2}\right]dt$

$$=\ln|t-1|\Big|_0^x-\frac{1}{t-1}\Big|_0^x=\ln|x-1|-\left(\frac{1}{x-1}+1\right)=\ln|x-1|-\frac{x}{x-1},$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)2^n}=2S\left(\dfrac{1}{2}\right)=2(1-\ln 2)$.

4.【解】$n\to\infty$ 时，$\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}=\dfrac{1}{n^p(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\sim\dfrac{1}{2n^{p+\frac{1}{2}}}$，

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 条件收敛，所以 $0<p+\dfrac{1}{2}\leqslant 1$，即 $p$ 的范围是 $-\dfrac{1}{2}<p\leqslant\dfrac{1}{2}$.

## ◇ 选择题

5.【解】因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定不是正项或负项级数，故 $r\leqslant 0$.

若 $|r|<1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=|r|<1$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，矛盾；

若 $|r|>1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=|r|>1$，存在充分大的 $N$，当 $n>N$ 时，$\{|u_n|\}$ 单调增加，

$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，与已知矛盾，故 $|r|=1$，再由 $r\leqslant 0$ 得 $r=-1$，选(C).

6.【解】显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，因为 $n\to\infty$ 时，$\ln^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim\dfrac{1}{n^2}$，而

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，选(B).

7.【解】因为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=6$ 处条件收敛，所以级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R=4$，又因为级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^n$ 与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有相同的收敛半径，所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^n$ 的收敛半径为 $R=4$，于是$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}(x-2)^{2n}$ 的收敛半径为 $R=2$，选(A).

8.【解】对函数 $f(x)$ 进行偶延拓，使 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为偶函数，再进行周期为 2 的周期延拓，然后把区间延拓和周期延拓后的函数展开成傅里叶级数，傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，则

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(2-\frac{5}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}-0\right)+f\left(\frac{1}{2}+0\right)\right]=\frac{3}{4}\text{，选(C).}$$

## ◇ 解答题

9.【解】令 $u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$，$n=1,2,3,\cdots$

则 $0\leqslant u_n=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\frac{1}{n}$，

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\arctan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}\arctan\dfrac{1}{n}$ 收敛，

由正项级数的比较审敛法得 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sin\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ 收敛.

**10.**【解】令 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，由交错级数的莱布尼茨审敛法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项收敛级数，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，

取 $\varepsilon_0=1$，存在自然数 $N$，当 $n>N$ 时，$|a_n-0|<1$，从而 $0\leqslant a_n<1$，

当 $n>N$ 时，有 $0\leqslant a_n^2<a_n<1$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛得 $\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n$ 收敛，再由比较审敛法得 $\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

**11.**【解】$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 不一定收敛，例如：$a_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}+(-1)^n\sin\frac{1}{n}\right]$，显然 $0\leqslant a_n<\frac{1}{n}$，

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n}+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}\right]$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}$ 发散，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2n}+\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}\right]$ 发散；

$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ 不一定收敛，例如：$a_n=\frac{1}{(n+1)^2}$，显然 $0\leqslant a_n<\frac{1}{n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散；

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 不一定收敛，例如：$a_n=\frac{1}{n+1}$，显然 $0\leqslant a_n<\frac{1}{n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散；

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n^2$ 一定收敛.

由 $0\leqslant a_n<\frac{1}{n}$，得 $0\leqslant a_n^2<\frac{1}{n^2}$，又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n^2$ 绝对收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n^2$ 一定收敛.

**12.**【证明】因为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$，于是 $1-\frac{\ln(1+u_n)}{u_n}>0$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{\ln(1+u_n)}{u_n}\right]$ 为正项级数，

而 $\ln(1+u_n)=u_n-\frac{u_n^2}{2}+o(u_n^2)$，

所以 $n\to\infty$ 时，$1-\frac{\ln(1+u_n)}{u_n}\sim\frac{1}{2}u_n$，再由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}u_n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{\ln(1+u_n)}{u_n}\right]$ 收敛.

**13.** (1)【解】$a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$，

$S_n=\frac{1}{1\times 2}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=1$.

(2)【证明】因为 $0\leqslant a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^nx\,dx\overset{t=\tan x}{=\!=}\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt\leqslant\int_0^1t^n dt=\frac{1}{n+1}$，

所以 $0 \leqslant \frac{a_n}{n^\lambda} \leqslant \frac{1}{n^{1+\lambda}}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛($\lambda > 0$)，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

**14.【解】** $a_n = \int_0^1 x^2(1-x)^n \mathrm{d}x \xlongequal{1-x=t} \int_1^0 (1-t)^2 t^n(-\mathrm{d}t) = \int_0^1 (t^{n+2} - 2t^{n+1} + t^n)\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{n+3} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

因为 $a_n \sim \frac{2}{n^3}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

因为 $a_n = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$，

所以 $S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right),$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{6}$.

**15.【证明】** 令 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，$S'_{n+1} = (a_1 - a_0) + 2(a_2 - a_1) + \cdots + (n+1)(a_{n+1} - a_n)$，

则 $S'_{n+1} = (n+1)a_{n+1} - S_n - a_0$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛且数列$\{na_n\}$ 收敛，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S'_{n+1}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}$ 都存在，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，根据级数收敛的定义，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

**16.【解】** 因为$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调减少且 $a_n > 0(n = 1,2,\cdots)$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，得 $A > 0$. 根据正项级数的根值审敛法，由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+A} < 1$，得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 收敛.

**17.【证明】** (1) 因为$\{na_n\}$ 有界，所以存在 $M > 0$，使得 $0 < na_n \leqslant M$，即 $0 < a_n^2 \leqslant \frac{M^2}{n^2}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{M^2}{n^2}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

(2) 取 $\varepsilon_0 = \frac{k}{2} > 0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = k > 0$，所以存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，

$|n^2 a_n - k| < \frac{k}{2}$，即 $0 < n^2 a_n < \frac{3k}{2}$，或者 $0 < a_n < \frac{3k}{2}\frac{1}{n^2}$，

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3k}{2}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

**18.【证明】** (1) 由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$，得 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \frac{a_n}{b_n}$，则数列单调递减有下界，根据极限存在准则，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 存在，令 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A$. 无论 $A=0$ 还是 $A>0$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 若 $A=0$，由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散；若 $A>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 敛散性相同，故若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

**19.【证明】**显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 为正项级数.

(1) 因为对所有 $n$ 满足 $c_nu_n-c_{n+1}u_{n+1}\leqslant 0$，于是

$$c_nu_n\leqslant c_{n+1}u_{n+1}\Rightarrow c_nu_n\geqslant\cdots\geqslant c_1u_1>0,$$

从而 $u_n\geqslant c_1u_1\cdot\dfrac{1}{c_n}$. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

(2) 因为对所有 $n$ 满足 $c_n\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-c_{n+1}\geqslant a$，则 $c_nu_n-c_{n+1}u_{n+1}\geqslant au_{n+1}$，即

$c_nu_n\geqslant(c_{n+1}+a)u_{n+1}$，所以 $\dfrac{c_n}{c_{n+1}+a}\geqslant\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$，

于是 $0<u_{n+1}\leqslant\dfrac{c_n}{c_{n+1}+a}u_n<\dfrac{c_n}{c_{n+1}}u_n$，

$\Rightarrow 0<u_n<\dfrac{c_{n-1}}{c_n}u_{n-1}\Rightarrow 0<u_n<\cdots<\dfrac{c_1}{c_n}u_1$.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{c_1u_1}{c_n}=c_1u_1\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_n}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

**20.【解】**由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$，得幂级数的收敛半径为 $R=1$.

(1) 当 $p<0$ 时，记 $q=-p$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^q}{\ln n}=+\infty$，因而当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p\ln n}$ 发散，此时幂级数的收敛域为 $(-1,1)$；

(2) 当 $0\leqslant p<1$ 时，对 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p\ln n}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{1}{n^p\ln n}=+\infty$，所以 $x=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p\ln n}$ 发散，当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p\ln n}$ 显然收敛，此时幂级数的收敛域为 $[-1,1)$；

(3) 当 $p=1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$ 收敛，此时收敛域为 $[-1,1)$；

(4) 当 $p>1$ 时，对 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p\ln n}$，因为 $\dfrac{1}{n^p\ln n}\leqslant\dfrac{1}{n^p\ln 2}$，而 $\dfrac{1}{\ln 2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p\ln n}$ 收敛，当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p\ln n}$ 显然绝对收敛，此时幂级数的收敛域为 $[-1,1]$.

**21.【证明】**由 $|u_{n+1}-u_n|=|f(u_n)-f(u_{n-1})|=|f'(\xi_1)||u_n-u_{n-1}|$

$$\leqslant q|u_n-u_{n-1}|\leqslant q^2|u_{n-1}-u_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant q^n|u_1-u_0|$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_{n+1}-u_n|$ 收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ 绝对收敛.

22.【证明】由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$得$f(0)=0,f'(0)=1$，于是$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=f'(\xi)\dfrac{1}{n}\left(0<\xi<\dfrac{1}{n}\right)$.

因为$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=1$，所以存在$\delta>0$，当$|x|<\delta$时，$f'(x)>0$，

于是存在$N>0$，当$n>N$时，$\dfrac{1}{n}<\delta$，

$f\left(\dfrac{1}{n}\right)>f(0)=0,f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)<f\left(\dfrac{1}{n}\right)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$，

由莱布尼茨审敛法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$收敛，

因为$n\to\infty$时，$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=f'(\xi)\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$发散.

23.【证明】由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，得$f(0)=0,f'(0)=0$. 由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,\text{其中 }\xi\text{ 介于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间}.$$

又$f''(x)$在$x=0$的某邻域内连续，从而可以找到一个原点在其内部的闭区间，在此闭区间内有$|f''(x)|\leqslant M$，其中$M>0$为$f''(x)$在该闭区间上的上界.

所以对充分大的$n$，有

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2},$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|$收敛，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$绝对收敛.

24.【解】由$y'=x+y$得$y''=1+y'$，再由$y(0)=1$得$y'(0)=1,y''(0)=2$，根据麦克劳林公式，有

$$y\left(\frac{1}{n}\right)=y(0)+y'(0)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}y''(0)\left(\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

因为$n\to\infty$时，$\left|y\left(\dfrac{1}{n}\right)-1-\dfrac{1}{n}\right|\sim\dfrac{1}{n^2}$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\dfrac{1}{n}\right)-1-\dfrac{1}{n}\right]$绝对收敛.

25.【解】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}+\dfrac{4^{2n}}{2n}x^{2n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{2n}}{2n}x^{2n}$，

幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$的收敛半径为$R_1=\dfrac{1}{2}$，

当$x=\pm\dfrac{1}{2}$时，因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}}{2n-1}\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)^{2n-1}=\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$发散，

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$的收敛域为$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$；

幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{2n}}{2n}x^{2n}$的收敛半径为$R_2=\dfrac{1}{4}$，

当$x=\pm\dfrac{1}{4}$时，因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{2n}}{2n}\left(\pm\dfrac{1}{4}\right)^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$发散，

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^{2n}}{2n}x^{2n}$的收敛域为$\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$，

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$的收敛域为$\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

*26*.【解】$f(x)=\ln(1-x-2x^2)=\ln[(x+1)(1-2x)]=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$,

因为$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad (-1<x\leqslant 1)$,

$$\ln(1-2x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n \quad \left(-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2}\right),$$

所以 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}-\dfrac{2^n}{n}\right]x^n$,收敛域是$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

*27*.【解】级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$的收敛半径为$R=+\infty$,收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$,

则
$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$$
$$=2x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{2(n-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}-1$$
$$=2x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}-1$$
$$=(2x^2+1)e^{x^2}-1 \quad (-\infty<x<+\infty).$$

*28*.【解】显然该幂级数的收敛域为$[-1,1]$,

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$,

则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^{n+1}}{n}-\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$,

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-x\ln(1-x) \quad (-1\leqslant x<1)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x=-x-\ln(1-x) \quad (-1\leqslant x<1),$$

则 $S(x)=x+(1-x)\ln(1-x) \quad (-1\leqslant x<1)$.

当 $x=1$ 时,$S(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$,

所以 $S(x)=\begin{cases}x+(1-x)\ln(1-x), & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$

*29*.【解】由$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$,得收敛半径$R=+\infty$,该幂级数的收敛区间为$(-\infty,+\infty)$,

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!}x^n$,

则 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n+e^x$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n}{n!}x^n+e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+e^x$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+e^x=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^{n-2}+xe^x+e^x$$

$$=x^2e^x+xe^x+e^x=(x^2+x+1)e^x\quad(-\infty<x<+\infty).$$

30.【解】$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}.$$

令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$,显然其收敛域为$(-1,1)$,

则 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\left(\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^n\right)''=\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)''=\dfrac{2}{(1-x)^3}$,

于是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\dfrac{1}{4}S\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{2}{3}=\dfrac{22}{27}$.

31.【解】(1) 由 $xy'+y=e^x$ 得 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{e^x}{x}$,解得

$$y=\left[\int\frac{e^x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\frac{e^x+C}{x},$$

因为 $\lim\limits_{x\to0}y(x)=1$,所以 $C=-1$,于是

$F(x)=\dfrac{e^x-1}{x}=1+\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{(n+1)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty$ 且 $x\neq0)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=[F(x)]'\Big|_{x=1}=1$.

32.【解】$f(0)=\dfrac{\pi}{4}$, $\quad f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}\quad(-1<x<1)$,

由逐项可积性得 $f(x)-f(0)=\displaystyle\int_0^x f'(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$,

所以 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1\leqslant x<1)$.

33.【解】(1) $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n-1}+(n-1)}{(n-1)!}x^{n-1}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-2)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n+x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=f(x)+xe^x$$

则 $f(x)$ 满足的微分方程为 $f'(x)-f(x)=xe^x$,

$$f(x)=\left[\int xe^xe^{\int-dx}dx+C\right]e^{-\int-dx}=e^x\left(\frac{x^2}{2}+C\right)$$

因为 $a_0=1$,所以 $f(0)=1$,从而 $C=1$,于是 $f(x)=e^x\left(\dfrac{x^2}{2}+1\right)$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}=f(1)=\frac{3e}{2}$.

**34.【证明】**显然级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$,

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!},S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!},S'''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!},$$

$$S^{(4)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=S(x),$$

显然 $S(x)$ 满足微分方程 $y^{(4)}-y=0$.

$y^{(4)}-y=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$,

由 $S(0)=1,S'(0)=S''(0)=S'''(0)=0$ 得

$C_1=\frac{1}{4},C_2=\frac{1}{4},C_3=\frac{1}{2},C_4=0$,故和函数为 $S(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{4}+\frac{1}{2}\cos x$.

**35.【解】**显然函数 $f(x)$ 是在$[-1,1]$上满足收敛定理的偶函数,则

$$a_0=2\int_0^1 f(x)dx=5,$$

$$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi^2}, & n\text{ 为奇数}\\ 0, & n\text{ 为偶数}\end{cases}(n=1,2,\cdots),$$

$b_n=0(n=1,2,\cdots)$,

又 $f(x)\in C[-1,1]$,所以

$$2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi x(-1\leqslant x\leqslant 1)$$

令 $x=0$ 得

$$2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\text{从而}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

令$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S$,则 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right]=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S$,

解得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

**36.【解】**将 $f(x)$ 进行偶延拓和周期延拓,

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x-1)dx=0,$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\frac{8}{n^2\pi^2}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

$b_n=0(n=1,2,\cdots)$,于是 $f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}(0\leqslant x\leqslant 2)$.

**37.【证明】**当 $q>1$ 时,取 $\varepsilon_0=\frac{q-1}{2}>0$,因为$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=q$,所以存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,

$\left|\dfrac{\ln\dfrac{1}{u_n}}{\ln n}-q\right|<\dfrac{q-1}{2}$,从而有$\dfrac{\ln\dfrac{1}{u_n}}{\ln n}>\dfrac{q+1}{2}=r(>1)$,所以有 $0\leqslant u_n<\dfrac{1}{n^r}$,

而 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\dfrac{1}{n^r}$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

当 $q<1$ 时,取 $\varepsilon_0=\dfrac{1-q}{2}>0$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\dfrac{1}{u_n}}{\ln n}=q$,所以存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,

$\left|\dfrac{\ln\dfrac{1}{u_n}}{\ln n}-q\right|<\dfrac{1-q}{2}$,从而有$\dfrac{\ln\dfrac{1}{u_n}}{\ln n}<\dfrac{q+1}{2}=r(<1)$,

所以有 $u_n>\dfrac{1}{n^r}$,而 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\dfrac{1}{n^r}$ 发散,所以 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}u_n$ 发散,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

**38.【证明】**令 $S_n=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$,则 $S_n=a_n-a_0$.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,则有

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=S+a_0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,于是存在 $M>0$,对一切的自然数 $n$ 有 $|a_n|\leqslant M$.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛,所以正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛,又 $0\leqslant|a_nb_n|\leqslant M|b_n|$,

再由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M|b_n|$ 收敛,根据正项级数的比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛,即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

**39.【解】**由 $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2x\tan^nx\,dx=\dfrac{1}{n+1}$,$a_n+a_{n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2x\tan^{n-2}x\,dx=\dfrac{1}{n-1}$,得

$\dfrac{1}{2(n+1)}\leqslant a_n\leqslant\dfrac{1}{2(n-1)}(n\geqslant 2)$,即 $a_n\sim\dfrac{1}{2n}(n\to\infty)$,所以$\dfrac{a_n}{n^\lambda}\sim\dfrac{1}{2n^{1+\lambda}}(n\to\infty)$.

(1) 当 $\lambda>0$ 时,因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^{1+\lambda}}$ 收敛,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛;

(2) 当 $\lambda\leqslant 0$ 时,因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^{1+\lambda}}$ 发散,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 发散.

**40.【证明】**(1)$n=1$ 时,$f_1(x)=\int_0^x f_0(t)dt$,等式成立;

设 $n=k$ 时,$f_k(x)=\dfrac{1}{(k-1)!}\int_0^x f_0(t)(x-t)^{k-1}dt$,

则 $n=k+1$ 时,

$$f_{k+1}(x)=\int_0^x f_k(t)dt=\int_0^x dt\int_0^t\frac{1}{(k-1)!}f_0(u)(t-u)^{k-1}du$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^x du\int_u^x f_0(u)(t-u)^{k-1}dt=\frac{1}{k!}\int_0^x f_0(u)(x-u)^k du,$$

由归纳法得 $f_n(x)=\dfrac{1}{(n-1)!}\int_0^x f_0(t)(x-t)^{n-1}dt(n=1,2,\cdots)$.

(2) 对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f_0(t)$ 在 $[0,x]$ 或 $[x,0]$ 上连续，于是存在 $M>0$（$M$ 与 $x$ 有关），使得 $|f_0(t)|\leqslant M$（$t\in[0,x]$ 或 $t\in[x,0]$），于是

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n-1)!}\left|\int_0^x(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t\right|=\frac{M}{n!}|x|^n.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}}{\frac{M}{n!}|x|^n}=0$，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{M}{n!}|x|^n$ 收敛，根据比较审敛法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 绝对收敛.

*41*.【证明】由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1}=1$，得幂级数的收敛半径 $R=1$，所以当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛. 由 $a_{n+1}=-\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)a_n$，得 $a_n=\dfrac{7}{6}(-1)^n(n+1)(n\geqslant 3)$，所以

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1-2x+\frac{7}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{7}{6}(-1)^n(n+1)x^n,$$

由 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{7}{6}(-1)^n(n+1)x^n=\dfrac{7}{6}\sum\limits_{n=3}^{\infty}(n+1)(-x)^n\overset{-x=t}{=}\dfrac{7}{6}\sum\limits_{n=3}^{\infty}(n+1)t^n$

$$=\frac{7}{6}\Big(\sum_{n=3}^{\infty}t^{n+1}\Big)'=\frac{7}{6}\Big(\frac{t^4}{1-t}\Big)'=\frac{7}{6}\,\frac{4t^3-3t^4}{(1-t)^2}=-\frac{7}{6}\,\frac{(4x^3+3x^4)}{(1+x)^2}.$$

得 $S(x)=1-2x+\dfrac{7}{2}x^2-\dfrac{7(4x^3+3x^4)}{6(1+x)^2}$.

# 九、常微分方程

## ◇ 填空题

*1*.【解】由 $\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$ 得函数 $y=y(x)$ 可微且 $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$，积分得

$y(x)=\displaystyle\int\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{2x-x^2}+C$，因为 $y(1)=1$，所以 $C=0$，

于是 $y(x)=\sqrt{2x-x^2}$，故

$$\int_0^2y(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}(x-1)=\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

**2**.【解】由 $y'-x\mathrm{e}^{-y}+\dfrac{1}{x}=0$，得 $\mathrm{e}^yy'-x+\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^y=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^y)}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^y=x$，

令 $z=\mathrm{e}^y$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1}{x}z=x$，解得 $z=\left[\displaystyle\int x\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{3}x^3+C\right)$，

所以原方程的通解为 $\mathrm{e}^y=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{3}x^3+C\right)$.

**3**.【解】令 $y'=p$，得 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程得　$yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-2p^2=0$ 或 $p\left(y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-2p\right)=0$，

则 $p=0$,或$\frac{dp}{dy}-\frac{2}{y}p=0$.

当 $p=0$ 时,$y=C$;

当$\frac{dp}{dy}-\frac{2}{y}p=0$ 时,$p=C_1e^{-\int-\frac{2}{y}dy}=C_1y^2$,即$\frac{dy}{dx}=C_1y^2$.

由$\frac{dy}{dx}=C_1y^2$,得$\frac{dy}{y^2}=C_1dx$,从而$-\frac{1}{y}=C_1x+C_2$,

所以原方程的通解为 $y=C$ 或者$-\frac{1}{y}=C_1x+C_2$.

**4.【解】**$xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x}$,令$\frac{y}{x}=u\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,

所以 $x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}\Rightarrow\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\arcsin u=\ln x+C\Rightarrow\arcsin\frac{y}{x}=\ln x+C$.

**5.【解】**特征值为$\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=1\pm i$,特征方程为$(\lambda-1)(\lambda-1+i)(\lambda-1-i)=0$,

即$\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2=0$,所求方程为$y'''-3y''+4y'-2y=0$.

**6.【解】**$y''-4y'+4y=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$,

由初始条件 $y(0)=1,y'(0)=2$ 得 $C_1=1,C_2=0$,则 $y=e^{2x}$,

于是$\int_0^1y(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2e^xdx=\frac{1}{2}e^x\Big|_0^2=\frac{1}{2}(e^2-1)$.

## ◇ 选择题

**7.【解】**微分方程 $y''+(x-1)y'+x^2y=e^x$ 中,令 $x=0$,则 $y''(0)=2$,

于是$\lim\limits_{x\to0}\frac{y(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{y'(x)-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{y'(x)-y'(0)}{x}=\frac{1}{2}y''(0)=1$,选(A).

**8.【解】**方程 $y''-2y'-3y=(2x+1)e^{-x}$ 的特征方程为$\lambda^2-2\lambda-3=0$,特征值为$\lambda_1=-1$,$\lambda_2=3$,故方程 $y''-2y'-3y=(2x+1)e^{-x}$ 的特解形式为 $x(ax+b)e^{-x}$,选(D).

**9.【解】**因为 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$ 为方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ 的三个线性无关解,所以 $\varphi_1(x)-\varphi_3(x),\varphi_2(x)-\varphi_3(x)$ 为方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ 的两个线性无关解,于是方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ 的通解为

$$C_1[\varphi_1(x)-\varphi_3(x)]+C_2[\varphi_2(x)-\varphi_3(x)]+\varphi_3(x),$$

即 $C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+C_3\varphi_3(x)$,其中 $C_3=1-C_1-C_2$ 或 $C_1+C_2+C_3=1$,选(D).

## ◇ 解答题

**10.** (1)**【解】**$y'+ay=f(x)$ 的通解为 $y=\left[\int_0^xf(t)e^{at}dt+C\right]e^{-ax}$,

由 $y(0)=0$ 得 $C=0$,所以 $y=e^{-ax}\int_0^xf(t)e^{at}dt$.

(2)**【证明】**当 $x\geqslant0$ 时,

$|y|=e^{-ax}\left|\int_0^xf(t)e^{at}dt\right|\leqslant e^{-ax}\int_0^x|f(t)|e^{at}dt\leqslant ke^{-ax}\int_0^xe^{at}dt=\frac{k}{a}e^{-ax}(e^{ax}-1)$,

因为 $e^{-ax} \leqslant 1$，所以 $|y| \leqslant \dfrac{k}{a}(e^{ax}-1)$.

*11.*【解】当 $x<1$ 时，$y'-2y=2$ 的通解为 $y=C_1e^{2x}-1$，由 $y(0)=0$ 得 $C_1=1, y=e^{2x}-1$；当 $x>1$ 时，$y'-2y=0$ 的通解为 $y=C_2e^{2x}$，根据给定的条件，

$y(1+0)=C_2e^2=y(1-0)=e^2-1$，解得 $C_2=1-e^{-2}, y=(1-e^{-2})e^{2x}$，

补充定义 $y(1)=e^2-1$，则得到在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且满足微分方程的函数为

$$y(x)=\begin{cases}e^{2x}-1, & x\leqslant 1,\\ (1-e^{-2})e^{2x}, & x>1.\end{cases}$$

*12.*【解】令 $P(x,y)=xy(x+y)-f(x)y, Q(x,y)=f'(x)+x^2y$，

因为 $[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$ 为全微分方程，所以 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，

即 $f''(x)+f(x)=x^2$，解得 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$，

由 $f(0)=0, f'(0)=1$ 得 $C_1=2, C_2=1$，所以 $f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$.

原方程为 $[xy^2-(2\cos x+\sin x)y+2y]dx+(-2\sin x+\cos x+2x+x^2y)dy=0$，整理得

$(xy^2dx+x^2ydy)+2(ydx+xdy)-2(y\cos xdx+\sin xdy)+(-y\sin xdx+\cos xdy)=0$，

即 $d\left(\dfrac{1}{2}x^2y^2+2xy-2y\sin x+y\cos x\right)=0$，

原方程的通解为 $\dfrac{1}{2}x^2y^2+2xy-2y\sin x+y\cos x=C$.

*13.*【解】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=(1+t^2)\dfrac{dy}{dt}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}=\left[(1+t^2)\frac{dy}{dt}\right]'\cdot(1+t^2)=(1+t^2)^2\frac{d^2y}{dt^2}+2t(1+t^2)\frac{dy}{dt},$$

代入整理得 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+y=t$.

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+1=0$，特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，

则 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}+y=t$ 的通解为 $y=(C_1+C_2t)e^{-t}+t-2$，

故原方程通解为 $y=(C_1+C_2\tan x)e^{-\tan x}+\tan x-2$.

*14.*【解】$\displaystyle\int_0^x f(t-x)dt=-\int_0^x f(t-x)d(x-t)\overset{u=x-t}{=}-\int_x^0 f(-u)du=\int_0^x f(u)du$，

则有 $f'(x)+2f(x)-3\displaystyle\int_0^x f(u)du=-3x+2$，因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f'(x)$ 是奇函数，于是 $f'(0)=0$，代入上式得 $f(0)=1$.

将 $f'(x)+2f(x)-3\displaystyle\int_0^x f(u)du=-3x+2$ 两边对 $x$ 求导得

$f''(x)+2f'(x)-3f(x)=-3$，

其通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-3x}+1$，将初始条件代入 $f(x)$，得 $C_1=C_2=0$，所以 $f(x)=1$.

*15.*【解】将 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$ 代入原方程得

$(4+2a+b)e^{2x}+(3+2a+b)e^{x}+(1+a+b)xe^{x}=ce^{x}$,则有

$\begin{cases}4+2a+b=0,\\3+2a+b=c,\text{解得 } a=-3,b=2,c=-1,\\1+a+b=0,\end{cases}$

原方程为 $y''-3y'+2y=-e^{x}$.

原方程的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$,特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$,则 $y''-3y'+2y=0$ 的通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$,于是原方程的通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+e^{x}x$.

16.【解】由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$ 得 $f(1)=0,f'(1)=2$,令 $\sqrt{x^2+y^2}=r$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\cdot\frac{x}{r},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\cdot\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\cdot\frac{r-x\dfrac{x}{r}}{r^2}=f''(r)\cdot\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\cdot\frac{y^2}{r^3},$$

由对称性得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\cdot\dfrac{y^2}{r^2}+f'(r)\cdot\dfrac{x^2}{r^3}$,

由 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 得 $f''(r)+\dfrac{1}{r}f'(r)=0$ 或 $rf''(r)+f'(r)=0$,

解得 $rf'(r)=C_1$,由 $f'(1)=2$ 得 $C_1=2$,于是 $f'(r)=\dfrac{2}{r}$,

$f(r)=\ln r^2+C_2$,由 $f(1)=0$ 得 $C_2=0$,所以 $f(x)=\ln x^2$.

17.(1)【解】$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0$,两边求导数,得

$(x+1)f''(x)=-(x+2)f'(x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{Ce^{-x}}{x+1}$.

再由 $f(0)=1,f'(0)+f(0)=0$,得 $f'(0)=-1$,所以 $C=-1$,于是 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x+1}$.

(2)【证明】当 $x\geqslant0$ 时,因为 $f'(x)<0$ 且 $f(0)=1$,所以 $f(x)\leqslant f(0)=1$.

令 $g(x)=f(x)-e^{-x},g(0)=0,g'(x)=f'(x)+e^{-x}=\dfrac{x}{x+1}e^{-x}\geqslant0$,

由 $\begin{cases}g(0)=0\\g'(x)\geqslant0(x\geqslant0)\end{cases}\Rightarrow g(x)\geqslant0\Rightarrow f(x)\geqslant e^{-x}(x\geqslant0)$.

18.【解】(1) $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$, $\quad\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)\cdot\dfrac{dx}{dy}=-y''\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3$,

代入原方程得 $y''-y=\sin x$.

(2) 特征方程为 $r^2-1=0$,特征根为 $r_{1,2}=\pm1$,

因为 i 不是特征值,所以设特解为 $y^*=a\cos x+b\sin x$,代入方程得 $a=0,b=-\dfrac{1}{2}$,

故 $y^*=-\dfrac{1}{2}\sin x$,于是方程的通解为 $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-\dfrac{1}{2}\sin x$,

由初始条件得 $C_1=1,C_2=-1$,满足初始条件的特解为 $y=e^{x}-e^{-x}-\dfrac{1}{2}\sin x$.

19.【解】由 $\lim\limits_{h\to0}\left[\dfrac{f(0,y+h)}{f(0,y)}\right]^{\frac{1}{h}}=\lim\limits_{h\to0}\left\{\left[1+\dfrac{f(0,y+h)-f(0,y)}{f(0,y)}\right]^{\frac{f(0,y)}{f(0,y+h)-f(0,y)}}\right\}^{\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{f(0,y)h}}$,

$e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{f(0,y)h}}=e^{\frac{f'_y(0,y)}{f(0,y)}}=e^{\cot y}$，得$\dfrac{f'_y(0,y)}{f(0,y)}=\cot y$，解得 $f(0,y)=C\sin y$.

由 $f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，得 $C=1$，即 $f(0,y)=\sin y$.

又由$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，得 $\ln f(x,y)=-x+\ln\varphi(y)$，

即 $f(x,y)=\varphi(y)e^{-x}$，由 $f(0,y)=\sin y$，得 $\varphi(y)=\sin y$，所以 $f(x,y)=e^{-x}\sin y$.

**20.**【解】(1) 由题设知，$\pi\int_1^a f^2(x)dx=\dfrac{\pi}{3}[a^2f(a)-f(1)]$，两边对 $a$ 求导，得

$3f^2(a)=2af(a)+a^2f'(a)\Rightarrow f'(a)=\dfrac{3f^2(a)-2af(a)}{a^2}$，

令$\dfrac{f(a)}{a}=u\Rightarrow f'(a)=u+a\dfrac{du}{da}\Rightarrow a\dfrac{du}{da}=3u^2-3u\Rightarrow 1-\dfrac{1}{u}=ca^3$，即

$f(a)=\dfrac{a}{1-ca^3}$，由 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，得 $c=-1$，所以 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^3}$.

(2) 因为 $f'(x)=\dfrac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}$，$f''(x)=\dfrac{6x^2(x^3-2)}{(1+x^3)^3}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，

又因为 $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)<0$，所以 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$ 为极大值.

**21.**【解】(1) 由 $xf'(x)-2f(x)=-x\Rightarrow f'(x)-\dfrac{2}{x}f(x)=-1\Rightarrow f(x)=x+cx^2$.

设平面图形 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $V$，则

$V(c)=\pi\int_0^1(x+cx^2)^2dx=\pi\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{c}{2}+\dfrac{c^2}{5}\right)$， $V'(c)=\pi\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}c\right)=0\Rightarrow c=-\dfrac{5}{4}$，

因为$V''(c)=\dfrac{2\pi}{5}>0$，所以 $c=-\dfrac{5}{4}$ 为$V(c)$的最小值点，且曲线方程为 $f(x)=x-\dfrac{5}{4}x^2$.

(2)$f'(x)=1-\dfrac{5}{2}x$，$f'(0)=1$，曲线 $f(x)=x-\dfrac{5}{4}x^2$ 在原点处的切线方程为 $y=x$，

则 $A=\int_0^1\left[x-\left(x-\dfrac{5}{4}x^2\right)\right]dx=\dfrac{5}{12}$.

**22.**【解】根据题意得$\begin{cases}y(0)=2,y'(0)=0,\\ \dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)},\end{cases}$即$\begin{cases}y(0)=2,y'(0)=0,\\ \dfrac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{y}}.\end{cases}$

令 $y'=p$，则有$\begin{cases}\dfrac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{dy}{2\sqrt{2y}},\\ p(0)=0,\end{cases}$解得$\sqrt{1+p^2}=\sqrt{\dfrac{y}{2}}+C_1$，

因为 $p(0)=0$，所以 $C_1=0$，故 $y'=p=\pm\sqrt{\dfrac{y-2}{2}}$，

进一步解得 $2\sqrt{y-2}=\pm\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C_2$，

因为 $y(0)=2$，所以 $C_2=0$，故曲线方程为 $y=\dfrac{x^2}{8}+2$.

**23.**【解】因为曲线是上凸的,所以 $y''<0$,由题设得

$$-\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\Rightarrow\frac{y''}{1+y'^2}=-1.$$

令 $y'=p,y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,则有 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-(1+p^2)\Rightarrow\arctan p=C_1-x$.

因为曲线 $y=y(x)$ 在点(0,1)处的切线方程为 $y=x+1$,所以 $p\big|_{x=0}=1$,从而 $y'=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$,积分得 $y=\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+C_2$.

因为曲线过点(0,1),所以 $C_2=1+\frac{\ln 2}{2}$,

所求曲线为 $y=\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+1+\frac{\ln 2}{2},x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.

因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\leqslant 1$,所以当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时函数取得极大值 $1+\frac{\ln 2}{2}$.

**24.**【解】(1) 设 $t$ 时刻导弹的位置为 $M(x,y)$,根据题意得

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-vt}{x-0}$,即 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-vt$,两边对 $x$ 求导数得 $x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$.

又 $2v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$,则 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2v}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$,

所以导弹运行轨迹满足的微分方程及初始条件为 $\begin{cases}x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2},\\ y(x_0)=0,y'(x_0)=0,\end{cases}$

(2) 令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$,则 $\begin{cases}x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\sqrt{1+p^2},\\ p(x_0)=0,\end{cases}$ 解得 $\ln(p+\sqrt{1+p^2})+\ln\sqrt{\frac{x_0}{x}}=0$,

进一步解得 $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{x_0}}-\sqrt{\frac{x_0}{x}}\right),\\ y(x_0)=0,\end{cases}$ 故轨迹方程为 $y=\frac{2}{3}x_0+\frac{x}{3}\sqrt{\frac{x}{x_0}}-\sqrt{xx_0}$.

**25.**【解】设 $t$ 时刻细菌总数为 $S$,则有 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=kS,S(0)=100,S(24)=400$,

$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=kS\Rightarrow S=C\mathrm{e}^{kt},C=100,k=\frac{1}{24}\times\ln 4=\frac{\ln 2}{12}$,

所以 $S=100\mathrm{e}^{\frac{\ln 2}{12}t},S(12)=100\mathrm{e}^{\ln 2}=200$.

**26.**【解】设从 2000 年初开始,第 $t$ 年湖中污染物 $A$ 的总量为 $m$,则浓度为 $\frac{m}{V}$,

任取时间元素 $[t,t+\mathrm{d}t]$,排入湖中污染物 $A$ 的含量为 $\frac{m_0}{V}\times\frac{V}{6}\times\mathrm{d}t=\frac{m_0}{6}\mathrm{d}t$,流出湖的污染物 $A$ 的含量为 $\frac{m}{V}\times\frac{V}{3}\times\mathrm{d}t=\frac{m}{3}\mathrm{d}t$,则在此时间元素内污染物 $A$ 的改变量为

$\mathrm{d}m=\left(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}\right)\mathrm{d}t$. 解得 $m=\frac{m_0}{2}-C\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}$,又由 $m(0)=5m_0$,得 $C=-\frac{9m_0}{2}$,于是

$m=\frac{m_0}{2}(1+9e^{-\frac{t}{3}})$，令 $m=m_0$，得 $t=6\ln 3$，即至多经过 7 年，湖中污染物 $A$ 的含量不超过 $m_0$.

**27.【解】** 设在任意时刻 $t>0$，第一只桶和第二只桶内含盐分别为 $m_1(t)$，$m_2(t)$，在时间 $[t,t+dt]$ 内有 $dm_1=-\frac{m_1}{10}\times 2\times dt$，即 $\frac{dm_1}{dt}+\frac{m_1}{5}=0$，且满足初始条件 $m_1(0)=150$，

解得 $m_1(t)=150e^{-\frac{t}{5}}$；在时间 $[t,t+dt]$ 内有

$dm_2=\frac{m_1}{5}dt-\frac{m_2}{10+t}\times 1\times dt$，即 $\frac{dm_2}{dt}+\frac{m_2}{10+t}=30e^{-\frac{t}{5}}$，且满足初始条件 $m_2(0)=150$.

**28.【解】** 输入率为 2 500 卡 / 天，输出率为 $(1\ 200+16w)$，其中 $w$ 为体重，

根据题意得 $\frac{dw}{dt}=\frac{1\ 300-16w}{10\ 000}$，$w(0)=w_0$，

由 $\frac{dw}{dt}=\frac{1\ 300-16w}{10\ 000}$，得 $w(t)=Ce^{-\frac{t}{625}}+\frac{325}{4}$，代入初始条件得 $C=w_0-\frac{325}{4}$，

于是 $w(t)=\frac{325}{4}+\left(w_0-\frac{325}{4}\right)e^{-\frac{t}{625}}$.

**29.【解】** 设链条的线密度为 $\rho$，取 $x$ 轴正向为垂直向下，设 $t$ 时刻链条下垂 $x(t)$ m，则下垂那段的长度为 $(10+x)$ m，另一段长度为 $(8-x)$ m，此时链条受到的重力为

$(10+x)\rho g-(8-x)\rho g=2(x+1)\rho g$.

链条的总重量为 $18\rho$，由牛顿第二定律 $F=ma$ 得

$18\rho\frac{d^2x}{dt^2}=2\rho g(x+1)$，即 $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{g}{9}x=\frac{g}{9}$，且 $x(0)=0$，$x'(0)=0$，

解得 $x(t)=\frac{1}{2}(e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}+e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}-2)$，当链条滑过整个钉子时，$x=8$，

由 $\frac{1}{2}(e^{\frac{\sqrt{g}}{3}t}+e^{-\frac{\sqrt{g}}{3}t}-2)=8$ 得 $t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{80})$.

**30.【解】** 由题意得 $F=k\frac{t}{v}$，因为当 $t=10$ 时，$v=50$，$F=39.2$，所以 $k=196$，

从而 $F=196\frac{t}{v}$，又因为 $F=m\frac{dv}{dt}$，所以 $\frac{dv}{dt}=196\frac{t}{v}$，分离变量得 $vdv=196tdt$，

所以 $\frac{1}{2}v^2=98t^2+C$，由 $v\big|_{t=10}=50$，得 $C=-8\ 550$，

于是 $v=\sqrt{196t^2-17\ 100}$，$v\big|_{t=60}=\sqrt{196\times 3\ 600-17\ 100}=\sqrt{688\ 500}$ cm/s.

**31.【解】** 根据题意得 $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\sqrt{1+f'^2(t)}\,dt$，

所以 $\begin{cases}f(x)=\sqrt{1+f'^2(x)},\\ f(0)=1,\end{cases}$ 分离变量得 $\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$，积分得

$\ln\left[C(y+\sqrt{y^2-1})\right]=\pm x$，或者 $C(y+\sqrt{y^2-1})=e^{\pm x}$，

由 $y(0)=1$，得 $C=1$，所以 $y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm x}$，解得 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x$.

32.【解】因为 $x\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，所以 $f'(x)+3\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+2x\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}=0$ 可化为 $f'(x)+3\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}=0$，

两边对 $x$ 求导得 $f''(x)+3f'(x)+2f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，

由 $\lambda^2+3\lambda+2=0$ 得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$，

则方程 $f''(x)+3f'(x)+2f(x)=0$ 的通解为 $C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$.

令 $f''(x)+3f'(x)+2f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 的一个特解为 $y_0=ax\mathrm{e}^{-x}$，代入得 $a=1$，

则原方程的通解为 $f(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^{-x}$.

由 $f(0)=1,f'(0)=-1$ 得 $C_1=0,C_2=1$，故原方程的解为 $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^{-x}$.

33.【解】设单位面积在单位时间内降雪量为 $a$，路宽为 $b$，扫雪速度为 $c$，路面上雪层厚度为 $H(t)$，扫雪车前进路程为 $S(t)$，降雪开始时间为 $T$，则

$$H(t)=a(t-T)\text{，又 } b\times H(t)\times \Delta S=c\times \Delta t,$$

于是 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{c}{ab}\times\frac{1}{t-T}$，令 $\frac{c}{ab}=k$，则 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{t-T}$，且 $S(12)=0,S(14)=2,S(16)=3$，

由 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{t-T}\Rightarrow S=k\ln(t-T)+C$，$\frac{14-T}{12-T}=\left(\frac{16-T}{14-T}\right)^2\Rightarrow T^2-26T+164=0$，

$$T=13-\sqrt{5}.$$

34.【解】设 $t$ 时刻 $B$ 点的位置为 $M(x,y)$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-v_0t}{x}$，即

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-v_0t, \qquad (*)$$

$$v_1=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1+y'^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad (**)$$

$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-v_0t$ 两边对 $x$ 求导，得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-v_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{v_0}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，代入$(**)$，

得 $-\frac{v_1}{v_0}x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\sqrt{1+y'^2}$，令 $k=\frac{v_0}{v_1}$，则 $\begin{cases}x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k\sqrt{1+y'^2}=0,\\ y(x_0)=0,y'(x_0)=0,\end{cases}$

令 $y'=p$，由 $x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+k\sqrt{1+p^2}=0$，得 $\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=-\frac{k}{x}\mathrm{d}x$，

两边积分，得 $p+\sqrt{1+p^2}=\frac{C_0}{x^k}$，由 $y'(x_0)=0$，得 $C_0=x_0^k$，

从而 $p=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^k-\left(\frac{x}{x_0}\right)^k\right]$.

当 $k\neq 1$ 时，$y=-\frac{x_0}{2}\left[\frac{1}{k-1}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{k-1}+\frac{1}{k+1}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{k+1}\right]+C_1$，

由 $y(x_0)=0$，得 $C_1=\frac{kx_0}{k^2-1}$，则 $B$ 的轨迹方程为

$$y=-\frac{x_0}{2}\left[\frac{1}{k-1}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{k-1}+\frac{1}{k+1}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{k+1}-\frac{2k}{k^2-1}\right],$$

当 $k=1$ 时,$B$ 的轨迹方程为 $y=-\frac{x_0}{2}\left[\ln\frac{x_0}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2-\frac{1}{2}\right]$.

**35.【解】**水平方向的空气阻力 $R_x=k_xv^2$,垂直方向的空气阻力 $R_y=k_yv^2$,摩擦力为 $W=\mu(mg-R_y)$,由牛顿第二定律,有

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{k_x-\mu k_y}{m}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\mu g=0,$$

记 $A=\frac{k_x-\mu k_y}{m}$,$B=\mu g$,显然 $A>0$,故有

$$\frac{d^2s}{dt^2}+A\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+B=0 \text{ 或 } \frac{dv}{dt}+Av^2+B=0,$$

分离变量得 $\frac{dv}{Av^2+B}=-dt$,两边积分得

$$\frac{1}{\sqrt{AB}}\arctan\left(\sqrt{\frac{A}{B}}v\right)=-t+C,$$

又当 $t=0$ 时,$C=\frac{1}{\sqrt{AB}}\arctan\left(\sqrt{\frac{A}{B}}v_0\right)$,

所以当 $v=0$ 时,$t=\frac{1}{\sqrt{AB}}\arctan\left(\sqrt{\frac{A}{B}}v_0\right)=\sqrt{\frac{m}{(k_x-\mu k_y)\mu g}}\arctan\sqrt{\frac{k_x-\mu k_y}{m\mu g}}v_0$(秒).

# 线性代数部分

## 一、行列式

### ◇ 填空题

**1.【解】**$A_{31}+A_{32}+A_{33}=A_{31}+A_{32}+A_{33}+0A_{34}+0A_{35}$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\7&7&7&3&3\\1&1&1&0&0\\3&3&3&2&2\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\0&0&0&3&3\\1&1&1&0&0\\0&0&0&2&2\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}=0.$$

**2.【解】**因为 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}|=0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为$\frac{1}{3},\frac{1}{2},1$，又 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，

所以 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为$\frac{1}{3},\frac{1}{2},1$，从而 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 的特征值为 1,2,3，则 $\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 3,4,5，故 $|\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}|=60$.

**3.【解】**$|\boldsymbol{A}|<0\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=-1$.

$$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}|=-|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=-4.$$

**4.【解】**因为 $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$，且 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，所以

$$|(k\boldsymbol{A})^*|=|k^{n-1}\boldsymbol{A}^*|=k^{n(n-1)}|\boldsymbol{A}|^{n-1}=k^{n(n-1)}a^{n-1}.$$

### ◇ 选择题

**5.【解】**(A)、(C) 显然不对，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$，显然 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是非零矩阵，但 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，所以 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=0$，(B) 不对，选(D).

**6.【解】**$|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2|$

$=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2|$

$=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n-m$，

选(D).

### ◇ 解答题

**7.【证明】**因为 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，两边取行列式得 $|\boldsymbol{A}|^2=1$，因为 $|\boldsymbol{A}|<0$，所以

$|A|=-1$.

由 $|E+A|=|A^TA+A|=|(A^T+E)A|=|A||A^T+E|=-|A^T+E|$

$$=-|(A+E)|^T=-|E+A|,$$

得 $|E+A|=0$.

**8.【证明】** 因为 $A$ 是非零矩阵，所以 $A$ 至少有一行不为零，设 $A$ 的第 $k$ 行是非零行，则

$$|A|=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}=a_{k1}^2+a_{k2}^2+\cdots+a_{kn}^2>0.$$

**9.【解】** 方法一

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+b & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a+b & b & & \\ & & a+b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ a+b & & & & & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b)^n\begin{vmatrix} 1 & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & b & & \\ & & 1 & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & & & & a \end{vmatrix}=(a+b)^n\begin{vmatrix} 1 & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & b & & \\ & & 0 & a-b & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & & & & & a-b \end{vmatrix}=(a^2-b^2)^n.$$

方法二 $D_{2n}=a^2D_{2n-2}-b^2D_{2n-2}=(a^2-b^2)D_{2n-2}=\cdots=(a^2-b^2)^n$.

**10.【解】** $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_{n-1}$$

$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_n(a_1a_2\cdots a_{n-2}+a_{n-1}D_{n-2})$$

$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-2}a_n+a_na_{n-1}D_{n-2}$$

$$=\cdots=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_n}+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_2}+a_na_{n-1}\cdots a_2(1+a_1)$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

**11.【解】** 令 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$，$C=(n)$，

$|A|=(-1)^{n+1}n!$,

则 $A=\begin{pmatrix}O & B\\ C & O\end{pmatrix}$,由 $A^{-1}=\begin{pmatrix}O & C^{-1}\\ B^{-1} & O\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n}\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0\end{bmatrix}$,

得 $A^*=|A|A^{-1}=(-1)^{n+1}n!\ A^{-1}$,所以 $A_{k1}+A_{k2}+\cdots+A_{kn}=\frac{(-1)^{n+1}n!}{k}$.

*12*.【解】因为 $A\sim B$,所以 $A,B$ 特征值相同,设另一特征值为 $\lambda_3$,由 $|B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=2$ 得 $\lambda_3=1$. $A+E$ 的特征值为 2,3,2,$(A+E)^{-1}$ 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$,则 $|(A+E)^{-1}|=\frac{1}{12}$. 因为 $B$ 的特征值为 1,2,1,所以 $B^*$ 的特征值为 $\frac{|B|}{1},\frac{|B|}{2},\frac{|B|}{1}$,即为 2,1,2,于是 $|B^*|=4$, $|(2B)^*|=|4B^*|=4^3|B^*|=256$,故

$$\begin{vmatrix}(A+E)^{-1} & O\\ O & (2B)^*\end{vmatrix}=|(A+E)^{-1}|\cdot|(2B)^*|=\frac{1}{12}\times 256=\frac{64}{3}.$$

# 二、矩阵

## ◇ 填空题

*1*.【解】$|A|=-3$,$A^*=|A|A^{-1}=-3A^{-1}$,则 $(A^*)^{-1}B=ABA+2A^2$ 化为 $-\frac{1}{3}AB=ABA+2A^2$,注意到 $A$ 可逆,得 $-\frac{1}{3}B=BA+2A$ 或 $-B=3BA+6A$,则 $B=-6A(E+3A)^{-1}$,

$$E+3A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ 6 & 10 & 0\\ 3 & 6 & 10\end{pmatrix},(E+3A)^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}50 & -30 & 0\\ -30 & 20 & 0\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix},$$

则 $B=-6A(E+3A)^{-1}=-\frac{3}{10}\begin{pmatrix}-10 & 10 & 0\\ 10 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 6\end{pmatrix}$.

2.【解】$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=E_{13}$,$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E_{12}$,因为 $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$,所以 $E_{ij}^2=E$,

于是 $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{21}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{20}=E_{13}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & c_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}$.

3.【解】因为 $r(B^*)=1$,所以 $r(B)=2$,又因为 $AB=O$,所以 $r(A)+r(B)\leqslant 3$,从而 $r(A)\leqslant 1$,又 $r(A)\geqslant 1$,$r(A)=1$,于是 $t=6$.

4.【解】$BA=O\Rightarrow r(A)+r(B)\leqslant 3$,因为 $r(A)\geqslant 2$,所以 $r(B)\leqslant 1$,又因为 $B\neq O$,所以 $r(B)=1$.

## ◇ 选择题

5.【解】$AB$ 为 $m$ 阶矩阵,因为 $r(A)\leqslant\min\{m,n\}$,$r(B)\leqslant\min\{m,n\}$,且 $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$,所以 $r(AB)\leqslant\min\{m,n\}$,故当 $m>n$ 时,$r(AB)\leqslant n<m$,于是 $|AB|=0$,选(B).

6.【解】$A(A+B)^{-1}B(A^{-1}+B^{-1})=[(A+B)A^{-1}]^{-1}(BA^{-1}+E)=(BA^{-1}+E)^{-1}(BA^{-1}+E)=E$,所以选(C).

7.【解】因为 $(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|A||B|B^{-1}A^{-1}=|B|B^{-1}\cdot|A|A^{-1}=B^*A^*$,所以选(B).

8.【解】因为 $(kA)^*$ 的每个元素都是 $kA$ 的代数余子式,而余子式为 $n-1$ 阶子式,所以 $(kA)^*=k^{n-1}A^*$,选(C).

9.【解】因为 $A^2=A$,所以 $A(E-A)=O$,由矩阵秩的性质得 $r(A)+r(E-A)=n$,若 $A$ 可逆,则 $r(A)=n$,所以 $r(E-A)=0$,$A=E$,选(D).

10.【解】显然由 $r(A)=m<n$,得 $r(A)=r(\overline{A})=m<n$,所以方程组 $AX=b$ 有无穷多个解.选(C).

11.【解】$P_1^mAP_2^n=\begin{pmatrix}a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{pmatrix}$ 经过了 $A$ 的第1,2两行对调与第1,3两列对调,$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E_{12}$,$P_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=E_{13}$,且 $E_{ij}^2=E$,$P_1^mAP_2^n=P_1AP_2$,则 $m=3$,$n=5$,即选(B).

12.【解】$B=AE_{14}E_{23}$ 或 $B=AE_{23}E_{14}$ 即 $B=AP_1P_2$ 或 $B=AP_2P_1$,所以 $B^{-1}=P_2^{-1}P_1^{-1}A^{-1}$ 或 $B^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1}$,注意到 $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$,于是 $B^{-1}=P_2P_1A^{-1}$ 或 $B^{-1}=P_1P_2A^{-1}$,选(C).

13.【解】因为 $Q\neq O$,所以 $r(Q)\geqslant 1$,又由 $PQ=O$ 得 $r(P)+r(Q)\leqslant 3$,当 $t\neq 6$ 时,$r(P)\geqslant 2$,则 $r(Q)\leqslant 1$,于是 $r(Q)=1$,选(C).

## ◇ 解答题

14.【证明】(1) 令 $\alpha^T\alpha=k$,则 $A^2=(E-\alpha\alpha^T)(E-\alpha\alpha^T)=E-2\alpha\alpha^T+k\alpha\alpha^T$,因为 $\alpha$ 为非零向量,所以 $\alpha\alpha^T\neq O$,于是 $A^2=A$ 的充分必要条件是 $k=1$,而 $\alpha^T\alpha=\|\alpha\|^2$,所以 $A^2=A$ 的充要条件是 $\alpha$ 为单位向量.

(2) 当 $\alpha$ 是单位向量时,由 $A^2=A$ 得 $r(A)+r(E-A)=n$,因为 $E-A=\alpha\alpha^T\neq O$,所以 $r(E-A)\geqslant 1$,于是 $r(A)\leqslant n-1<n$,故 $A$ 是不可逆矩阵.

15. (1)【解】$PQ=\begin{pmatrix}E&O\\-\alpha^TA^*&|A|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&\alpha\\O&b|A|-\alpha^TA^*\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&\alpha\\O&|A|(b-\alpha^TA^{-1}\alpha)\end{pmatrix}$.

(2)【证明】$|PQ|=|A|^2(b-\alpha^TA^{-1}\alpha)$,$PQ$ 可逆的充分必要条件是 $|PQ|\neq 0$,即 $\alpha^TA^{-1}\alpha\neq b$.

16.【解】由$(2E-C^{-1}B)A^T=C^{-1}$,得$A^T=(2E-C^{-1}B)^{-1}C^{-1}=[C(2E-C^{-1}B)]^{-1}=(2C-B)^{-1}$,

$$2C-B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\text{由}\begin{pmatrix}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&2&3&0&1&0&0\\0&0&1&2&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&-2&1&0\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&0&0&1&-2\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\text{得}$$

$$A^T=(2C-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix},\text{所以}A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$$

17.【证明】$r(A)=r(\alpha\beta^T+\beta\alpha^T)\leqslant r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)$,而$r(\alpha\beta^T)\leqslant r(\alpha)=1$,$r(\beta\alpha^T)\leqslant r(\beta)=1$,所以$r(A)\leqslant r(\alpha\beta^T)+r(\beta\alpha^T)\leqslant 2$.

18.【证明】$A^2=(E-\alpha\alpha^T)(E-\alpha\alpha^T)=E-2\alpha\alpha^T+\alpha\alpha^T\cdot\alpha\alpha^T$,因为$\alpha$为单位列向量,所以$\alpha^T\alpha=1$,于是$A^2=A$.由$A(E-A)=O$得$r(A)+r(E-A)\leqslant n$,又由$r(A)+r(E-A)\geqslant r[A+(E-A)]=r(E)=n$,得$r(A)+r(E-A)=n$.因为$E-A=\alpha\alpha^T\neq O$,所以$r(E-A)=r(\alpha\alpha^T)=r(\alpha)=1$,故$r(A)=n-1<n$.

19.【证明】$AA^*=A^*A=|A|E$.

当$r(A)=n$时,$|A|\neq0$,因为$|A^*|=|A|^{n-1}$,所以$|A^*|\neq0$,从而$r(A^*)=n$;

当$r(A)=n-1$时,由于$A$至少有一个$n-1$阶子式不为零,所以存在一个$M_{ij}\neq0$,进而$A_{ij}\neq0$,于是$A^*\neq O$,故$r(A^*)\geqslant1$,又因为$|A|=0$,所以$AA^*=|A|E=O$,根据矩阵秩的性质有$r(A)+r(A^*)\leqslant n$,而$r(A)=n-1$,于是得$r(A^*)\leqslant1$,故$r(A^*)=1$;

当$r(A)<n-1$时,由于$A$的所有$n-1$阶子式都为零,所以$A^*=O$,故$r(A^*)=0$.

20.【证明】设$r(A)=1$,则$A$为非零矩阵且$A$的每行元素都成比例,

令$A=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$,于是$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_n)$,令$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$,$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$,故$A=\alpha\beta^T$,显然$\alpha,\beta$为非零向量.设$A=\alpha\beta^T$,其中$\alpha,\beta$为非零向量,则$A$为非零矩阵,于是$r(A)\geqslant1$,又$r(A)=r(\alpha\beta^T)\leqslant r(\alpha)=1$,故$r(A)=1$.

21.【证明】因为$r(A)=n-1$,所以$r(A^*)=1$,于是$A^*=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1\quad\cdots\quad b_n)$,

其中$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$,$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$为非零向量,故

$$(A^*)^2=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1\ \cdots\ b_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1\ \cdots\ b_n)=kA^*,\text{其中 } k=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

22.【证明】$(A^*)^*A^*=|A^*|E=|A|^{n-1}E$，当 $r(A)=n$ 时，$r(A^*)=n$，$A^*=|A|A^{-1}$，则 $(A^*)^*A^*=(A^*)^*|A|A^{-1}=|A|^{n-1}E$，故 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$. 当 $r(A)=n-1$ 时，$|A|=0$，$r(A^*)=1$，$r[(A^*)^*]=0$，即 $(A^*)^*=O$，原式显然成立. 当 $r(A)<n-1$ 时，$|A|=0$，$r(A^*)=0$，$(A^*)^*=O$，原式也成立.

23.【证明】令 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，因为 $AB=O$，所以 $B$ 的列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 为方程组 $AX=0$ 的一组解，而方程组 $AX=0$ 的基础解系所含的线性无关的解向量的个数为 $n-r(A)$，所以向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩不超过 $n-r(A)$，又因为矩阵的秩与其列向量组的秩相等，因此 $r(B)\leqslant n-r(A)$，即 $r(A)+r(B)\leqslant n$.

# 三、向量

## ◇ 填空题

1.【解】$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&3\\2&1&3&3\\2&5&-1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&-2&2\\0&1&-1&1\\0&4&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2$，且 $\begin{cases}\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2,\\ \alpha_4=\alpha_1+\alpha_2.\end{cases}$

## ◇ 选择题

2.【解】若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，因为 $\alpha_4$ 不可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，与已知矛盾，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，选(B).

3.【解】因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，所以 $\alpha_4$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表示，又 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 经过有限次初等行变换化为 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$，所以方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4$ 与 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\beta_4$ 是同解方程组，因为方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4$ 有唯一解，所以方程组 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\beta_4$ 有唯一解，即 $\beta_4$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 唯一线性表示，选(C).

4.【解】因为对任意不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$，所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，即方程组 $AX=0$ 只有零解，故若 $AB=O$，则 $B=O$，选(D).

5.【解】$(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)=A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，所以矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 可逆，于是 $r(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)=r(A)$，而 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 线性无关，所以 $r(A)=n$，即 $A$ 一定可逆，选(D).

6.【解】向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意两个向量不成比例，反之不对，故(A)不对；若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是两两正交的非零向量组，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 一定线性无

关,但$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关不一定两两正交,(B)不对;$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中向量个数小于向量的维数不一定线性无关,(D)不对,选(C).

7.【解】若$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$可逆,则$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=n$,因为$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$,所以$r(\boldsymbol{A})=n$;反之,若$r(\boldsymbol{A})=n$,因为$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$,所以$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$可逆,选(D).

8.【解】设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$分别为$m\times n$及$n\times s$矩阵,因为$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,所以$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$,因为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为非零矩阵,所以$r(\boldsymbol{A})\geqslant 1,r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$,从而$r(\boldsymbol{A})<n,r(\boldsymbol{B})<n$,故$\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关,选(A).

9.【解】不妨设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的极大线性无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$,向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$的极大线性无关组为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$,若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性表示,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$线性表示,若$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示,则$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$也不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示,所以两向量组的秩不等,矛盾,选(C).

## ◆ 解答题

10.【证明】因为向量组(Ⅰ)的秩为3,所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,又因为向量组(Ⅱ)的秩也为3,所以向量$\boldsymbol{\alpha}_4$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

因为向量组(Ⅲ)的秩为4,所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$线性无关,即向量$\boldsymbol{\alpha}_5$不可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,故向量$\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$不可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,于是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$的秩为4.

11.【证明】令$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$为$n$个$n$维线性无关的向量,所以$r(\boldsymbol{B})=n$.$(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_n)=\boldsymbol{AB}$,因为$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$,所以$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_n$线性无关的充分必要条件是$r(\boldsymbol{A})=n$,即$\boldsymbol{A}$可逆.

12.【证明】令$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}$,$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关的充分必要条件是$r(\boldsymbol{A})=n$,即$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=n$或$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|\neq 0$,从而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关的充分必要条件是$\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{vmatrix}\neq 0$.

13.【证明】方法一　由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$线性无关$\Rightarrow\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$线性无关,

令$k\boldsymbol{\beta}+k_1(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_t(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t)=\boldsymbol{0}$,

即$(k+k_1+\cdots+k_t)\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\boldsymbol{0}$,

$\because\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$线性无关,　$\therefore\begin{cases}k+k_1+\cdots+k_t=0,\\ k_1=\cdots=k_t=0,\end{cases}\Rightarrow k=k_1=\cdots=k_t=0$,

$\therefore\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$线性无关

方法二　令$k\boldsymbol{\beta}+k_1(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_t(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t)=\boldsymbol{0}\Rightarrow(k+k_1+\cdots+k_t)\boldsymbol{\beta}=-k_1\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-k_t\boldsymbol{\alpha}_t\Rightarrow(k+k_1+\cdots+k_t)\boldsymbol{A\beta}=-k_1\boldsymbol{A\alpha}_1-\cdots-k_t\boldsymbol{A\alpha}_t=\boldsymbol{0}$,

$\because A\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，$\therefore k+k_1+\cdots+k_t=0$，$\therefore k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_t\boldsymbol{\alpha}_t=\mathbf{0}\Rightarrow k=k_1=\cdots=k_t=0\Rightarrow\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

*14*.【证明】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，对任意的 $n$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}$ 一定线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一线性表示，即任一 $n$ 维向量总可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

反之，设任一 $n$ 维向量总可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，

取 $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩不小于 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的秩，而 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩一定为 $n$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

*15*.【证明】令

$$l_0\boldsymbol{\alpha}+l_1A\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_{k-1}A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},\tag{*}$$

(*) 两边同时左乘 $A^{k-1}$ 得 $l_0A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，因为 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，所以 $l_0=0$；

(*) 两边同时左乘 $A^{k-2}$ 得 $l_1A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，因为 $A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，所以 $l_1=0$，

依次类推可得 $l_2=\cdots=l_{k-1}=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha},A\boldsymbol{\alpha},\cdots,A^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

*16*.(1)【证明】因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关，所以存在不全为零的常数 $k_1,k_2,l_1,l_2$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}\text{，或 }k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2.$$

令 $\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都线性无关，所以 $k_1,k_2$ 及 $l_1,l_2$ 都不全为零，所以 $\boldsymbol{\gamma}\neq\mathbf{0}$.

(2)【解】令 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$，

$$A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&0&-1&-1\\0&1&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&-1&-3&-2\\0&1&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&3&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\text{，则}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\l_1\\l_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{\gamma}=k\boldsymbol{\alpha}_1-3k\boldsymbol{\alpha}_2=-k\boldsymbol{\beta}_1+0\boldsymbol{\beta}_2$.

# 四、线性方程组

## ◇ 填空题

*1*.【解】$A\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&a-2&0\\0&0&b-1\end{pmatrix}$，因为 $AB=O$，所以 $r(A)+r(B)\leqslant 3$，又 $B\neq O$，于是 $r(B)\geqslant 1$，

故 $r(A) \leqslant 2$，从而 $a=2, b=1$.

2.【解】$AX=0$ 有非零解，所以 $|A|=0$，解得 $a=3$，于是 $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\2&4&1\\3&11&-1\end{pmatrix}$，

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\2&4&1\\3&11&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-3&3\\0&10&-5\\0&20&-10\end{pmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&3\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{3}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix},$$

方程组 $AX=0$ 的通解为 $k(-3,1,2)^{T}$.

## ◇ 选择题

3.【解】设 $r(A)=s$，显然方程组 $BX=0$ 的解一定为方程组 $ABX=0$ 的解，
反之，若 $ABX=0$，因为 $r(A)=s$，所以方程组 $AY=0$ 只有零解，故 $BX=0$，
即方程组 $BX=0$ 与方程组 $ABX=0$ 同解，选(A).

4.【解】因为非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解不唯一，所以 $r(A)<n$，又因为 $A^{*}\neq O$，所以 $r(A)=n-1$，$\eta_2-\eta_1$ 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，选(C).

5.【解】若方程组 $AX=0$ 的解都是方程组 $BX=0$ 的解，则 $n-r(A)\leqslant n-r(B)$，从而 $r(A)\geqslant r(B)$，(1) 为正确的命题；显然(2) 不正确；因为同解方程组系数矩阵的秩相等，但反之不对，所以(3) 是正确的，(4) 是错误的，选(B).

6.【解】$AB$ 为 $m$ 阶方阵，当 $m>n$ 时，因为 $r(A)\leqslant n$，$r(B)\leqslant n$ 且 $r(AB)\leqslant \min\{r(A), r(B)\}$，所以 $r(AB)<m$，于是方程组 $ABX=0$ 有非零解，选(A).

7.【解】方程组 $AX=b$ 有解的充分必要条件是 $b$ 可由矩阵 $A$ 的列向量组线性表示，在方程组 $AX=b$ 有解的情形下，其有唯一解的充分必要条件是 $r(A)=n$，故选(D).

## ◇ 解答题

8.【证明】令 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^{T}\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}^{T}\end{pmatrix}$，因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 与 $\beta_1,\beta_2$ 正交，所以 $A\beta_1=0, A\beta_2=0$，即 $\beta_1,\beta_2$ 为方程组 $AX=0$ 的两个非零解，因为 $r(A)=n-1$，所以方程组 $AX=0$ 的基础解系含有一个线性无关的解向量，所以 $\beta_1,\beta_2$ 线性相关.

9.【解】$D=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$.

(1) 当 $a\neq b, a\neq(1-n)b$ 时，方程组只有零解；

(2) 当 $a=b$ 时，方程组的同解方程组为 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，其通解为

$X=k_1(-1,1,0,\cdots,0)^{T}+k_2(-1,0,1,\cdots,0)^{T}+\cdots+k_{n-1}(-1,0,\cdots,0,1)^{T}$

($k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数)；

(3) 令 $A=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$，当 $a=(1-n)b$ 时，$r(A)=n-1$，显然 $(1,1,\cdots,1)^T$ 为方程组的一个解，故方程组的通解为 $k(1,1,\cdots,1)^T$（$k$ 为任意常数）.

**10.【解】** 由 $AB=O$ 得 $r(A)+r(B)\leqslant 3$ 且 $r(A)\geqslant 1$.

(1) 当 $k\neq 9$ 时，因为 $r(B)=2$，所以 $r(A)=1$，方程组 $AX=0$ 的基础解系含有两个线性无关的解向量，显然基础解系可取 $B$ 的第 1、3 两列，故通解为 $k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数）；

(2) 当 $k=9$ 时，$r(B)=1$，$1\leqslant r(A)\leqslant 2$，

当 $r(A)=2$ 时，方程组 $AX=0$ 的通解为 $C\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$（$C$ 为任意常数）；

当 $r(A)=1$ 时，$A$ 的任意两行都成比例，不妨设 $a\neq 0$，

由 $A\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得通解为 $k_1\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$（$k_1,k_2$ 为任意常数）.

**11.【解】** $\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$，

(1) $a\neq 1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=4$，唯一解为 $x_1=\dfrac{b-a+2}{a-1}$，$x_2=\dfrac{a-2b-3}{a-1}$，$x_3=\dfrac{b+1}{a-1}$，$x_4=0$；

(2) $a=1$，$b\neq -1$ 时，$r(A)\neq r(\overline{A})$，此时方程组无解；

(3) $a=1$，$b=-1$ 时，通解为 $X=k_1(1,-2,1,0)^T+k_2(1,-2,0,1)^T+(-1,1,0,0)^T$（$k_1,k_2$ 为任意常数）.

**12.【证明】** 方程组 $\begin{cases}AX=0,\\BX=0,\end{cases}$ 或 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 的解即为方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 的公共解.

因为 $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leqslant r(A)+r(B)<n$，所以方程组 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 有非零解，故方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 有公共的非零解.

**13.【解】**(1) 方程组（Ⅰ）的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$；

(2) 因为 $r(B)=2$，所以方程组（Ⅱ）的基础解系含有两个线性无关的解向量，

$\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ 为方程组(Ⅱ)的基础解系;

(3) 方程组(Ⅰ)的通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-k_2\\k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}$,方程组(Ⅱ)的通解为 $\begin{pmatrix}-l_1\\2l_1-l_2\\2l_1-l_2\\l_1\end{pmatrix}$,

令 $\begin{pmatrix}-k_2\\k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-l_1\\2l_1-l_2\\2l_1-l_2\\l_1\end{pmatrix}$,则有 $\begin{cases}l_1=k_2\\l_2=2k_2-k_2=k_2\\k_1=k_2\end{cases}$,取 $k_2=k$,则方程组(Ⅰ)与方程组(Ⅱ)的公共解为 $k(-1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$(其中 $k$ 为任意常数).

***14.*【解】**

(1) $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow$(Ⅰ)的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$(Ⅱ)的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(2) **方法一**

(Ⅰ),(Ⅱ)公共解即为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解,

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得(Ⅰ),(Ⅱ)的公共解为 $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$($k$ 为任意常数).

**方法二**

(Ⅰ)的通解 $k_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_2\\k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}$ 代入(Ⅱ),得 $\begin{cases}-k_2-k_2+k_1=0,\\k_2-k_1+k_2=0,\end{cases}\Rightarrow k_1=2k_2$,

故(Ⅰ),(Ⅱ)的公共解为 $(-k,k,2k,k)^{\mathrm{T}}=k(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$($k$ 为任意常数).

**方法三**

（Ⅰ）的通解为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-k_2\\k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}$，（Ⅱ）的通解为 $l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-l_2\\l_1-l_2\\l_1\\l_2\end{pmatrix}$，

令 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=l_1\boldsymbol{\eta}_1+l_2\boldsymbol{\eta}_2\Rightarrow\begin{cases}k_1=l_1=2k_2,\\l_2=k_2,\end{cases}$

$\therefore$（Ⅰ），（Ⅱ）的公共解为 $\begin{pmatrix}-k\\k\\2k\\k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数）.

***15.*【解】方法一**

$$\overline{\boldsymbol{A}}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&-2&2\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\text{（Ⅱ）的通解为 }k\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}\text{（}k\text{ 为任意常数），}$$

把（Ⅱ）的通解代入（Ⅰ），得

$$\begin{cases}-2(-k+1)+2k+2+a(-k-1)-5k=1,\\(-k+1)+2k+2-(-k-1)+bk=4,\\3(-k+1)+2k+2+(-k-1)+2k=c,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\\c=4.\end{cases}$$

**方法二**

因为（Ⅰ），（Ⅱ）同解，所以它们的增广矩阵有等价的行向量组，（Ⅱ）的增广矩阵为阶梯阵，其行向量组线性无关，

$$\overline{\boldsymbol{A}}_1=\begin{pmatrix}-2&1&a&-5&1\\1&1&-1&b&4\\3&1&1&2&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix},\quad\overline{\boldsymbol{A}}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&0&-2&2\\0&0&1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 唯一线性表出，$\boldsymbol{\alpha}_1=-2\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+a\boldsymbol{\beta}_3\Rightarrow a=-1$，

$\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 唯一线性表出，$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3\Rightarrow b=-2$，

$\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 唯一线性表出，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3\Rightarrow c=4$.

***16.*【证明】**令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}$，

方程组（Ⅰ）可写为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，方程组（Ⅱ）、（Ⅲ）可分别写为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$ 及 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$.

若方程组（Ⅰ）有解，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})$，从而 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，又因为（Ⅲ）的解一定为（Ⅱ）的解，所以（Ⅱ）与（Ⅲ）同解；

反之,若(Ⅱ)与(Ⅲ)同解,则$r(A^{\mathrm{T}})=r\begin{pmatrix}A^{\mathrm{T}}\\b^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$,从而$r(A)=r(A\,\vdots\,b)$,故方程组(Ⅰ)有解.

**17.【解】** 令 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,2n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2,2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n,2n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{2n}\end{pmatrix}$,

则(Ⅰ)可写为 $AX=0$,

令 $B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1,2n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2,2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{n,2n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\beta}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\beta}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_{2n}\end{pmatrix}$,

其中 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{12}\\\vdots\\b_{1,2n}\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}b_{21}\\b_{22}\\\vdots\\b_{2,2n}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=\begin{pmatrix}b_{n1}\\b_{n2}\\\vdots\\b_{n,2n}\end{pmatrix}$,

则(Ⅱ)可写为$BY=0$,因为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$为(Ⅰ)的基础解系,因此$r(A)=n,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$线性无关,$A\boldsymbol{\beta}_1=A\boldsymbol{\beta}_2=\cdots=A\boldsymbol{\beta}_n=0\Rightarrow A(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=O\Rightarrow AB^{\mathrm{T}}=O\Rightarrow BA^{\mathrm{T}}=O$.
$\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}$ 为 $BY=0$ 的一组解,而 $r(B)=n,\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}$ 线性无关,
因此$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}$为$BY=0$的一个基础解系.得通解为$k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}+k_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}(k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为任意常数).

**18.【证明】** 首先,方程组 $BX=0$ 的解一定是方程组 $ABX=0$ 的解.
令 $r(B)=r$ 且$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是方程组$BX=0$ 的基础解系,现设方程组 $ABX=0$ 有一个解 $\boldsymbol{\eta}_0$ 不是方程组 $BX=0$ 的解,即 $B\boldsymbol{\eta}_0\neq 0$,显然 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\boldsymbol{\eta}_0$ 线性无关,
若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\boldsymbol{\eta}_0$ 线性相关,则存在不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r},k_0$,使得

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+k_0\boldsymbol{\eta}_0=0,$$

若 $k_0=0$,则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0$,因为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关,
所以 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$,从而 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\boldsymbol{\eta}_0$ 线性无关,所以 $k_0\neq 0$,
故 $\boldsymbol{\eta}_0$ 可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示,由齐次线性方程组解的结构,有 $B\boldsymbol{\eta}_0=0$,矛盾,所以 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\boldsymbol{\eta}_0$ 线性无关,且为方程组$ABX=0$的解,从而$n-r(AB)\geqslant n-r+1,r(AB)\leqslant r-1$,这与 $r(B)=r(AB)$ 矛盾,
故方程组 $BX=0$ 与 $ABX=0$ 同解.

**19.【证明】**(1) 因为 $n=r(CA+DB)=r\left((C\quad D)\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\right)\leqslant r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leqslant n$,所以 $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=n$;

(2) 因为 $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=n$,所以方程组$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 只有零解,从而方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 没有非零的公共解,故 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 线性无关.

**20.【证明】** 设非齐次线性方程组 $AX=b$ 有无穷多个解,则 $r(A)<n$,从而 $|A|=0$,
于是 $A^*b=A^*AX=|A|X=0$.

反之，设$A^*b=0$，因为$b\neq 0$，所以方程组$A^*X=0$有非零解，从而$r(A^*)<n$，又$A_{11}\neq 0$，所以$r(A^*)=1$，且$r(A)=n-1$.

因为$r(A^*)=1$，所以方程组$A^*X=0$的基础解系含有$n-1$个线性无关的解向量，而$A^*A=0$，所以$A$的列向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为方程组$A^*X=0$的一组解向量.

由$A_{11}\neq 0$，得$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，所以$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是方程组$A^*X=0$的基础解系.

因为$A^*b=0$，所以$b$可由$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，也可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，故$r(A)=r(\overline{A})=n-1<n$，即方程组$AX=b$有无穷多个解.

***21.*****【证明】**令$r(B)=r$，$BX=0$的基础解系含有$n-r$个线性无关的解向量，

因为$BX=0$的解一定是$ABX=0$的解，所以$ABX=0$的基础解系所含的线性无关的解向量的个数不少于$BX=0$的基础解系所含的线性无关的解向量的个数，即

$n-r(AB)\geqslant n-r(B)$，　$r(AB)\leqslant r(B)$；

又因为$r[(AB)^T]=r(AB)=r(B^TA^T)\leqslant r(A^T)=r(A)$，

所以$r(AB)\leqslant \min\{r(A),r(B)\}$.

***22.*****【证明】**只需证明$AX=0$与$A^TAX=0$为同解方程组即可.

若$AX_0=0$，则$A^TAX_0=0$.

反之，若$A^TAX_0=0$，则$X_0{}^TA^TAX_0=0\Rightarrow(AX_0)^T(AX_0)=0\Rightarrow AX_0=0$，

所以$AX=0$与$A^TAX=0$为同解方程组，从而$r(A)=r(A^TA)$.

***23.*****【证明】**因为$r(A)=r<n$，所以齐次线性方程组$AX=0$的基础解系含有$n-r$个线性无关的解向量，设为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$.

设$\eta_0$为方程组$AX=b$的一个特解，

令$\beta_0=\eta_0,\beta_1=\xi_1+\eta_0,\beta_2=\xi_2+\eta_0,\cdots,\beta_{n-r}=\xi_{n-r}+\eta_0$，显然$\beta_0,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$为方程组$AX=b$的一组解.

令$k_0\beta_0+k_1\beta_1+\cdots+k_{n-r}\beta_{n-r}=0$，即

$$(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0,$$

上式两边左乘$A$得$(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r})b=0$，

因为$b$为非零列向量，所以$k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=0$，于是

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}=0,$$

注意到$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关，所以$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，

故$\beta_0,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$线性无关，即方程组$AX=b$存在由$n-r+1$个线性无关的解向量构成的向量组. 设$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r+2}$为方程组$AX=b$的一组线性无关解，

令$\gamma_1=\beta_2-\beta_1,\gamma_2=\beta_3-\beta_1,\cdots,\gamma_{n-r+1}=\beta_{n-r+2}-\beta_1$，根据定义，易证$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-r+1}$线性无关，又$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-r+1}$为齐次线性方程组$AX=0$的一组解，即方程组$AX=0$含有$n-r+1$个线性无关的解，矛盾，所以$AX=b$的任意$n-r+2$个解向量都是线性相关的，所以$AX=b$的线性无关的解向量的个数最多为$n-r+1$个.

***24.*****【解】**
$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & b \end{vmatrix}=-(a+1)(b+2).$$

(1) 当$a\neq -1,b\neq -2$时，因为$D\neq 0$，所以方程组有唯一解，由克拉默法则得

$$x_1=\frac{b+1}{a+1},\quad x_2=-\frac{ab^2-2a+b}{(a+1)(b+2)},\quad x_3=\frac{2(a-1)(b+1)}{(a+1)(b+2)}.$$

(2) 当 $a=-1,b\neq-2$ 时，

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\1&-1&1&b\\2&2&b&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&4&b-2&4\\0&0&0&b+1\end{pmatrix},$$

当 $b\neq-1$ 时，方程组无解.

当 $b=-1$ 时，

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&4&-3&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{4}&0\\0&1&-\frac{3}{4}&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

方程组的通解为 $X=k\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ($k$ 为任意常数).

(3) 当 $a\neq-1,b=-2$ 时，

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}a&1&-1&1\\1&-1&1&-2\\2&2&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&2&-3\\0&1-a&-1+a&1-a\end{pmatrix},$$

当 $a=1$ 时，$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1&\frac{3}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,

方程组的通解为 $X=k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$ ($k$ 为任意常数).

当 $a\neq1$ 时，显然 $r(A)=2\neq r(\overline{A})=3$，方程组无解.

25.【解】令 $X=(X_1,X_2,X_3)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，方程组 $AX=B$ 等价于 $\begin{cases}AX_1=\beta_1,\\AX_2=\beta_2,\\AX_3=\beta_3.\end{cases}$

则 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $r(A)=r(A\,\vdots\,B)$，

$$(A\,\vdots\,B)=\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\-1&1&0&-1&0&c\\1&0&1&1&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&2&2&a-1&4&c\\0&-1&-1&1-a&b-4&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&2&a&4&0\\0&1&1&\frac{a-1}{2}&2&\frac{c}{2}\\0&0&0&-\frac{a-1}{2}&b-2&\frac{c}{2}+1\end{bmatrix},$$

由 $r(A)=r(A \vdots B)$ 得 $a=1,b=2,c=-2$，此时 $(A \vdots B)\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&2&1\\0&1&1&0&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

$AX_1=\beta_1$ 的通解为 $X_1=k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_1\\-k_1\\k_1\end{pmatrix}$，

$AX_2=\beta_2$ 的通解为 $X_2=k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-k_2\\2-k_2\\k_2\end{pmatrix}$，

$AX_3=\beta_3$ 的通解为 $X_3=k_3\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-k_3\\-1-k_3\\k_3\end{pmatrix}$，

则 $X=(X_1,X_2,X_3)=\begin{pmatrix}1-k_1&2-k_2&1-k_3\\-k_1&2-k_2&-1-k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$，其中 $k_1,k_2,k_3$ 为任意常数.

**26.【解】**$\bar{A}=\begin{bmatrix}1&0&2&2&6\\2&1&3&a&0\\3&0&a&6&18\\4&-1&9&13&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&2&6\\0&1&-1&a-4&-12\\0&0&a-6&0&0\\0&-1&1&5&b-24\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&2&2&6\\0&1&-1&a-4&-12\\0&0&a-6&0&0\\0&0&0&a+1&b-36\end{bmatrix}.$$

(1) 当 $a\neq-1$ 且 $a\neq 6$ 时，方程组有唯一解；

(2) 当 $a=6$ 时，

$$\bar{A}\to\begin{bmatrix}1&0&2&2&6\\0&1&-1&2&-12\\0&0&0&7&b-36\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因为 $r(A)=r(\bar{A})=3<4$，所以方程组有无数个解，

再由 $\bar{A}\to\begin{bmatrix}1&0&2&0&\frac{114-2b}{7}\\0&1&-1&0&-\frac{2b+12}{7}\\0&0&0&1&\frac{b-36}{7}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ 得通解为

$$X=k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{114-2b}{7}\\-\dfrac{2b+12}{7}\\0\\\dfrac{b-36}{7}\end{pmatrix}(k\text{ 为任意常数});$$

(3) 当 $a=-1$ 时，$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&0&2&2&6\\0&1&-1&-5&-12\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&b-36\end{pmatrix}$，

当 $a=-1,b\neq 36$ 时，方程组无解；

当 $a=-1,b=36$ 时，方程组有无数个解，

由 $\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&0&2&2&6\\0&1&-1&-5&-12\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&6\\0&1&0&-5&-12\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 得通解为

$$X=k\begin{pmatrix}-2\\5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-12\\0\\0\end{pmatrix}(k\text{ 为任意常数}).$$

# 五、矩阵的特征值和特征向量

## ◇ 填空题

1.【解】因为 $|A^*|=|A|^2=4$，且 $|A|>0$，所以 $|A|=2$，又 $AA^*=|A|E=2E$，所以 $A^{-1}=\frac{1}{2}A^*$，从而 $A^{-1}$ 的特征值为 $-\frac{1}{2},-1,1$，根据逆矩阵之间特征值的倒数关系，得 $A$ 的特征值为 $-2,-1,1$，于是 $a_{11}+a_{22}+a_{33}=-2-1+1=-2$.

2.【解】$P^{-1}(A^{-1}+2E)P=P^{-1}A^{-1}P+2E$，

而 $P^{-1}A^{-1}P=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$，所以 $P^{-1}(A^{-1}+2E)P=\begin{pmatrix}4&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$.

3.【解】令 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2A(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+x_3A^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$，即

$$(x_1+\lambda_1x_2+\lambda_1^2x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2x_2+\lambda_2^2x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

则有 $x_1+\lambda_1x_2+\lambda_1^2x_3=0,\lambda_2x_2+\lambda_2^2x_3=0,\lambda_3^2x_3=0$，

因为 $x_1,x_2,x_3$ 只能全为零，所以 $\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\0&\lambda_2&\lambda_2^2\\0&0&\lambda_3^2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow\lambda_2\lambda_3\neq 0$.

4.【解】令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $P$ 可逆，

由 $AP=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 得

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，即 $A\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，

所以 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\-1&0&0\end{vmatrix}=2.$

5.【解】因为 $A$ 为实对称矩阵，所以不同特征值对应的特征向量正交，

因为 $AX=0$ 及 $(A+E)X=0$ 有非零解，所以 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1$ 为矩阵 $A$ 的特征值，$\alpha_1=(a,-a,1)^T$，$\alpha_2=(a,1,1-a)^T$ 是它们对应的特征向量，所以有 $\alpha_1^T\alpha_2=a^2-a+1-a=0$，解得 $a=1$.

6.【解】由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&3&-1\\-1&\lambda+2&3-a\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$ 得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$.

因为 $A$ 有三个线性无关的特征向量，所以 $r(E-A)=1$，解得 $a=4$.

7.【解】由 $|\lambda E-A|=0$ 得 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=6$. 因为 $A$ 有三个线性无关的特征向量，所以 $A$ 可以对角化，从而 $r(6E-A)=1$，解得 $a=0$.

## ◇ 选择题

8.【解】显然 $3\alpha_2,-\alpha_3,2\alpha_1$ 也是特征值 $1,2,-1$ 的特征向量，所以 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}$，选(C).

9.【解】令 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，显然 $A,B$ 有相同的特征值，而 $r(A)\neq r(B)$，所以 (A)，(B)，(C) 都不对，选(D).

10.【解】若 $r(E+A)<n$，则 $|E+A|=0$，于是 $-1$ 为 $A$ 的特征值；

若 $A$ 的每行元素之和为 $-1$，则 $A\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，根据特征值特征向量的定义，$-1$ 为 $A$ 的特征值；若 $A$ 是正交矩阵，则 $A^TA=E$，令 $AX=\lambda X$（其中 $X\neq 0$），则 $X^TA^T=\lambda X^T$，于是 $X^TA^TAX=\lambda^2X^TX$，即 $(\lambda^2-1)X^TX=0$，而 $X^TX>0$，故 $\lambda^2=1$，再由特征值之积为负得 $-1$ 为 $A$ 的特征值，选(A).

11.【解】$A$ 的特征值为 1，2，0，因为特征值都是单值，所以 $A$ 可以对角化，又因为给定的四个矩阵中只有选项(D) 中的矩阵的特征值与 $A$ 的特征值相同且可以对角化，所以选(D).

*12*.【解】(A) 不对,例如:$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}$ 的两个特征值都是0,但 $r(\boldsymbol{A})=1$;

(B) 不对,因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 不一定保证 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可以对角化;

(C) 不对,例如:$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}$ 经过有限次行变换化为 $\begin{pmatrix}1&0&-8\\0&1&5\\0&0&0\end{pmatrix}$,经过行变换不能化为 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$;

因为 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化,所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$,于是 $r(\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$,故选(D).

*13*.【解】因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵,所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$,选(D).

## ◇ 解答题

*14*.【解】因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,得 $|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=0$ 或 1.

因为 $r(\boldsymbol{A})=r$ 且 $0<r<n$,所以0和1都为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,且 $\lambda=1$ 为 $r$ 重特征值,$\lambda=0$ 为 $n-r$ 重特征值,

所以 $5\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda=6$($r$ 重),$\lambda=5$($n-r$ 重),故 $|5\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=5^{n-r}\times6^r$.

*15*.【解】(1) $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵,所以 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1\Rightarrow a=-2\Rightarrow\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-2&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$.

$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\xi_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\xi_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\xi_3=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$,令 $\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1,1,-1)$.

(2) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{E}$.

*16*.【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量,所以 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量有两个,故 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,

而 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&x-2&-x-y\\0&0&0\end{pmatrix}$,所以 $x=2,y=-2$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-x&\lambda-4&-y\\3&3&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

由$(2E-A)X=0$得$\lambda=2$对应的线性无关的特征向量为$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，

由$(6E-A)X=0$得$\lambda=6$对应的线性无关的特征向量为$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$，

令$P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$，则有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{pmatrix}$.

*17.*【解】因为$A$为上三角矩阵，所以$A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=\lambda_4=-1$. 因为$A$有四个线性无关的特征向量，即$A$可以对角化，所以有

$$r(E-A)=r\begin{bmatrix}0&-a&0&-2\\0&0&-2&0\\0&0&2&-b\\0&0&0&2\end{bmatrix}=2,\quad r(-E-A)=r\begin{bmatrix}-2&-a&0&-2\\0&-2&-2&0\\0&0&0&-b\\0&0&0&0\end{bmatrix}=2,$$

于是$a=0,b=0$.

当$\lambda=1$时，由$(E-A)X=0$得$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，

当$\lambda=-1$时，由$(-E-A)X=0$得$\xi_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$，$\xi_4=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$，

令$P=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}$，因为$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{bmatrix}$，

所以$P^{-1}A^{2010}P=E$，从而$A^{2010}=E$.

*18.*【解】(1) 因为方程组$AX=\beta$有解但不唯一，所以$|A|=0$，从而$a=-2$或$a=1$.

当$a=-2$时，$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\1&-2&1&1\\-2&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，方程组有无穷多解；

当$a=1$时，$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$r(A)=1<r(\overline{A})$，方程组无解，故$a=-2$.

(2) 由$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)=0$得$\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$.

由$(0E-A)X=0$得$\lambda_1=0$对应的线性无关的特征向量为$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

由$(3E-A)X=0$得$\lambda_2=3$对应的线性无关的特征向量为$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

由$(-3E-A)X=0$得$\lambda_3=-3$对应的线性无关的特征向量为$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

令$P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$,则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}$.

(3) 令$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$,取$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$,

则$Q^{T}AQ=\begin{pmatrix}0&&\\&3&\\&&-3\end{pmatrix}$.

**19.【解】**(1) $|\lambda E-A|=(\lambda^2-1)[\lambda^2-(a+2)\lambda+2a-1]$,

把$\lambda=3$代入上式得$a=2$,于是$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}$.

(2) 由$|\lambda E-A^2|=0$得$A^2$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\lambda_4=9$.

当$\lambda=1$时,由$(E-A^2)X=0$得$\alpha_1=(1,0,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0,0)^T,\alpha_3=(0,0,-1,1)^T$;

当$\lambda=9$时,由$(9E-A^2)X=0$得$\alpha_4=(0,0,1,1)^T$.

将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$正交规范化得$\beta_1=(1,0,0,0)^T,\beta_2=(0,1,0,0)^T,\beta_3=\left(0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$,

将$\alpha_4$规范化得$\beta_4=\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.

令$P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,则$P^{T}A^2P=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&9\end{pmatrix}$.

**20.**【解】(1) 显然 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，令 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}$，则有

$$\begin{cases}3=\lambda_1,\\2+a=\lambda_1,\\2+b=\lambda_1,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}\lambda_1=3,\\a=1,\\b=1,\end{cases}\text{所以 }\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\3&1&-1\\4&-2&1\end{pmatrix},$$

$|\boldsymbol{A}|=12$，设 $\boldsymbol{A}$ 的另外两个特征值为 $\lambda_2,\lambda_3$，由 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=7,\\\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|\boldsymbol{A}|=12,\end{cases}$ 得 $\lambda_2=\lambda_3=2$.

$\boldsymbol{\alpha}$ 对应的 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=4$.

(2) $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3&1&1\\-3&1&1\\-4&2&1\end{pmatrix}$，因为 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，所以 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 只有一个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 不可以对角化.

**21.**【解】(1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$，因为 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关，所以

$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda+5)(\lambda-1)^2=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-5,1,1$.

(2) 因为 $|\boldsymbol{A}|=-5$，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $1,-5,-5$，故 $\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $3,-3,-3$.
从而 $|\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}|=27$.

**22.**【解】设 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，因为 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^*)^2-4\boldsymbol{E}$ 的三个特征值为 $0,5,32$，所以 $(\boldsymbol{A}^*)^2$ 的三个特征值为 $4,9,36$，于是 $\boldsymbol{A}^*$ 的三个特征值为 $2,3,6$.

又因为 $|\boldsymbol{A}^*|=36=|\boldsymbol{A}|^{3-1}$，所以 $|\boldsymbol{A}|=6$.

由 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=2,\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=3,\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=6$，得 $\lambda_1=3,\lambda_2=2,\lambda_3=1$，

由于一对逆矩阵的特征值互为倒数，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}$.

因为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值都是单值，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可以相似对角化.

**23.**【解】(1) 由 $\boldsymbol{A\xi}_1=2\boldsymbol{\xi}_1$，得 $\begin{cases}a+2+2c=2,\\2b=4,\\-4+2c+2-2a=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=2,\\c=1,\end{cases}$ 则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$.

(2) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+2&-1&-1\\0&\lambda-2&0\\4&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=0$，得 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$.

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$，

由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，

显然 $A$ 可对角化，令 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&0&0\\0&4&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}$.

24. (1)【证明】若 $\alpha, A\alpha$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1, k_2$，使得 $k_1\alpha+k_2A\alpha=0$，设 $k_2\neq 0$，

则 $A\alpha=-\dfrac{k_1}{k_2}\alpha$，矛盾，所以 $\alpha, A\alpha$ 线性无关.

(2)【解】由 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，得 $(A^2+A-6E)\alpha=0$，

因为 $\alpha\neq 0$，所以 $r(A^2+A-6E)<2$，从而 $|A^2+A-6E|=0$，即

$|3E+A|\cdot|2E-A|=0$，则 $|3E+A|=0$ 或 $|2E-A|=0$.

若 $|3E+A|\neq 0$，则 $3E+A$ 可逆，由 $(3E+A)(2E-A)\alpha=0$，得

$(2E-A)\alpha=0$，即 $A\alpha=2\alpha$，矛盾；

若 $|2E-A|\neq 0$，则 $2E-A$ 可逆，由 $(2E-A)(3E+A)\alpha=0$，得

$(3E+A)\alpha=0$，即 $A\alpha=-3\alpha$，矛盾，所以有 $|3E+A|=0$ 且 $|2E-A|=0$，于是二阶矩阵 $A$ 有两个特征值 $-3,2$，故 $A$ 可对角化.

25.【解】(1) 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\neq 0$，

由 $A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$，得 $A$ 的一个特征值为 $\lambda_1=2$；

又由 $A(\alpha_1-\alpha_2)=-(\alpha_1-\alpha_2), A(\alpha_2-\alpha_3)=-(\alpha_2-\alpha_3)$，得 $A$ 的另一个特征值为 $\lambda_2=-1$.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $\alpha_1-\alpha_2$ 与 $\alpha_2-\alpha_3$ 也线性无关，所以 $\lambda_2=-1$ 为矩阵 $A$ 的二重特征值，即 $A$ 的特征值为 $2,-1,-1$.

(2) 因为 $\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3$ 为属于二重特征值 $-1$ 的两个线性无关的特征向量，所以 $A$ 一定可以对角化.

26.【证明】(1) 因为 $A$ 可逆且 $A\sim B$，所以 $B$ 可逆，$A,B$ 的特征值相同且 $|A|=|B|$.

因为 $A\sim B$，所以存在可逆矩阵 $P$，使得 $P^{-1}AP=B$，

而 $A^*=|A|A^{-1}, B^*=|B|B^{-1}$，

于是由 $P^{-1}AP=B$，得 $(P^{-1}AP)^{-1}=B^{-1}$，即 $P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$，

故 $P^{-1}|A|A^{-1}P=|A|B^{-1}$ 或 $P^{-1}A^*P=B^*$，于是 $A^*\sim B^*$.

(2) 因为 $A\sim B$，所以存在可逆阵 $P$，使得 $P^{-1}AP=B$，即 $AP=PB$，

于是 $AP=PBPP^{-1}=P(BP)P^{-1}$，故 $AP\sim BP$.

27.【解】由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-2\\-a&\lambda-1&2-a\\3&0&\lambda-4\end{vmatrix}=0$，得 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=2$.

$$E-A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\-a&0&2-a\\3&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&2-2a\\0&0&0\end{pmatrix},$$

因为矩阵 $A$ 有三个线性无关的特征向量，所以 $A$ 一定可对角化，从而 $r(E-A)=1$，

即 $a=1$，故 $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&1&-1\\-3&0&4\end{pmatrix}$.

当 $\lambda=1$ 时,由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\xi_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$;

当 $\lambda=2$ 时,由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\xi_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$,两边 $n$ 次幂得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2^n\end{pmatrix}$$

从而 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}3-2^{n+1}&0&2^{n+1}-2\\2^n-1&1&1-2^n\\3-3\times2^n&0&3\times2^n-2\end{pmatrix}$.

*28*.【解】(1) 因为方程组有无穷多个解,所以

$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&a+2&a+1\\1&2&a\end{vmatrix}=a^2-2a+1=0$,解得 $a=1$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&&\\&-2&\\&&-1\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&&\\&-2&\\&&-1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&0\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

(2) $|\boldsymbol{A}|=2$,$\boldsymbol{A}^*$ 对应的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1},\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2},\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}$,即 $2,-1,-2$,$\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{E}$ 对应的特征值为 $5,2,1$,所以 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{E}|=10$.

*29*.【解】(1) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 5,所以有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$,

即 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $\lambda_2=5$,对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

又因为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,所以 $r(\boldsymbol{A})<3$,从而 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 0,设特征值 0 对应的特征向量

为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，根据不同特征值对应的特征向量正交得$\begin{cases}-x_1+x_3=0,\\x_1+x_2+x_3=0,\end{cases}$

解得特征值 0 对应的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3&0&3\\2&2&2\\1&-2&1\end{pmatrix}$，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&&\\&5&\\&&0\end{pmatrix}$，得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2&&\\&5&\\&&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&&\\&5&\\&&0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3&0&3\\2&2&2\\1&-2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}8&5&2\\5&5&5\\2&5&8\end{pmatrix}.$$

**30.【解】** 因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，即

$\begin{cases}6+a=7+b,\\4a-4=6b,\end{cases}$ 解得 $a=1,b=0$，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&5&-2\\0&-2&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值都为 $\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=6$.

当 $\lambda=1$ 时，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda=6$ 时，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$，得 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}$.

令 $\gamma_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，$\gamma_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\gamma_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}$，

再令 $\boldsymbol{P}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{30}}\\0&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{5}{\sqrt{30}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{30}}\end{pmatrix}$，则有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

**31.【证明】** 因为 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$，所以 $r(\boldsymbol{A})<n$，$r(\boldsymbol{B})<n$，于是 $\lambda=0$ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 公共的特征值，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量即为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的非零解；

$\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量即为方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，

因为 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$，所以方程组 $\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}\end{cases}$ 有非零解，即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有公共的特征向量.

32.(1)【证明】令 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，则

$x_1\boldsymbol{A\alpha}_1+x_2\boldsymbol{A\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{A\alpha}_n=\boldsymbol{0}\Rightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_2+x_2\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+x_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，

$x_1\boldsymbol{A\alpha}_2+x_2\boldsymbol{A\alpha}_3+\cdots+x_{n-1}\boldsymbol{A\alpha}_n=\boldsymbol{0}\Rightarrow x_1\boldsymbol{\alpha}_3+x_2\boldsymbol{\alpha}_4+\cdots+x_{n-2}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，

$\vdots$

$x_1\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，

因为 $\boldsymbol{\alpha}_n\neq\boldsymbol{0}$，所以 $x_1=0$，反推可得 $x_2=\cdots=x_n=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

(2)【解】$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}$，令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0\Rightarrow\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零，又 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，所以 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含有一个线性无关的解向量，而 $\boldsymbol{A\alpha}_n=0\boldsymbol{\alpha}_n(\boldsymbol{\alpha}_n\neq\boldsymbol{0})$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_n(k\neq0)$.

33.【解】因为 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 5，所以有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 $\lambda_1=5$，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A\xi}_1=5\boldsymbol{\xi}_1$.

又 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{A})=1\Rightarrow\lambda_2=\lambda_3=0$，其对应的特征向量为

$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A\xi}_3=\boldsymbol{0}$.

令 $x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2+x_3\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\beta}$，解得 $x_1=8,x_2=-1,x_3=-2$，

则 $\boldsymbol{A\beta}=8\boldsymbol{A\xi}_1-\boldsymbol{A\xi}_2-2\boldsymbol{A\xi}_3=8\boldsymbol{A\xi}_1=40\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

34.【解】由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$，得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=2$，因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，

$\lambda_2=1,\lambda_3=2$.

由 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$,得 $a=1$,再由 $|\boldsymbol{A}|=b=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2$,得 $b=-2$,

即 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$;

由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\xi}_2=(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$;

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\xi}_3=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$,

令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$.

由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\eta}_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$;

由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\eta}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$;

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得 $\boldsymbol{\eta}_3=(8,3,4)^{\mathrm{T}}$,

令 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-1&1&8\\0&0&3\\1&0&4\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$.

由 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2$,得 $(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$,

令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-\frac{4}{3}&1\\1&-4&1\\0&\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&6&-1\\1&-5&2\\1&-4&1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

**35.【解】** $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&a\\-2&\lambda-a&2\\a&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+a-1)(\lambda-a)(\lambda-a-1)=0$,得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1-a,\lambda_2=a,\lambda_3=1+a$.

(1) 当 $1-a\neq a,1-a\neq 1+a,a\neq 1+a$,即 $a\neq 0$ 且 $a\neq\frac{1}{2}$ 时,因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值,所以 $\boldsymbol{A}$ 一定可以对角化.

$\lambda_1=1-a$ 时,由 $[(1-a)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$;

$\lambda_2=a$ 时,由 $(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1-2a\\1\end{pmatrix}$;

$\lambda_3=1+a$ 时,由 $[(1+a)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}2-a\\-4a\\a+2\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2-a\\ 0 & 1-2a & -4a\\ 1 & 1 & a+2\end{pmatrix}$，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1-a & & \\ & a & \\ & & 1+a\end{pmatrix}$.

(2) 当 $a=0$ 时，$\lambda_1=\lambda_3=1$，

因为 $r(E-A)=2$，所以方程组 $(E-A)X=0$ 的基础解系只含有一个线性无关的解向量，故矩阵 $A$ 不可以对角化.

(3) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$，

因为 $r\left(\frac{1}{2}E-A\right)=2$，所以方程组 $\left(\frac{1}{2}E-A\right)X=0$ 的基础解系只含有一个线性无关的解向量，故 $A$ 不可以对角化.

**36.** (1)【证明】因为 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，所以 $A,B$ 有相同的特征值，设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，因为 $A,B$ 都可相似对角化，所以存在可逆矩阵 $P_1,P_2$，使得

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix},\quad P_2^{-1}BP_2=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix},$$

由 $P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$ 得 $(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1})=B$，

取 $P_1P_2^{-1}=P$，则 $P^{-1}AP=B$，即 $A\sim B$.

(2)【解】由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$ 得

$A$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$；

由 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$ 得

$B$ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1$.

由 $E-A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得 $r(E-A)=1$，即 $A$ 可相似对角化；

再由 $E-B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得 $r(E-B)=1$，即 $B$ 可相似对角化，故 $A\sim B$.

由 $2E-A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得 $A$ 的属于 $\lambda_1=2$ 的线性无关特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$；

由 $E-A\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 得

$A$ 的属于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得 $\boldsymbol{B}$ 的属于 $\lambda_1=2$ 的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$；

由 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 得

$\boldsymbol{B}$ 的属于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，

令 $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，再令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

# 六、二次型

## ◇ 填空题

1.【解】$A^2-2A=O\Rightarrow r(A)+r(2E-A)=4\Rightarrow A$ 可以对角化，$\lambda_1=2,\lambda_2=0$，又二次型的正惯性指数为 2，所以 $\lambda_1=2,\lambda_2=0$ 分别都是二重，所以该二次型的规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

## ◇ 选择题

2.【解】显然 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=9$，由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$，得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=3$，因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 惯性指数相等，但特征值不相同，所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同但不相似，选(C).

3.【解】设二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\overset{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}}{=\!=\!=}\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$，其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵. 取 $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，

则 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\lambda_1=0$，同理可得 $\lambda_2=\lambda_3=0$，由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以 $r(\boldsymbol{A})=0$，从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，选(A).

## ◇ 解答题

4.【证明】首先 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=n$，对任意的 $\boldsymbol{X}>\boldsymbol{0}$，

$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})$，令 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\alpha}$，因为 $r(\boldsymbol{A})=n$，所以 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，所以

$(AX)^T(AX)=\alpha^T\alpha=\|\alpha\|^2>0$，即二次型 $X^T(A^TA)X$ 是正定二次型，$A^TA$ 为正定矩阵，所以 $A^TA$ 的特征值全大于零.

5.【证明】首先 $A^T=A$，因为 $(P^TAP)^T=P^TA^T(P^T)^T=P^TAP$，所以 $P^TAP$ 为对称矩阵，对任意的 $X\neq 0$，$X^T(P^TAP)X=(PX)^TA(PX)$，令 $PX=\alpha$，因为 $P$ 可逆且 $X\neq 0$，所以 $\alpha\neq 0$，又因为 $A$ 为正定矩阵，所以 $\alpha^TA\alpha>0$，即 $X^T(P^TAP)X>0$，故 $X^T(P^TAP)X$ 为正定二次型，于是 $P^TAP$ 为正定矩阵.

6.【证明】显然 $A^T=A$，对任意的 $X\neq 0$，$X^TAX=(PX)^T(PX)$，因为 $X\neq 0$ 且 $P$ 可逆，所以 $PX\neq 0$，于是 $X^TAX=(PX)^T(PX)=\|PX\|^2>0$，即 $X^TAX$ 为正定二次型，故 $A$ 为正定矩阵.

7.【证明】因为 $A,B$ 正定，所以 $A^T=A,B^T=B$，从而 $(A+B)^T=A+B$，即 $A+B$ 为对称矩阵. 对任意的 $X\neq 0$，$X^T(A+B)X=X^TAX+X^TBX$，因为 $A,B$ 为正定矩阵，所以 $X^TAX>0$，$X^TBX>0$，因此 $X^T(A+B)X>0$，于是 $A+B$ 为正定矩阵.

8.【解】因为 $f=X^TAX$ 经过正交变换后的标准形为 $f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$，所以矩阵 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$. 由 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2$ 得 $A^*$ 的特征值为 $\mu_1=\mu_2=-2,\mu_3=1$，从而 $A^*+2E$ 的特征值为 0,0,3，即 $\alpha_1$ 为 $A^*+2E$ 的属于特征值 3 的特征向量，故也为 $A$ 的属于特征值 $\lambda_3=-2$ 的特征向量.

令 $A$ 的属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，因为 $A$ 为实对称矩阵，所以有

$\alpha_1^T\alpha=0$，即 $x_1+x_3=0$，故矩阵 $A$ 的属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为

$$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

令 $P=(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1)=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，由 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}$，得

$A=P\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0&-\frac{3}{2}\\0&1&0\\-\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，所求的二次型为

$$f=X^TAX=-\frac{1}{2}x_1^2+x_2^2-\frac{1}{2}x_3^2-3x_1x_3.$$

9.【解】二次型 $f=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2bx_1x_3+2x_2x_3$ 的矩阵形式为

$$f=X^TAX,$$

其中 $A=\begin{pmatrix}2&1&b\\1&2&1\\b&1&a\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. 因为 $Q^TAQ=B=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$，所以 $A\sim B$（因为正交矩阵的转置矩阵即为其逆矩阵），于是 $A$ 的特征值为 1,1,4.

而 $|\lambda E-A|=\lambda^3-(a+4)\lambda^2+(4a-b^2+2)\lambda+(-3a-2b+2b^2+2)$，所以有

$\lambda^3-(a+4)\lambda^2+(4a-b^2+2)\lambda+(-3a-2b+2b^2+2)=(\lambda-1)^2(\lambda-4)$,

解得 $a=2,b=1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时,由 $(E-A)X=0$ 得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$;

$\lambda_3=4$ 时,由 $(4E-A)X=0$ 得 $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. 显然 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 两两正交,单位化为

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\text{则 } Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

**10.【解】**因为方程组有非零解,所以 $\begin{vmatrix}a+3 & 1 & 2\\ 2a & a-1 & 1\\ a-3 & -3 & a\end{vmatrix}=a(a+1)(a-3)=0$,即 $a=-1$ 或 $a=0$ 或 $a=3$. 因为 $A$ 是正定矩阵,所以 $a_{ii}>0(i=1,2,3)$,所以 $a=3$. 当 $a=3$ 时,由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & -2\\ -1 & \lambda-3 & 2\\ -2 & 2 & \lambda-9\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-10)=0$$

得 $A$ 的特征值为 1,4,10. 因为 $A$ 为实对称矩阵,所以存在正交矩阵 $Q$,使得

$$f=X^{\mathrm{T}}AX\xlongequal{X=QY}y_1^2+4y_2^2+10y_3^2\leqslant 10(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$

而当 $\|X\|=\sqrt{2}$ 时,

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2=Y^{\mathrm{T}}Y=Y^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QY=(QY)^{\mathrm{T}}(QY)=X^{\mathrm{T}}X=\|X\|^2=2,$$

所以当 $\|X\|=\sqrt{2}$ 时,$X^{\mathrm{T}}AX$ 的最大值为 20(最大值 20 可以取到,如 $y_1=y_2=0,y_3=\sqrt{2}$).

**11.【证明】**$A$ 所对应的二次型为 $f=X^{\mathrm{T}}AX$,

因为 $A$ 是实对称矩阵,所以存在正交变换 $X=QY$,使得

$$f=X^{\mathrm{T}}AX\xlongequal{X=QY}\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,\text{其中 } \lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n),$$

对任意的 $X\neq 0$,因为 $X=QY$,所以 $Y=Q^{\mathrm{T}}X\neq 0$,

于是 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2>0$,即对任意的 $X\neq 0$ 有 $X^{\mathrm{T}}AX>0$,所以 $X^{\mathrm{T}}AX$ 为正定二次型,故 $A$ 为正定矩阵.

**12.【证明】**必要性:设 $B^{\mathrm{T}}AB$ 是正定矩阵,则对任意的 $X\neq 0$,$X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}ABX=(BX)^{\mathrm{T}}A(BX)>0$,所以 $BX\neq 0$,即对任意的 $X\neq 0$ 有 $BX\neq 0$,或方程组 $BX=0$ 只有零解,所以 $r(B)=n$.

充分性:反之,设 $r(B)=n$,则对任意的 $X\neq 0$,有 $BX\neq 0$,

因为 $A$ 为正定矩阵,所以 $X^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)X=(BX)^{\mathrm{T}}A(BX)>0$,

因为 $(B^{\mathrm{T}}AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}AB$,所以 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为对称矩阵,

所以 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵.

# 概率统计部分

## 一、随机事件与概率

### ◇ 填空题

1.【解】因为 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，且 $P(A)+P(B)=0.8$，$P(A+B)=0.6$，
所以 $P(AB)=0.2$. 又因为 $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$，$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$，
所以 $P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})=P(A)+P(B)-2P(AB)=0.8-0.4=0.4$.

2.【解】$P(\overline{A}\mid\overline{B})=0.7=\dfrac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{1-P(B)}=\dfrac{1-P(A+B)}{1-P(B)}$，

因为 $P(A|B)=0.4$，$P(B|A)=0.4$，所以 $P(A)=P(B)$ 且 $P(AB)=0.4P(A)$，

$P(\overline{A}\mid\overline{B})=0.7=\dfrac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}=\dfrac{1-2P(A)+0.4P(A)}{1-P(A)}=0.7$，

解得 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(AB)=\dfrac{2}{15}$，

于是 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{15}=\dfrac{8}{15}$.

3.【解】因为 $P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B})$，所以 $A,B$ 相互独立，从而 $A,\overline{B}$ 相互独立，故

$$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-P(B)]=0.4\times0.5=0.2$$

**注解** (1) 当 $0<P(B)<1$ 时，$P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B})$ 的充分必要条件是 $A,B$ 独立；
(2) $A,B$ 独立的充分必要条件是事件 $A,\overline{B}$、$\overline{A},B$、$\overline{A},\overline{B}$ 任意一对相互独立.

4.【解】由 $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.2$ 及 $P(A)=0.6$ 得 $P(AB)=0.4$，
再由 $P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.3$ 得 $P(B)=0.7$，

所以 $P(A+\overline{B}\mid\overline{A})=\dfrac{P[\overline{A}(A+\overline{B})]}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A})}=\dfrac{1-P(A+B)}{1-P(A)}$

$$=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}=\frac{1-0.6-0.7+0.4}{0.4}=\frac{1}{4}.$$

5.【解】$P(A)=P\{X=4,Y=6\}+P\{X=5,Y=5\}+P\{X=6,Y=4\}=3\times\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{12}$，

$P(B)=P\{X=2,Y=1\}+P\{X=3,Y=1\}+P\{X=3,Y=2\}+P\{X=4,Y=3\}$
$+P\{X=4,Y=2\}+P\{X=4,Y=1\}+P\{X=5,Y=4\}+P\{X=5,Y=3\}$
$+P\{X=5,Y=2\}+P\{X=5,Y=1\}+P\{X=6,Y=5\}+P\{X=6,Y=4\}$

$$+P\{X=6,Y=3\}+P\{X=6,Y=2\}+P\{X=6,Y=1\}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12},$$

$P(AB)=P\{X=6,Y=4\}=\frac{1}{36}$,

则 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{12}+\frac{5}{12}-\frac{1}{36}=\frac{17}{36}$.

*6*.【解】根据题意得 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)=\frac{1}{4}$,

因为 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB),P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$,所以 $P(A)=P(B)$,

再由独立得 $P(A)-P^2(A)=\frac{1}{4}$,解得 $P(A)=\frac{1}{2}$.

*7*.【解】半圆的面积为 $S=\frac{\pi}{2}a^2$,落点与原点的连线与 $x$ 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的区域记为 $D_1$,

所求概率为 $p=\frac{\iint\limits_{D_1}d\sigma}{S}=\frac{2}{\pi a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\,dr=\frac{\pi+2}{2\pi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$.

*8*.【解】令 $A_i=\{$所取产品为 $i$ 等品$\}(i=1,2,3),P(A_1)=0.6,P(A_2)=0.3,P(A_3)=0.1$,
所求概率为

$$P(A_1\mid A_1+A_2)=\frac{P(A_1)}{P(A_1+A_2)}=\frac{0.6}{0.6+0.3}=\frac{2}{3}.$$

*9*.【解】设一次试验中 $A$ 发生的概率为 $p$,$B=\{$三次试验中 $A$ 至少发生一次$\}$,

则 $P(B)=\frac{19}{27}$,又 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-(1-p)^3$,

所以有 $1-(1-p)^3=\frac{19}{27}$,解得 $p=\frac{1}{3}$,即一次试验中 $A$ 发生的概率为 $\frac{1}{3}$.

*10*.【解】令 $A=\{$第一件产品合格$\}$,$B=\{$第二件产品合格$\}$,则所求概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\mid\overline{A}+\overline{B})=\frac{P[\overline{A}\,\overline{B}(\overline{A}+\overline{B})]}{P(\overline{A}+\overline{B})}=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A}+\overline{B})}=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{1-P(AB)},$$

而 $P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{A_4^2}{A_{10}^2}=\frac{2}{15}$,$P(AB)=\frac{A_6^2}{A_{10}^2}=\frac{1}{3}$,所以 $P(\overline{A}\,\overline{B}\mid\overline{A}+\overline{B})=\frac{1}{5}$.

## ◇ 选择题

*11*.【解】因为 $A,B$ 互不相容,所以 $P(AB)=0$,于是有

$$P(B\mid\overline{A})-P(A)P(B\mid\overline{A})=P(B\mid\overline{A})P(\overline{A})=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=P(B)$$

选(B).

*12*.【解】由 $P(A+B\mid C)=P(A\mid C)+P(B\mid C)$,因为 $P(A+B\mid C)=P(A\mid C)+P(B\mid C)-P(AB\mid C)$,所以 $P(AB\mid C)=0$,从而 $P(ABC)=0$,

故 $P(AC+BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)=P(AC)+P(BC)$,选(B).

*13*.【解】当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时,事件 $A,B$ 独立与互斥是不相容的,即若 $A,B$ 独立,则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$,则 $A,B$ 不互斥;若 $A,B$ 互斥,则 $P(AB)=0\neq P(A)P(B)$,

即 $A,B$ 不独立,又三个事件两两独立不一定相互独立,选(D).

**14.【解】**因为事件 $A,C$ 独立,$B,C$ 也独立,且 $A,B$ 不相容,

所以 $P(AC)=P(A)P(C),P(BC)=P(B)P(C)$,且 $AB=\varnothing$.

$P[(A+B)\overline{C}]=P(A\overline{C}+B\overline{C})=P(A\overline{C})+P(B\overline{C})-P(AB\overline{C})$

$=P(A)P(\overline{C})+P(B)P(\overline{C})=[P(A)+P(B)]P(\overline{C})$,

而 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)$,

所以 $P[(A+B)\overline{C}]=[P(A)+P(B)]P(\overline{C})=P(A+B)P(\overline{C})$,即 $A+B$ 与 $\overline{C}$ 独立,正确答案为(A).

**15.【解】**由于 $A_1,A_2,A_3$ 两两独立,所以 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ 也两两独立,但不一定相互独立,选(B).

**16.【解】**$P(A)=0$ 时,因为 $AB\subset A$,所以 $P(AB)=0$,于是 $P(AB)=P(A)P(B)$,即 $A,B$ 独立;常数与任何随机变量独立;若 $P(A)=1$,则 $P(\overline{A})=0$,$\overline{A},B$ 独立,则 $A,B$ 也独立;因为 $P(A+B)=P(A)+P(B)$,得 $P(AB)=0$,但 $AB$ 不一定是不可能事件,故选(D).

**17.【解】**$A+B=B$ 等价于 $AB=A$,$AB=A$ 等价于 $A\subset B$,$A\subset B$ 等价于 $\overline{B}\subset\overline{A}$,而 $A\overline{B}=A-AB$,则 $A\overline{B}=\varnothing$ 等价于 $AB=A$,所以选(D).

**18.【解】**在 $A,B,C$ 两两独立的情况下,$A,B,C$ 相互独立 $\Leftrightarrow P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ $\Leftrightarrow P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC)$,所以正确答案为(A).

**19.【解】**$P(A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{2},P(A_3)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2},P(A_4)=\dfrac{1}{4}$,

$P(A_1A_2)=\dfrac{1}{4},P(A_1A_3)=P(A_1\overline{A_2})=\dfrac{1}{4},P(A_2A_3)=P(\overline{A_1}A_2)=\dfrac{1}{4}$,

因为 $P(A_3A_4)=0$,所以 $A_2,A_3,A_4$ 不两两独立,(C)、(D) 不对;

因为 $P(A_1A_2A_3)=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$,所以 $A_1,A_2,A_3$ 两两独立但不相互独立,选(B).

## ◇ 解答题

**20.【解】**设 $A_i=\{$第 $i$ 本书正好在第 $i$ 个位置$\}$,

$B=\{$至少有一本书从左到右排列的序号与它的编号相同$\}$,则 $B=A_1+A_2+A_3$,且

$P(A_i)=\dfrac{2!}{3!}=\dfrac{1}{3}(i=1,2,3),P(A_iA_j)=\dfrac{1!}{3!}=\dfrac{1}{6}(i,j=1,2,3,i\neq j),P(A_1A_2A_3)=\dfrac{1!}{3!}=\dfrac{1}{6}$,

故 $P(B)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$

$=\dfrac{2}{3}$.

**21.【解】方法一**

基本事件数 $n=(a+b)!$,设 $A_k=\{$第 $k$ 次取到黑球$\}$,则有利样本点数为 $a(a+b-1)!$,

所以 $P(A_k)=\dfrac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\dfrac{a}{a+b}$.

**方法二**

把所有的球看成不同对象,取 $k$ 次的基本事件数为 $n=A_{a+b}^{k}$,第 $k$ 次取到黑球所包含的事件数为 $aA_{a+b-1}^{k-1}$,则 $P(A_k)=\dfrac{aA_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}}=\dfrac{a}{a+b}$.

22.【解】设甲乙两船到达的时刻分别为 $x,y(0\leqslant x\leqslant 24,0\leqslant y\leqslant 24)$，

则两船不需要等待的充分必要条件是 $\begin{cases}y-x\geqslant 1,\\ x-y\geqslant 2,\end{cases}$

令 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 24,0\leqslant y\leqslant 24\}$，

则 $D_1=\{(x,y)\mid y-x\geqslant 1,x-y\geqslant 2,(x,y)\in D\}$，

则两船不需要等待的概率为 $p=\frac{S(D_1)}{S(D)}=\frac{1013}{1152}$.

23.【解】令 $A_k=\{$第 $k$ 次拨通对方电话$\}(k=1,2,\cdots,10)$，

$P(A_1)=0.1,P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10},\cdots$，

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})\cdots P(A_k\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}})$$
$$=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\cdots\times\frac{1}{10-k+1}=\frac{1}{10}.$$

24.【解】设 $A_1=\{$甲数为 5$\},A_2=\{$甲数为 10$\},A_3=\{$甲数为 15$\},B=\{$甲数大于乙数$\}$，

$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},P(B\mid A_1)=\frac{4}{14},P(B\mid A_2)=\frac{9}{14},P(B\mid A_3)=1$，

则 $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)=\frac{9}{14}$.

25.【解】(1) 设 $A=\{$甲击中目标$\},B=\{$乙击中目标$\},C=\{$击中目标$\}$，则 $C=A+B$，

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$
$$=0.6+0.5-0.6\times 0.5=0.8.$$

(2) 设 $A_1=\{$选中甲$\},A_2=\{$选中乙$\},B=\{$目标被击中$\}$，则

$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$，　$P(B\mid A_1)=0.6$，　$P(B\mid A_2)=0.5$，

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)}$$
$$=\frac{0.5\times 0.6}{0.5\times 0.6+0.5\times 0.5}=\frac{6}{11}.$$

26.【证明】由 $A,B$ 独立，得 $P(AB)=P(A)P(B)$，

由 $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B})$，得 $A,\overline{B}$ 独立，同理可证 $\overline{A},B$ 独立；

$$\text{由 }P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$
$$=[1-P(A)][1-P(B)]=P(\overline{A})P(\overline{B})\text{，得 }\overline{A},\overline{B}\text{ 独立.}$$

27.【证明】因为 $A,B$ 同时发生，则 $C$ 发生，所以 $AB\subset C$，于是 $P(C)\geqslant P(AB)$，

而 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant 1$，

所以有 $P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$，于是 $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

28.【解】(1) 设 $A_i=\{$所抽取的报名表为第 $i$ 个地区的$\}(i=1,2,3)$，

$B_j=\{$第 $j$ 次取的报名表为男生报名表$\}(j=1,2)$，则

$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},P(\overline{B}_1\mid A_1)=\frac{3}{10},P(\overline{B}_1\mid A_2)=\frac{7}{15},P(\overline{B}_1\mid A_3)=\frac{5}{25}$，

$$P(\overline{B}_1)=P(A_1)P(\overline{B}_1\mid A_1)+P(A_2)P(\overline{B}_1\mid A_2)+P(A_3)P(\overline{B}_1\mid A_3)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{7}{15}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{25}=\frac{29}{90}.$$

(2)$P(\overline{B}_1B_2\mid A_1)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$，　$P(\overline{B}_1B_2\mid A_2)=\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}=\frac{8}{30}$，

$P(\overline{B}_1B_2\mid A_3)=\frac{5}{25}\times\frac{20}{24}=\frac{5}{30}$，　$P(B_2)=P(B_1)=\frac{61}{90}$，则

$$P(\overline{B}_1\mid B_2)=\frac{P(\overline{B}_1B_2)}{P(B_2)}=\frac{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(\overline{B}_1B_2\mid A_i)}{P(B_2)}=\frac{20}{61}.$$

# 二、随机变量及其分布

## ◇ 填空题

**1.【解】**设成功的次数为 $X$，则 $X\sim B(100,p)$，

$D(X)=100p(1-p)$，标准差为$\sqrt{100p(1-p)}$.

令 $f(p)=p(1-p)(0<p<1)$，由 $f'(p)=1-2p=0$ 得 $p=\frac{1}{2}$，因为 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=-2<0$，

所以 $p=\frac{1}{2}$ 为 $f(p)$ 的最大值点，当 $p=\frac{1}{2}$ 时，成功次数的标准差最大，最大值为 5.

**2.【解】**由 $P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p(k=1,2,\cdots)\left(\text{其中 } p=\frac{3}{4}\right)$，得

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k)=\sum_{k=1}^{\infty}p(1-p)^{2k-1}=p\cdot\frac{1-p}{1-(1-p)^2}=\frac{1}{5}.$$

**3.【解】**$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)$.

当 $y\leqslant 0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f_X(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\arctan\sqrt{y}.$$

于是 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{2}{\pi}\arctan\sqrt{y}, & y>0,\end{cases}$ 故 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \frac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)}, & y>0.\end{cases}$

## ◇ 选择题

**4.【解】**$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=-t}\int_a^{+\infty}f(-t)\mathrm{d}t=\int_a^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1-\int_{-\infty}^{a}f(t)\mathrm{d}t$

$$=1-\left(\int_{-\infty}^{-a}f(t)\mathrm{d}t+\int_{-a}^{a}f(t)\mathrm{d}t\right)=1-F(-a)-2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t,$$

则 $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$，选(B).

5.【解】根据性质 $F(+\infty)=1$,得正确答案为(D).

6.【解】函数 $\varphi(x)$ 可作为某一随机变量的分布函数的充分必要条件是:

(1)$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$; (2)$\varphi(x)$ 单调不减;

(3)$\varphi(x)$ 右连续; (4)$\varphi(-\infty)=0,\varphi(+\infty)=1$.

显然只有 $F(2x-1)$ 满足条件,选(D).

7.【解】$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\min\{X,2\}\leqslant y)=1-P(\min\{X,2\}>y)$

$=1-P(X>y,2>y)=1-P(X>y)P(2>y)$,

当 $y\geqslant 2$ 时,$F_Y(y)=1$;当 $y<2$ 时,$F_Y(y)=1-P(X>y)=P(X\leqslant y)=F_X(y)$,

而 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 所以当 $0\leqslant y<2$ 时,$F_Y(y)=1-\mathrm{e}^{-y}$;

当 $y<0$ 时,$F_Y(y)=0$,即

$$F_Y(y)=\begin{cases}1, & y\geqslant 2,\\ 1-\mathrm{e}^{-y}, & 0\leqslant y<2,\\ 0, & y<0,\end{cases}$$ 显然 $F_Y(y)$ 在 $y=2$ 处间断,选(B).

## ◇ 解答题

8.【解】设 $A=\{$从甲袋中取出黑球$\}$,$X$ 的可能取值为 0,1,2,3,令 $\{X=i\}=B_i(i=0,1,2,3)$,

则 $P(X=0)=P(B_0)=P(A)P(B_0\mid A)+P(\overline{A})P(B_0\mid\overline{A})=\frac{2}{5}\times 0+\frac{3}{5}\times\frac{C_4^4}{C_6^4}=\frac{1}{25}$,

$P(X=1)=P(B_1)=P(A)P(B_1\mid A)+P(\overline{A})P(B_1\mid\overline{A})=\frac{2}{5}\times\frac{C_3^1C_3^3}{C_6^4}+\frac{3}{5}\times\frac{C_4^3C_2^1}{C_6^4}=\frac{10}{25}$,

$P(X=2)=P(B_2)=P(A)P(B_2\mid A)+P(\overline{A})P(B_2\mid\overline{A})=\frac{2}{5}\times\frac{C_3^2C_3^2}{C_6^4}+\frac{3}{5}\times\frac{C_4^2C_2^2}{C_6^4}=\frac{12}{25}$,

$P(X=3)=P(B_3)=P(A)P(B_3\mid A)+P(\overline{A})P(B_3\mid\overline{A})=\frac{2}{5}\times\frac{C_3^3C_3^1}{C_6^4}+\frac{3}{5}\times 0=\frac{2}{25}$,

所以 $X$ 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{25} & \frac{10}{25} & \frac{12}{25} & \frac{2}{25}\end{pmatrix}$.

9.【解】(1)$T$ 的概率分布函数为 $F(t)=P(T\leqslant t)$,

当 $t<0$ 时,$F(t)=0$;

当 $t\geqslant 0$ 时,$F(t)=P(T\leqslant t)=1-P(T>t)=1-P(N=0)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$,

所以 $F(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $T\sim E(\lambda)$.

(2) 所求概率为

$$p=P(T\geqslant 16\mid T\geqslant 8)=\frac{P(T\geqslant 16,T\geqslant 8)}{P(T\geqslant 8)}=\frac{P(T\geqslant 16)}{P(T\geqslant 8)}=\mathrm{e}^{-8\lambda}.$$

10.【解】(1) 当 $x<-1$ 时,$F(x)=0$;

当 $x=-1$ 时,$F(-1)=\frac{1}{8}$;

因为 $P(-1<X<1)=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$，所以在$\{-1<X<1\}(-1<x<1)$发生下，

$P(-1<X\leqslant x\mid -1<X<1)=\frac{x+1}{2}$，于是

当$-1<x<1$时，

$$\begin{aligned}P(-1<X\leqslant x)&=P(-1<X\leqslant x,-1<x<1)\\&=P(-1<X<1)\cdot P(-1<X\leqslant x\mid -1<x<1)\\&=\frac{5}{8}\cdot\frac{x+1}{2}=\frac{5x+5}{16},\end{aligned}$$

$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X\leqslant -1)+P(-1<X\leqslant x)=\frac{1}{8}+\frac{5x+5}{16}=\frac{5x+7}{16}$,

当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=1$，

故 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{5x+7}{16}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(2) $P(X<0)=F(0)=\frac{7}{16}$.

**11.【解】**$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(1-\sqrt[3]{X}\leqslant y)=P(X\geqslant (1-y)^3)$

$$=1-P(X<(1-y)^3)=1-\int_{-\infty}^{(1-y)^3}f_X(x)\mathrm{d}x=1-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{(1-y)^3}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

$f_Y(y)=F'_Y(y)=\frac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}\quad(-\infty<y<+\infty)$.

**12.【解】**$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\mathrm{e}^X\leqslant y)$，

当 $y\leqslant 1$ 时，$X\leqslant 0$，$F_Y(y)=0$；

当 $y>1$ 时，$X>0$，$F_Y(y)=P(\mathrm{e}^X\leqslant y)=P(X\leqslant \ln y)=\int_{-\infty}^{\ln y}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\ln y}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，

$f_Y(y)=\frac{1}{y^2}$，所以 $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 1,\\ \frac{1}{y^2}, & y>1.\end{cases}$

**13.【解】**由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & -1 & \lambda-Y\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-Y)=0$，

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=Y$.

若 $Y\neq 1,2$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定可以对角化；

当 $Y=1$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$\lambda=1$ 为二重特征值，

因为 $r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化；

当 $Y=2$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，$\lambda=2$ 为二重特征值，

因为 $r(2E-A)=1$,所以 $A$ 可对角化,故 $A$ 可对角化的概率为

$$P(Y\neq 1,2)+P(Y=2)=P(Y=0)+P(Y=2)+P(Y=3)=\frac{2}{3}.$$

*14*.【解】$P(X+Y=0)=P(Y=-X)=P(|X|>1)=P(X>1)+P(X<-1)$

$$=P(X>1)=1-P(X\leqslant 1)=1-F_X(1)=e^{-\lambda},$$

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leqslant y)=P(Y\leqslant y,|X|\leqslant 1)+P(Y\leqslant y,|X|>1)\\&=P(X\leqslant y,|X|\leqslant 1)+P(-X\leqslant y,X>1)+P(-X\leqslant y,X<-1)\\&=P(X\leqslant y,0<X\leqslant 1)+P(X\geqslant -y,X>1),\end{aligned}$$

当 $y<-1$ 时,$F_Y(y)=P(X>-y)=e^{\lambda y}$;

当 $-1\leqslant y<0$ 时,$F_Y(y)=P(X>1)=e^{-\lambda}$;

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时,$F_Y(y)=P(X\leqslant y)+P(X>1)=1-e^{-\lambda y}+e^{-\lambda}$;

当 $y>1$ 时,$F_Y(y)=P(0<X\leqslant 1)+P(X>1)=1$,

故 $F_Y(y)=\begin{cases}e^{\lambda y}, & y<-1,\\ e^{-\lambda}, & -1\leqslant y<0,\\ 1-e^{-\lambda y}+e^{-\lambda}, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1.\end{cases}$

# 三、多维随机变量及其分布

## ◇ 填空题

*1*.【解】 $P(X+2Y\leqslant 4)$

$$\begin{aligned}&=P(Y=1)P(X\leqslant 4-2Y\mid Y=1)+P(Y=2)P(X\leqslant 4-2Y\mid Y=2)\\&\quad+P(Y=3)P(X\leqslant 4-2Y\mid Y=3)\\&=\frac{1}{5}P(X\leqslant 2)+\frac{1}{2}P(X\leqslant 0)+\frac{3}{10}P(X\leqslant -2)\\&=\frac{1}{5}\Phi(1)+\frac{1}{4}+\frac{3}{10}\Phi(-1)=0.465\ 87.\end{aligned}$$

**2**.【解】由 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 得 $X\sim E(2)$,同理 $Y\sim E(3)$,且 $X,Y$ 独立.

$$\begin{aligned}P(\max\{X,Y\}>1)&=P(X>1\text{ 或 }Y>1)=1-P(X\leqslant 1,Y\leqslant 1)=1-P(X\leqslant 1)P(Y\leqslant 1)\\&=1-F_X(1)F_Y(1)=1-(1-e^{-2})(1-e^{-3})=e^{-2}+e^{-3}-e^{-5}.\end{aligned}$$

**3**.【解】由 $X,Y$ 在 $(0,2)$ 上服从均匀分布得

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{y}{2}, & 0\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

因为 $X,Y$ 相互独立,所以

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\leqslant z)=1-P(Z>z)=1-P(\min\{X,Y\}>z)=1-P(X>z,Y>z)\\&=1-P(X>z)P(Y>z)=1-[1-P(X\leqslant z)][1-P(Y\leqslant z)]\end{aligned}$$

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)],$$

于是 $P(0<Z<1)=F_Z(1)-F_Z(0)=\dfrac{3}{4}$.

4.【解】$F_U(u)=P(U\leqslant u)=P(X+Y\leqslant u)$，当 $u<0$ 时，$F_U(u)=0$；

当 $0\leqslant u<1$ 时，$F_U(u)=P(U\leqslant u)=P(X+Y\leqslant u)=P(X=0,Y\leqslant u)$

$$=P(X=0)P(Y\leqslant u)=\frac{3}{4}\times\frac{u+1}{2}=\frac{3u+3}{8},$$

当 $1\leqslant u<2$ 时，$F_U(u)=P(X=0,Y\leqslant u)+P(X=1,Y\leqslant u-1)$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{u}{2}=\frac{3}{4}+\frac{u}{8},$$

当 $u\geqslant 2$ 时，$F_U(u)=1$. 所以 $F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ \dfrac{3u+3}{8}, & 0\leqslant u<1,\\ \dfrac{3}{4}+\dfrac{u}{8}, & 1\leqslant u<2,\\ 1, & u\geqslant 2.\end{cases}$

5.【解】$P(X>5\mid Y\leqslant 3)=\dfrac{P(X>5,Y\leqslant 3)}{P(Y\leqslant 3)}=\dfrac{\int_0^3 \mathrm{d}y\int_5^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}{\int_0^3 \mathrm{d}y\int_y^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x}=\dfrac{3\mathrm{e}^{-5}}{1-\mathrm{e}^{-3}}$.

6.【解】令 $\{X\geqslant 0\}=A$，$\{Y\geqslant 0\}=B$，则有 $P(AB)=\dfrac{3}{7}$，$P(A)=P(B)=\dfrac{4}{7}$，故

$P(\max\{X,Y\}\geqslant 0)=1-P(\max\{X,Y\}<0)=1-P(X<0,Y<0)$

$$=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{5}{7}.$$

## ◇ 选择题

7.【解】$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(\min\{X,Y\}\leqslant z)=1-P(\min\{X,Y\}>z)$

$$=1-P(X>z,Y>z)=1-P(X>z)P(Y>z)$$

$=1-[1-P(X\leqslant z)][1-P(Y\leqslant z)]=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$，选(C).

8.【解】$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(\max\{X,Y\}\leqslant z)=P(X\leqslant z,Y\leqslant z)$

$=P(X\leqslant z)P(Y\leqslant z)=F_X(z)F_Y(z)$，选(B).

9.【解】由于 $X\sim E(\lambda)$，所以密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 分布函数为

$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\Rightarrow E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$，$D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$，因为 $E(X+Y)=\dfrac{2}{\lambda}$，$E(X-Y)=0$，

而 $\max\{X,Y\}$ 的分布函数是 $F^2(x)\neq\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 所以(A)，(B)，(C) 项都不对，选(D).

事实上，$\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$P(\min\{X,Y\}\leqslant x)=1-P(\min\{X,Y\}>x)=1-P(X>x,Y>x)$

$$=1-P(X>x)P(Y>x)=1-[1-F(x)]^2=\begin{cases}1-e^{-2\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

*10*.【解】若 $X,Y$ 独立且都服从正态分布，则 $X,Y$ 的任意线性组合也服从正态分布，选(D).

*11*.【解】因为 $(X,Y)$ 服从二维正态分布，所以 $X,Y$ 都服从一维正态分布，$aX+bY$ 服从一维正态分布，且 $X,Y$ 独立与不相关等价，所以选(B).

*12*.【解】只有当 $(X,Y)$ 服从二维正态分布时，$X,Y$ 独立才与 $X,Y$ 不相关等价，由 $X,Y$ 仅仅是正态变量且不相关不能推出 $X,Y$ 相互独立，(A) 不对；若 $X,Y$ 都服从正态分布且相互独立，则 $(X,Y)$ 服从二维正态分布，但 $X,Y$ 不一定相互独立，(B) 不对；当 $X,Y$ 相互独立时才能推出 $X+Y$ 服从一维正态分布，(D) 不对，故选(C).

*13*.【解】$Z=Y-X\sim N(1,1)$，因为 $X-Y\sim N(-1,1)$，$X+Y\sim N(1,1)$，

$X-2Y\sim N\left(-2,\frac{5}{2}\right)$，$Y-2X\sim N\left(1,\frac{5}{2}\right)$，所以选(B).

## ◇ 解答题

*14*.【解】$X=\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}=X_1X_4-X_2X_3$，令 $U=X_1X_4$，$V=X_2X_3$，且 $U,V$ 独立同分布.

$P(U=1)=P(X_1=1,X_4=1)=0.16$，　$P(U=0)=0.84$，$X$ 的可能取值为 $-1,0,1$.

$P(X=-1)=P(U=0,V=1)=P(U=0)P(V=1)=0.84\times0.16=0.134\ 4$，

$P(X=1)=P(U=1,V=0)=P(U=1)P(V=0)=0.16\times0.84=0.134\ 4$，

$P(X=0)=1-2\times0.134\ 4=0.731\ 2$，于是 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.134\ 4 & 0.731\ 2 & 0.134\ 4\end{pmatrix}$.

*15*.【解】(1) 由于 $X,Y$ 相互独立，所以

$P(U=V=i)=P(X=i,Y=i)=P(X=i)P(Y=i)=\frac{1}{9}$，$i=1,2,3$；

$P(U=2,V=1)=P(X=2,Y=1)+P(X=1,Y=2)=\frac{2}{9}$；

$P(U=3,V=1)=P(X=3,Y=1)+P(X=1,Y=3)=\frac{2}{9}$；

$P(U=3,V=2)=P(X=3,Y=2)+P(X=2,Y=3)=\frac{2}{9}$；

$P(U=1,V=2)=P(U=1,V=3)=P(U=2,V=3)=0$.

所以 $(U,V)$ 的联合分布律为

| $U$ \ $V$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{9}$ | 0 | 0 |
| 2 | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | 0 |
| 3 | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

(2)$P(Z=1)=P(UV=1)=P(U=1,V=1)=\frac{1}{9}$;

$P(Z=2)=P(UV=2)=P(U=1,V=2)+P(U=2,V=1)=\frac{2}{9}$;

$P(Z=3)=P(UV=3)=P(U=1,V=3)+P(U=3,V=1)=\frac{2}{9}$;

$P(Z=4)=P(UV=4)=P(U=2,V=2)=\frac{1}{9}$;

$P(Z=6)=P(UV=6)=P(U=2,V=3)+P(U=3,V=2)=\frac{2}{9}$;

$P(Z=9)=P(UV=9)=P(U=3,V=3)=\frac{1}{9}$. 所以 $Z$ 的分布律为

$$Z\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 9\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}.$$

(3) 由于 $P(U=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{9}$,

$$P(V=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=1)+P(X=3,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3)=\frac{5}{9},$$

而 $P(U=1)P(V=1)=\frac{1}{9}\times\frac{5}{9}\neq P(U=1,V=1)=\frac{1}{9}$,所以 $U,V$ 不相互独立.

(4)$P(U=V)=P(U=1,V=1)+P(U=2,V=2)+P(U=3,V=3)=\frac{1}{3}$.

***16.*【解】** 由 $p_{11}+p_{21}=p_{\cdot 1}$ 得 $p_{11}=\frac{1}{24}$,

因为 $X,Y$ 相互独立,所以 $p_{1\cdot}\times p_{\cdot 1}=p_{11}$,于是 $p_{1\cdot}=\frac{1}{4}$,

由 $p_{1\cdot}\times p_{\cdot 2}=p_{12}$ 得 $p_{\cdot 2}=\frac{1}{2}$,再由 $p_{12}+p_{22}=p_{\cdot 2}$ 得 $p_{22}=\frac{3}{8}$,

由 $p_{11}+p_{12}+p_{13}=p_{1\cdot}$ 得 $p_{13}=\frac{1}{12}$,再由 $p_{1\cdot}\times p_{\cdot 3}=p_{13}$ 得 $p_{\cdot 3}=\frac{1}{3}$,

由 $p_{13}+p_{23}=p_{\cdot 3}$ 得 $p_{23}=\frac{1}{4}$,再由 $p_{1\cdot}+p_{2\cdot}=1$ 得 $p_{2\cdot}=\frac{3}{4}$.

***17.*【解】**(1)$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$.

当 $x\leqslant 0$ 时,$f_X(x)=0$;

当 $x>0$ 时,$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}(2y)=\mathrm{e}^{-x}$,

则 $f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$,

当 $y\leqslant 0$ 时，$f_Y(y)=0$；

当 $y>0$ 时，$f_Y(y)=\int_0^{+\infty}2e^{-(x+2y)}dx=2e^{-2y}\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=2e^{-2y}$，

则 $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$

(2) 因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以随机变量 $X,Y$ 相互独立.

(3) $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+2Y\leqslant z)=\iint\limits_{x+2y\leqslant z}f(x,y)dxdy$，

当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z>0$ 时，

$$F_Z(z)=\iint\limits_{x+2y\leqslant z}f(x,y)dxdy=\int_0^z e^{-x}dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}2e^{-2y}dy$$

$$=\int_0^z e^{-x}dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}e^{-2y}d(2y)=\int_0^z e^{-x}(1-e^{x-z})dx=1-e^{-z}-ze^{-z},$$

则 $F_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0,\end{cases}$ $f_Z(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$

**18.【解】**(1) $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{2y}^1(2-x-y)dx=\frac{7}{24}$.

(2) $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)dxdy$.

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $0\leqslant z<1$ 时，$F_Z(z)=\int_0^z dy\int_0^{z-y}(2-x-y)dx=z^2-\frac{z^3}{3}$；

当 $1\leqslant z<2$ 时，$F_Z(z)=1-\int_{z-1}^1 dy\int_{z-y}^1(2-x-y)dx=1-\frac{(2-z)^3}{3}$；

当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=1$.

因此 $f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0\leqslant z<1,\\ (2-z)^2, & 1\leqslant z<2.\\ 0, & 其他.\end{cases}$

**19.【解】**因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y\sim U[-\pi,\pi]$，所以 $X,Y$ 的密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ (-\infty<x<+\infty),\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & -\pi\leqslant y\leqslant\pi,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

又 $X,Y$ 相互独立，所以 $X,Y$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & -\infty<x<+\infty,-\pi\leqslant y\leqslant\pi,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P(X+Y\leqslant z)=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\pi}^{\pi}dy\int_{-\infty}^{z-y}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dy\int_{-\infty}^{z-y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}d\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\frac{z-y-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{\sigma}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}\left(\frac{z-y-\mu}{\sigma}\right)=\frac{\sigma}{2\pi}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}\Phi(u)\mathrm{d}u$$

则 $f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right]$.

**20.【解】**(1) 因为 $X\sim U(0,1)$,所以 $f_X(x)=\begin{cases}1,0<x<1,\\0,其他,\end{cases}$

又在 $X=x(0<x<1)$ 下,$Y\sim U(0,x)$,所以 $f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x,\\0, & 其他,\end{cases}$ 故

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\0, & 其他.\end{cases}$$

(2)$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$,当 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 1$ 时,$f_Y(y)=0$;

当 $0<y<1$ 时,$f_Y(y)=\int_y^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\frac{1}{y}$,故 $f_Y(y)=\begin{cases}\ln\frac{1}{y}, & 0<y<1,\\0, & 其他.\end{cases}$

**21.【解】**令 $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+X\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3Y\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$,整理得

$$(k_1+Yk_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+Xk_2\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,所以有

$$\begin{cases}k_1+Yk_3=0,\\k_1+k_2=0,\\Xk_2=0.\end{cases}$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+X\boldsymbol{\alpha}_3,Y\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关的充分必要条件是上述方程组有非零解,即

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & Y\\1 & 1 & 0\\0 & X & 0\end{vmatrix}=0,从而 XY=0,$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+X\boldsymbol{\alpha}_3,Y\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关的充分必要条件是 $XY=0$.

注意到 $X,Y$ 相互独立,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+X\boldsymbol{\alpha}_3,Y\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关的概率为

$$P(XY=0)=P\left(X=0,Y=-\frac{1}{2}\right)+P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=0)$$

$$=P(X=0)P\left(Y=-\frac{1}{2}\right)+P(X=1)P(Y=0)+P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{2}.$$

**22.【解】**$P(\max\{X,Y\}\neq 0)=1-P(\max\{X,Y\}=0)=1-P(X=0,Y=0)$

$$=1-P(X=0)P(Y=0)=1-\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-2}=1-\mathrm{e}^{-3},$$

$P(\min\{X,Y\}\neq 0)=1-P(\min\{X,Y\}=0)$,

令 $A=\{X=0\},B=\{Y=0\}$,则 $(\min\{X,Y\}=0)=A+B$,

于是 $P(\min\{X,Y\}=0)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$=\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}^{-2}=\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-3},$$

故 $P(\min\{X,Y\}\neq 0)=1-e^{-1}-e^{-2}+e^{-3}$.

**23.【解】**$F_U(u)=P(U\leqslant u)=P(X+2Y\leqslant u)$

$$=P(X=1)P(X+2Y\leqslant u\mid X=1)+P(X=2)P(X+2Y\leqslant u\mid X=2)$$

$$=0.5P\left(Y\leqslant\frac{u-1}{2}\right)+0.5P\left(Y\leqslant\frac{u-2}{2}\right).$$

当 $u\leqslant 1$ 时，$F_U(u)=0$；

当 $1<u\leqslant 2$ 时，$F_U(u)=0.5\int_0^{\frac{u-1}{2}}4e^{-4x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-e^{2-2u})$；

当 $u>2$ 时，$F_U(u)=0.5\int_0^{\frac{u-1}{2}}4e^{-4x}\mathrm{d}x+0.5\int_0^{\frac{u-2}{2}}4e^{-4x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-e^{2-2u})+\frac{1}{2}(1-e^{4-2u})$.

故 $f_U(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 1,\\ e^{2-2u}, & 1<u\leqslant 2,\\ e^{2-2u}+e^{4-2u}, & u>2.\end{cases}$

**24.【解】**(1) 随机变量$(X,Y)$的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1,(x,y)\in D,\\0,(x,y)\notin D,\end{cases}$

$U$ 的分布函数为 $F(x)=P(U\leqslant x)$，

当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；

当 $x\geqslant 2$ 时，$F(x)=1$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，$F(x)=P(X+Z\leqslant x)=P(Z=0,X\leqslant x)$

$$=P(X<Y,X\leqslant x)=\int_0^x\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y=\int_0^x(1-x)\mathrm{d}x=x-\frac{x^2}{2};$$

当 $1\leqslant x<2$ 时，$F(x)=P(Z=0,X\leqslant x)+P(Z=1,X\leqslant x-1)$

$$=P(X<Y,X\leqslant 1)+P(X\geqslant Y,X\leqslant x-1)$$

$$=\frac{1}{2}+\int_0^{x-1}\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)^2,$$

故 $U$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x-\frac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x-1)^2, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$

(2) 设$(X,Z)$的分布函数为 $F(x,z)$，

$$F\left(\frac{1}{2},0\right)=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Z\leqslant 0\right\}=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Z=0\right\}$$

$$=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},X<Y\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{8};$$

$F_X\left(\frac{1}{2}\right)=P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$，　$F_Z(0)=P\{Z\leqslant 0\}=P\{Z=0\}=P\{X<Y\}=\frac{1}{2}$，

因为 $F\left(\frac{1}{2},0\right)\neq F_X\left(\frac{1}{2}\right)F_Z(0)$，所以 $X,Z$ 不相互独立.

# 四、随机变量的数字特征

## ◇ 填空题

1.【解】$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=4$， $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=9$，

$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}=2$，

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=4+9+4=17$，

则 $E(X+Y)^2=D(X+Y)+[E(X+Y)]^2=17+1=18$.

2.【解】$E(X)=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 6x^2(1-x)\mathrm{d}x=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$，

$E(X^2)=\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 6x^3(1-x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-\frac{6}{5}=\frac{3}{10}$，

则 $D(X)=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$，于是

$$P\{|X-E(X)|<2D(X)\}=P\left\{\left|X-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{10}\right\}=P\left(\frac{2}{5}<X<\frac{3}{5}\right)$$

$$=\int_{\frac{2}{5}}^{\frac{3}{5}}6x(1-x)\mathrm{d}x=\frac{37}{125}.$$

3.【解】随机变量 $X$ 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0.3 & 0.5 & 0.2\end{pmatrix}$，

$E(XY)=E[X(X^2-1)]=E(X^3-X)=E(X^3)-E(X)$，

因为 $E(X^3)=-8\times0.3+1\times0.5+8\times0.2=-0.3$，

$E(X)=-2\times0.3+1\times0.5+2\times0.2=0.3$，所以 $E(XY)=-0.6$.

4.【解】因为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2x-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}$，所以 $X\sim N\left(1,\frac{1}{2}\right)$，于是 $E(X)=1$，

$D(X)=\frac{1}{2}$.

5.【解】因为 $X\sim P(\lambda)$，所以 $E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$，故 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda$.
由 $E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2)=E(X^2)-3E(X)+2=\lambda^2-2\lambda+2=1$ 得 $\lambda=1$.

6.【解】$X$ 的分布律为 $P(X=k)=0.2\times0.8^{k-1}$，$k=1,2,\cdots$.

因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^k\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，$|x|<1$，

所以 $E(X)=0.2\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\times0.8^{k-1}=0.2\times\frac{1}{(1-0.8)^2}=5$.

## ◇ 选择题

7.【解】设正面出现的概率为 $p$，则 $X\sim B(n,p)$， $Y=n-X\sim B(n,1-p)$，

$E(X)=np$， $D(X)=np(1-p)$， $E(Y)=n(1-p)$， $D(Y)=np(1-p)$，

$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,n-X)=\mathrm{Cov}(X,n)-\mathrm{Cov}(X,X)$，

因为 $\mathrm{Cov}(X,n)=E(nX)-E(n)E(X)=nE(X)-nE(X)=0$，

$\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)=np(1-p)$，所以 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-1$，选(A).

*8*.【解】当 $P\{Y=aX+b\}=1(a>0)$ 时，$\rho_{XY}=1$；当 $P\{Y=aX+b\}=1(a<0)$ 时，$\rho_{XY}=-1$.

因为 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$，即 $U+V=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $U=-V+\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\rho_{UV}=-1$，选(A).

*9*.【解】若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则(B)，(C)是正确的，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 两两不相关，则(A)是正确的，选(D).

*10*.【解】因为 $(X,Y)$ 服从二维正态分布，所以 $aX+bY$ 服从正态分布，

$E(aX+bY)=a+2b$，

$D(aX+bY)=a^2+4b^2+2ab\mathrm{Cov}(X,Y)=a^2+4b^2-2ab$，

即 $aX+bY\sim N(a+2b,a^2+4b^2-2ab)$，

由 $P(aX+bY\leqslant 1)=0.5$ 得 $a+2b=1$，所以选(D).

## ◇ 解答题

*11*.【解】(1) 设 $X$ 为第一种情况开门次数，$X$ 的可能取值为 $1,2,\cdots,n$.

且 $P(X=k)=\dfrac{1}{n},k=1,2,\cdots,n$.

注意：设第 3 次才能打开门，则

$P(X=3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-2}{n-1}\times\dfrac{1}{n-2}=\dfrac{1}{n}$

$E(X)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}=\dfrac{n+1}{2},\quad E(X^2)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{n}=\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$，

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{n^2-1}{12}$.

(2) 设 $Y$ 为开门次数，$Y$ 的可能取值为 $1,2,\cdots,n,\cdots$，

且 $P(Y=k)=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}\dfrac{1}{n},k=1,2,\cdots$.

$E(Y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\times\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^k\right)'\Big|_{x=1-\frac{1}{n}}=n$，

$E(Y^2)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}\dfrac{1}{n}=2n^2-n,\quad D(Y)=n^2-n$.

*12*.【解】用 $X$ 表示 5 天中发生故障的天数，则 $X\sim B\left(5,\dfrac{1}{5}\right)$，

以 $Y$ 表示获利，则 $Y=\begin{cases}10, & X=0,\\ 5, & X=1,\\ 0, & X=2,\\ -2, & X\geqslant 3,\end{cases}$

则 $E(Y)=10P(X=0)+5P(X=1)-2[P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)]$
$=10\times 0.328+5\times 0.410-2\times 0.057=5.216$(万元).

**13.【解】**$E(T)=-1\times P(X<10)+20\times P(10\leqslant X\leqslant 12)-5P(X>12)$

$$=-\Phi(10-\mu)+20[\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)]-5[1-\Phi(12-\mu)]$$
$$=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5,$$

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}E(T)=21\Phi'(10-\mu)-25\Phi'(12-\mu)=0$,即 $\frac{21}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}-\frac{25}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}=0$,

解得 $\mu=11-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}\approx 10.9$,所以当 $\mu\approx 10.9$ 时,销售一个零件的平均利润最大.

**14.【解】**令 $U=X-Y$,因为 $X,Y$ 相互独立,且 $X\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$Y\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$,

所以 $U\sim N(0,1)\Rightarrow f_U(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}},-\infty<u<+\infty$.

$$\Rightarrow E(Z)=E|U|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$E(Z^2)=E(U^2)=D(U)+[E(U)]^2=1\Rightarrow D(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=1-\frac{2}{\pi}$.

**15.【解】**(1) 因为 $X$ 服从参数为 2 的指数分布,所以 $X$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

$(U,V)$ 的可能取值为 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$.

$P(U=0,V=0)=P(X\leqslant 1,X\leqslant 2)=P(X\leqslant 1)=F(1)=1-\mathrm{e}^{-2}$;

$P(U=0,V=1)=P(X\leqslant 1,X>2)=0$;

$P(U=1,V=1)=P(X>1,X>2)=P(X>2)=1-F(2)=\mathrm{e}^{-4}$;

$P(U=1,V=0)=P(X>1,X\leqslant 2)=\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}$.

$(U,V)$ 的联合分布律为

| $U$ \ $V$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $1-\mathrm{e}^{-2}$ | 0 |
| 1 | $\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}$ | $\mathrm{e}^{-4}$ |

(2) 由 $U\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-\mathrm{e}^{-2} & \mathrm{e}^{-2}\end{pmatrix}$,$V\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-\mathrm{e}^{-4} & \mathrm{e}^{-4}\end{pmatrix}$ 得

$E(U)=\mathrm{e}^{-2}$,　$E(V)=\mathrm{e}^{-4}$,　$E(UV)=\mathrm{e}^{-4}$,　$E(U^2)=\mathrm{e}^{-2}$,　$E(V^2)=\mathrm{e}^{-4}$,则

$D(U)=E(U^2)-[E(U)]^2=\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}$,　$D(V)=E(V^2)-[E(V)]^2=\mathrm{e}^{-4}-\mathrm{e}^{-8}$,

$\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\mathrm{e}^{-4}-\mathrm{e}^{-6}$,

于是 $\rho_{UV}=\frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\cdot\sqrt{D(V)}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^2+1}}$.

*16*.【解】利用随机变量分解法.

设随机变量 $X$ 表示停靠的总次数,令 $X_i=\begin{cases}1,第 i 楼电梯停,\\0,第 i 楼电梯不停\end{cases}(i=2,3,\cdots,11)$,

则 $X=X_2+X_3+\cdots+X_{11}$, $E(X)=\sum\limits_{i=2}^{11}E(X_i)$.

$P(X_i=0)=\left(1-\dfrac{1}{10}\right)^{20}=\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$, $P(X_i=1)=1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$,

因为 $E(X_i)=1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}$,所以 $E(X)=\sum\limits_{i=2}^{11}E(X_i)=10\left[1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^{20}\right]$.

*17*.【解】(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0$,

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(3)=2.$$

(2) 因为 $\mathrm{Cov}(X,|X|)=E[X|X|]-E(X)\cdot E|X|=E[X|X|]$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)\mathrm{d}x=0,$$

所以 $X,|X|$ 不相关.

(3) 对任意的 $a>0$, $P\{X\leqslant a,|X|\leqslant a\}=P\{|X|\leqslant a\}$,

而 $0<P(X\leqslant a)<1$,所以 $P\{X\leqslant a,|X|\leqslant a\}>P\{|X|\leqslant a\}\cdot P(X\leqslant a)$,

故 $|X|,X$ 不相互独立.

*18*.【解】(1) $E(Z)=\dfrac{1}{3}E(X)+\dfrac{1}{2}E(Y)=\dfrac{1}{3}$,

$D(Z)=\dfrac{1}{9}D(X)+\dfrac{1}{4}D(Y)+\dfrac{1}{3}\mathrm{Cov}(X,Y)=5+\dfrac{1}{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=3$.

(2) $\mathrm{Cov}(X,Z)=\dfrac{1}{3}D(X)+\dfrac{1}{2}\mathrm{Cov}(X,Y)=3+\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times12=0\Rightarrow\rho_{XZ}=0$.

(3) 因为 $(X,Y)$ 服从二维正态分布,所以 $Z$ 服从正态分布,同时 $X$ 也服从正态分布,又 $X$, $Z$ 不相关,所以 $X,Z$ 相互独立.

*19*.【解】(1) $P(X\leqslant Y)=\dfrac{1}{4}$, $P(X>2Y)=\dfrac{1}{2}$, $P(Y<X\leqslant 2Y)=\dfrac{1}{4}$,

$(U,V)$ 的可能取值为 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$.

$P(U=0,V=1)=P(X\leqslant Y,X>2Y)=0$;

$P(U=1,V=0)=P(X>Y,X\leqslant 2Y)=P(Y<X\leqslant 2Y)=\dfrac{1}{4}$;

$P(U=0,V=0)=P(X\leqslant Y,X\leqslant 2Y)=P(X\leqslant Y)=\dfrac{1}{4}$;

$P(U=1,V=1)=1-\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$.

$(U,V)$ 的联合分布律为

| $U$ \ $V$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |

(2) 由(1)得 $UV\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$U\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$，$V\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则

$$E(U)=\frac{3}{4},\quad D(U)=\frac{3}{16},\quad E(V)=\frac{1}{2},\quad D(V)=\frac{1}{4},\quad E(UV)=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{1}{8},\quad \rho_{UV}=\frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)D(V)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**20.【解】**(1) 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_{m+n}$ 相互独立，所以

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=n\sigma^2,\quad D(Z)=\sum_{k=1}^{n}D(X_{m+k})=n\sigma^2$$

(2)
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y,Z)&=\mathrm{Cov}[(X_1+\cdots+X_m)+(X_{m+1}+\cdots+X_n),X_{m+1}+\cdots+X_{m+n}]\\&=\mathrm{Cov}(X_1+\cdots+X_m,X_{m+1}+\cdots+X_{m+n})+\mathrm{Cov}(X_{m+1}+\cdots+X_n,X_{m+1}+\cdots+X_{m+n})\\&=D(X_{m+1}+\cdots+X_n)+\mathrm{Cov}(X_{m+1}+\cdots+X_n,X_{n+1}+\cdots+X_{m+n})\\&=(n-m)\sigma^2,\end{aligned}$$

则 $\rho_{YZ}=\dfrac{\mathrm{Cov}(Y,Z)}{\sqrt{D(Y)}\cdot\sqrt{D(Z)}}=\dfrac{n-m}{n}$.

**21.【解】**(1)
$$\begin{aligned}D(Y_i)&=\mathrm{Cov}(Y_i,Y_i)=D(X_i)+D(\overline{X})-2\mathrm{Cov}(X_i,\overline{X})\\&=1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n}=1-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=\mathrm{Cov}(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})=D(\overline{X})-\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})-\mathrm{Cov}(X_n,\overline{X})=-\dfrac{1}{n}$.

(3) $Y_1+Y_n=X_1+X_n-\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\left(1-\dfrac{2}{n}\right)X_1-\dfrac{2}{n}X_2-\cdots-\dfrac{2}{n}X_{n-1}+\left(1-\dfrac{2}{n}\right)X_n$，

因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立且都服从正态分布，所以 $Y_1+Y_n$ 服从正态分布，

$E(Y_1+Y_n)=0\Rightarrow P(Y_1+Y_n\leqslant 0)=\dfrac{1}{2}$.

**22.【解】**因为 $X,Y$ 都服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布，所以 $U=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，$V=\dfrac{Y-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，且 $U,V$ 相互独立，则 $X=\sigma U+\mu$，$Y=\sigma V+\mu$，故 $Z=\max\{X,Y\}=\sigma\max\{U,V\}+\mu$，由 $U,V$ 相互独立得 $(U,V)$ 的联合密度函数为

$$f(u,v)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\ (-\infty<u<+\infty,-\infty<v<+\infty).$$

于是 $E(Z)=\sigma E[\max\{U,V\}]+\mu$.

而 $E[\max\{U,V\}]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}\max\{u,v\}f(u,v)\mathrm{d}v$

$$=2\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{+\infty}r^2\cos\theta\times\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}dr=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta\int_0^{+\infty}r^2e^{-\frac{r^2}{2}}dr$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{+\infty}r^2e^{-\frac{r^2}{2}}dr\xlongequal{\frac{r^2}{2}=t}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{2}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

故 $E(Z)=\sigma E(\max\{U,V\})+\mu=\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}+\mu$.

23.【解】$F_U(u)=P(U\leqslant u)=P(\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\leqslant u)$

$$=P(X_1\leqslant u,X_2\leqslant u,\cdots,X_n\leqslant u)$$

$$=\begin{cases}\left(\frac{u}{a}\right)^n, & 0\leqslant u\leqslant a,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_U(u)=\begin{cases}\frac{n}{a^n}u^{n-1}, & 0\leqslant u\leqslant a,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$E(U)=\int_{-\infty}^{+\infty}uf_U(u)du=\int_0^a u\times\frac{n}{a^n}u^{n-1}du=\frac{na}{n+1},$$

$$E(U^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}u^2f_U(u)du=\int_0^a u^2\times\frac{n}{a^n}u^{n-1}du=\frac{na^2}{n+2},$$

于是 $D(U)=\frac{na^2}{(n+1)^2(n+2)}$.

24.【解】令 $A_i=\{$第 $i$ 个人收到自己的电话资费单$\}$，$i=1,2,\cdots,n$，

$X_i=\begin{cases}1, A_i\text{ 发生},\\ 0, A_i\text{ 不发生},\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,n$，则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$.

$$P(X_i=0)=\frac{n-1}{n},\quad P(X_i=1)=\frac{1}{n},$$

$$\Rightarrow E(X_i)=E(X_i^2)=\frac{1}{n},\quad D(X_i)=\frac{n-1}{n^2}(i=1,2,\cdots,n)$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=1;$$

当 $i\neq j$ 时，$P(X_i=1,X_j=1)=P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j\mid A_i)=\frac{1}{n(n-1)}$,

$$\Rightarrow X_iX_j\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-\frac{1}{n(n-1)} & \frac{1}{n(n-1)}\end{pmatrix}\Rightarrow E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)}(i\neq j),$$

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2(n-1)}(i\neq j),$$

$$\Rightarrow D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\frac{n-1}{n}+2C_n^2\times\frac{1}{n^2(n-1)}=1.$$

# 五、大数定律和中心极限定理

## ◇ 填空题

1.【解】$E(X)=0$，　$D(X)=3$，　$E(Y)=0$，　$D(Y)=\frac{12}{5}$，

则 $E(X-Y)=0$，　$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{27}{5}$，所以

$$P(|X-Y|<3)=P(|(X-Y)-E(X-Y)|<3)\geqslant 1-\frac{D(X-Y)}{9}=\frac{2}{5}.$$

2.【解】(1) 设 $X_i$ 为第 $i$ 次的点数($i=1,2,3,4,5,6$)，则 $X=\sum\limits_{i=1}^{6}X_i$，其中

$$X_i\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}(i=1,2,3,4,5,6),$$

$E(X_i)=\sum\limits_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\times k=\frac{7}{2}$，　$E(X_i^2)=\sum\limits_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\times k^2=\frac{91}{6}$，

$D(X_i)=\frac{35}{12}$，$i=1,2,3,4,5,6$.

则 $E(X)=6\times\frac{7}{2}=21$，　$D(X)=6\times\frac{35}{12}=\frac{35}{2}$，由切比雪夫不等式，有

$$P(14<X<28)=P(|X-E(X)|<7)\geqslant 1-\frac{D(X)}{7^2}=\frac{9}{14}.$$

(2) 由 $X_i\sim P(i)$ 得 $E(X_i)=i$，$D(X_i)=i(i=1,2,\cdots,10)$，

$D(Y)=\frac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{10}D(X_i)=\frac{1+2+\cdots+10}{100}=\frac{11}{20}$，

则 $P(4<Y<7)=P\left(-\frac{3}{2}<Y-E(Y)<\frac{3}{2}\right)$

$$=P\left(|Y-E(Y)|<\frac{3}{2}\right)\geqslant 1-\frac{D(Y)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{34}{45}.$$

3.【解】令 $U=\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$，则 $E(U)=0$，　$D(U)=100\times\frac{4}{12}=\frac{100}{3}$，

则 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\leqslant\frac{10}{\sqrt{3}}\right)=P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i}{\frac{10}{\sqrt{3}}}\leqslant 1\right)\approx\Phi(1)=0.841\ 3.$

## ◇ 解答题

4.【解】令 $U=X+Y$，则 $E(U)=E(X)+E(Y)=3$，

$D(U)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=4+9+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2\times 3=7$,

于是 $P\{|X+Y-3|\geqslant 10\}=P\{|U-E(U)|\geqslant 10\}\leqslant\frac{7}{100}$.

5.【解】设第 $i$ 只电阻使用寿命为 $X_i$,

则 $X_i\sim E(0.01), E(X_i)=100, D(X_i)=100^2(i=1,2,\cdots,36)$.

$X=\sum_{i=1}^{36}X_i$,

$P(X>4\ 200)=1-P(X\leqslant 4\ 200)=1-P\left(\frac{X-3\ 600}{\sqrt{36}\times 100}\leqslant\frac{4\ 200-3\ 600}{\sqrt{36}\times 100}\right)$

$\approx 1-\Phi(1)=0.158\ 7$.

6.【证明】因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布,所以 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 也独立同分布且

$E(X_i^2)=\alpha_2,\quad D(X_i^2)=\alpha_4-\alpha_2^2$,当 $n$ 充分大时,由中心极限定理得

$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\alpha_2}{\sqrt{n(\alpha_4-\alpha_2^2)}}=\frac{Z_n-\alpha_2}{\sqrt{\frac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}}}$ 近似服从标准正态分布,故 $Z_n$ 近似服从正态分布,两个参数为

$\mu=\alpha_2,\quad\sigma^2=\frac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}$.

7.【解】令 $X_i=\begin{cases}1,\text{第 } i \text{ 台分机使用外线},\\0,\text{第 } i \text{ 台分机不使用外线}\end{cases}(i=1,2,\cdots,300)$,

则 $X_i\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\0.94 & 0.06\end{pmatrix}(i=1,2,\cdots,300)$.

令 $X$ 表示需要使用外线的分机数,则 $X=\sum_{i=1}^{300}X_i$,

$E(X)=300\times 0.06=18,\quad D(X)=300\times 0.056\ 4=16.92$.

设至少需要安装 $n$ 条外线,由题意及中心极限定理得

$$P(0\leqslant X\leqslant n)\approx\Phi\left(\frac{n-18}{\sqrt{16.92}}\right)-\Phi\left(\frac{0-18}{\sqrt{16.92}}\right)\geqslant 0.95,$$

解得 $\frac{n-18}{\sqrt{16.92}}\geqslant 1.645, n\geqslant 24.8$,所以至少要安装25条外线才能保证每台分机需要使用外线时不需要等待的概率不低于0.95.

# 六、数理统计的基本概念

## ◆ 填空题

1.【解】由 $X_1+X_2+\cdots+X_9\sim N(0,81)$,得 $\frac{1}{9}(X_1+X_2+\cdots+X_9)\sim N(0,1)$. 因为 $Y_1,\cdots,Y_9$ 相互独立且服从 $N(0,9)$ 分布,所以 $(Y_1/3)^2+(Y_2/3)^2+\cdots+(Y_9/3)^2\sim\chi^2(9)$,

即$\frac{1}{9}(Y_1^2+\cdots+Y_9^2)\sim\chi^2(9)$. 因此$U=\dfrac{(X_1+\cdots+X_9)/9}{\sqrt{\frac{1}{9}(Y_1^2+\cdots+Y_9^2)\Big/9}}\sim t(9)$.

2.【解】$\frac{1}{8}X_1^2\sim\chi^2(1)$， $\frac{1}{4}(Y_1^2+Y_2^2)\sim\chi^2(2)$， $\dfrac{\frac{1}{8}X_1^2\Big/1}{\frac{1}{4}(Y_1^2+Y_2^2)\Big/2}=\dfrac{X_1^2}{Y_1^2+Y_2^2}\sim F(1,2)$.

3.【解】因为$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，所以

$$D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=2(n-1)\Rightarrow\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2)=2(n-1)\Rightarrow D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

4.【解】$\dfrac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$， $\dfrac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，

且$\dfrac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m-1)$ 与$\dfrac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 相互独立，

则$\dfrac{\dfrac{(m-1)S_1^2}{\sigma^2}\Big/(m-1)}{\dfrac{(n-1)S_2^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(m-1,n-1)$.

## ◇ 选择题

5.【解】$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$，$\dfrac{nS_2^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\Bigg/\sqrt{\dfrac{\frac{nS_2^2}{\sigma^2}}{n-1}}\sim t(n-1)$，即$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_2}{\sqrt{n-1}}}\sim t(n-1)$，选(D).

6.【解】由 $X\sim t(n)$，得 $X=\dfrac{U}{\sqrt{V/n}}$，其中$U\sim N(0,1)$，$V\sim\chi^2(n)$，且$U$，$V$ 相互独立，于是

$X^2=\dfrac{U^2/1}{V/n}\sim F(1,n)$，选(A).

7.【解】由$\dfrac{\overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$ 得$\dfrac{n\overline{X}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 且$\dfrac{n\overline{X}^2}{\sigma^2}$ 与$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 相互独立，

于是$\dfrac{\dfrac{n\overline{X}^2}{\sigma^2}/1}{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}=\dfrac{n\overline{X}^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$，应选(A).

## ◆ 解答题

8.【证明】$Y_1 \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{6}\right)$， $Y_2 \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{3}\right)$， $\frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$，

则 $Y_1 - Y_2 \sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{2}\right)$，$\frac{Y_1-Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \sim N(0,1)$，且$\frac{Y_1-Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}$与$\frac{2S^2}{\sigma^2}$相互独立，

由 $t$ 分布的定义得$\frac{Y_1-Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\Bigg/\sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2}/2} \sim t(2)$，即 $Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S} \sim t(2)$.

9.【解】显然 $U=\sum\limits_{i=1}^{m}X_i \sim N(0,m)$，$V=\sum\limits_{i=m+1}^{m+n}X_i \sim N(0,n)$，且 $U,V$ 相互独立，

于是$\frac{U}{\sqrt{m}} \sim N(0,1)$，$\frac{V}{\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，故

$$\left(\frac{U}{\sqrt{m}}\right)^2+\left(\frac{V}{\sqrt{n}}\right)^2=\frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m}X_i\right)^2+\frac{1}{n}\left(\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i\right)^2 \sim \chi^2(2).$$

10.【解】$\overline{X} \sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，$\frac{\overline{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{\sigma} \sim N(0,1)$，又$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，且$\frac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{\sigma}$与

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$相互独立，则$\frac{\frac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}} \sim t(n-1)$，即$\frac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$.

11.【解】(1) 由 $Y_i=X_i-\overline{X}=-\frac{1}{n}\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}X_j+\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i$，

得 $D(Y_i)=\left(-\frac{1}{n}\right)^2\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}D(X_j)+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2D(X_i)=1-\frac{1}{n}$.

(2) 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 相互独立，

所以 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=\mathrm{Cov}(X_1-\overline{X},X_n-\overline{X})$

$=\mathrm{Cov}(X_1,X_n)-\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})-\mathrm{Cov}(\overline{X},X_n)+D(\overline{X})$，

由 $\mathrm{Cov}(X_1,\overline{X})=\mathrm{Cov}(\overline{X},X_n)=\frac{D(X_n)}{n}$，$D(\overline{X})=\frac{1}{n}\Rightarrow \mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=-\frac{1}{n}$.

12.【解】因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，所以有 $E(X_1T)=E(X_2T)=\cdots=E(X_nT)$

$\Rightarrow E(X_1T)=\frac{1}{n}E[(X_1+X_2+\cdots+X_n)T]=E(\overline{X}T)=(n-1)E(\overline{X}S^2)$

$=(n-1)E(\overline{X})E(S^2)=(n-1)\mu\sigma^2$.

13.【解】$E(Y)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E\mid X_i-\mu\mid=E\mid X-\mu\mid$，$D(Y)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D\mid X_i-\mu\mid=\frac{1}{n}D\mid X-\mu\mid$，

而 $E\mid X-\mu\mid=\int_{-\infty}^{+\infty}\mid x-\mu\mid\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

$$=\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{x-\mu}{\sigma}\right|\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}d\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=2\sigma\int_0^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}},$$

$$E|X-\mu|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu|^2\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=2\sigma^2\int_0^{+\infty}t^2\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2,$$

于是 $E(Y)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$，　$D(Y)=\frac{1}{n}\left(\sigma^2-\frac{2\sigma^2}{\pi}\right)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\sigma^2$.

**14.【解】**令 $Y_i=X_i+X_{n+i}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为正态总体 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=2\overline{X}$，$U=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2=(n-1)\times\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2=(n-1)S^2$，

其中 $S^2$ 为样本 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 的方差，而 $E(S^2)=2\sigma^2$，所以统计量 $U=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望为 $E(U)=E[(n-1)S^2]=2(n-1)\sigma^2$.

**15.【解】**由 $\overline{X}_1,\overline{X}_2,S_1^2,S_2^2$ 相互独立，可知 $a,b$ 与 $\overline{X}_1,\overline{X}_2$ 相互独立，显然 $a+b=1$.
$E(\overline{X}_1)=\mu,E(\overline{X}_2)=\mu\Rightarrow E(U)=\mu[E(a)+E(b)]=\mu E(a+b)=\mu E(1)=\mu$.

**16.【解】**因为 $X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，且它们相互独立，

所以 $X_{n+1}-\overline{X}\sim N\left(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2\right)\Rightarrow\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sim N(0,1)$.

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，又 $X_{n+1}-\overline{X}$ 与 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 相互独立，所以由 $t$ 分布的定义，有

$$\frac{\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sim t(n-1).$$

# 七、参数估计

## ◇ 填空题

**1.【解】**在 $\sigma^2$ 已知的情况下，$\mu$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，其中 $z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$.

于是有 $2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}=0.588\Rightarrow2\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\times1.96=0.588\Rightarrow\sigma^2=0.36$.

## ◇ 选择题

**2.【解】**因为 $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\sigma^2$，所以 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 为 $\sigma^2$ 的无偏估计量，选(A).

## ◇ 解答题

3.【解】$E(X)=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta$,

$\overline{x}=\frac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3)=2$,令 $E(X)=\overline{x}$ 得参数 $\theta$ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$.

$L(\theta)=\theta^2\times[2\theta(1-\theta)]^2\times\theta^2\times(1-2\theta)^4=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$,

$\ln L(\theta)=\ln4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$,

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=0$ 得参数 $\theta$ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

4.【解】(1)$X$ 为离散型随机变量,其分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \theta & \theta & 1-2\theta\end{pmatrix}$,$E(X)=3-3\theta$.

$\overline{x}=\frac{1+1+3+2+1+2+3+3}{8}=2$,令 $3-3\theta=2$ 得 $\theta$ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{3}$.

(2)$L(1,1,3,2,1,2,3,3;\theta)=P(X=1)P(X=1)\cdots P(X=3)=\theta^3\times\theta^2\times(1-2\theta)^3$,

$\ln L(\theta)=5\ln\theta+3\ln(1-2\theta)$,令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\frac{5}{\theta}-\frac{6}{1-2\theta}=0$,

得 $\theta$ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{5}{16}$.

5.【解】总体 $X$ 的密度函数和分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x}{\theta}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 1, & x\geqslant\theta,\end{cases}$$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为总体 $X$ 的样本观察值,似然函数为 $L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}, & 0<x_i<\theta,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

当 $0<x_i<\theta(i=1,2,\cdots,n)$ 时,$L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}>0$,且当 $\theta$ 越小时 $L(\theta)$ 越大,

所以 $\theta$ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$\theta$ 的最大似然估计量为

$\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$. 因为 $\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为

$$F_{\hat{\theta}}(x)=P(\max\{X_1,\cdots,X_n\}\leqslant x)=P(X_1\leqslant x)\cdots P(X_n\leqslant x)=F^n(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^n}{\theta^n}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 1, & x\geqslant\theta,\end{cases}$$

则 $\hat{\theta}$ 的概率密度为 $f_{\hat{\theta}}(x)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$E(\hat{\theta})=\int_0^\theta x\times\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta$,所以 $\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 不是 $\theta$ 的无偏估计量.

6.【解】$L(\theta)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)=\begin{cases}\theta^n a^n(x_1x_2\cdots x_n)^{a-1}\mathrm{e}^{-\theta\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^a}, & x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

$\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\ln a+(a-1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-\theta\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^a$，令$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=\dfrac{n}{\theta}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^a=0$，得参数

$\theta$ 的极大似然估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^a}$.

7.【解】(1)$E(X)=\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$，　$D(X)=\dfrac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}$，

令$\begin{cases}E(X)=\overline{X},\\ D(X)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta_1+\theta_2=2\overline{X},\\ \theta_2-\theta_1=2\sqrt{3B_2},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{\theta}_1=\overline{X}-\sqrt{3B_2},\\ \hat{\theta}_2=\overline{X}+\sqrt{3B_2}.\end{cases}$

(2)$f(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1<x<\theta_2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \theta_1<x_i<\theta_2(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$\ln L(\theta_1,\theta_2)=-n\ln(\theta_2-\theta_1)$，$\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\ln L(\theta_1,\theta_2)=\dfrac{n}{\theta_2-\theta_1}>0$，$\dfrac{\partial}{\partial\theta_2}\ln L(\theta_1,\theta_2)=-\dfrac{n}{\theta_2-\theta_1}<0$，

而$\theta_1\leqslant\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$，$\theta_2\geqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$. 因为$\ln L(\theta_1,\theta_2)$是$\theta_1$的单调增函数，是$\theta_2$的单调减函数，所以$\hat{\theta}_1=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$，　$\hat{\theta}_2=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$.

8.【证明】因为总体 $X$ 在区间$(0,\theta)$内服从均匀分布，所以分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 1, & x\geqslant\theta.\end{cases}$$

令$U=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$，$V=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$，则

$$F_U(u)=P(U\leqslant u)=P(\max\{X_1,X_2,X_3\}\leqslant u)=P(X_1\leqslant u,X_2\leqslant u,X_3\leqslant u)$$

$$=P(X_1\leqslant u)P(X_2\leqslant u)P(X_3\leqslant u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0,\\ \left(\dfrac{u}{\theta}\right)^3, & 0<u<\theta,\\ 1, & u\geqslant\theta,\end{cases}$$

$$F_V(v)=P(V\leqslant v)=P(\min\{X_1,X_2,X_3\}\leqslant v)=1-P(\min\{X_1,X_2,X_3\}>v)$$

$$=1-P(X_1>v,X_2>v,X_3>v)=1-P(X_1>v)P(X_2>v)P(X_3>v)$$

$$=1-[1-P(X_1\leqslant v)][1-P(X_2\leqslant v)][1-P(X_3\leqslant v)]$$

$$=\begin{cases}0, & v\leqslant 0,\\ 1-\left(1-\dfrac{v}{\theta}\right)^3, & 0<v<\theta,\\ 1, & v\geqslant\theta,\end{cases}$$

则 $U,V$ 的密度函数分别为 $f_U(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $f_V(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{\theta}\left(1-\dfrac{x}{\theta}\right)^2, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

因为 $E\left(\dfrac{4}{3}U\right)=\dfrac{4}{3}E(U)=\dfrac{4}{3}\int_0^\theta x\times\dfrac{3x^2}{\theta^3}\mathrm{d}x=\theta$,

$E(4V)=4E(V)=4\int_0^\theta x\times\dfrac{3}{\theta}\left(1-\dfrac{x}{\theta}\right)^2\mathrm{d}x=\theta$,

所以 $\hat{\theta}_1=\dfrac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$ 与 $\hat{\theta}_2=4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$ 都是参数 $\theta$ 的无偏估计量.

$D(U)=E(U^2)-[E(U)]^2=\int_0^\theta x^2\times\dfrac{3x^2}{\theta^3}\mathrm{d}x-\left(\dfrac{3}{4}\theta\right)^2=\dfrac{3\theta^2}{80}$,

$D(V)=E(V^2)-[E(V)]^2=\int_0^\theta x^2\times\dfrac{3}{\theta}\left(1-\dfrac{x}{\theta}\right)^2\mathrm{d}x-\left(\dfrac{1}{4}\theta\right)^2=\dfrac{3\theta^2}{80}$,

$D(\hat{\theta}_1)=D\left(\dfrac{4}{3}U\right)=\dfrac{16}{9}\times\dfrac{3\theta^2}{80}=\dfrac{\theta^2}{15}$, $D(\hat{\theta}_2)=D(4V)=16\times\dfrac{3\theta^2}{80}=\dfrac{3\theta^2}{5}$,

因为 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$,所以 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 更有效.

**9.【证明】** 令 $S_1^2=\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^m(X_i-\overline{X})^2$,$S_2^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n(Y_i-\overline{Y})^2$,因为 $E(S_1^2)=E(S_2^2)=\sigma^2$,

所以 $E\left[\sum\limits_{i=1}^m(X_i-\overline{X})^2\right]=(m-1)\sigma^2$,$E\left[\sum\limits_{i=1}^n(Y_i-\overline{Y})^2\right]=(n-1)\sigma^2$,

于是 $E(S^2)=\dfrac{1}{m+n-2}\left\{E\left[\sum\limits_{i=1}^m(X_i-\overline{X})^2\right]+E\left[\sum\limits_{i=1}^n(Y_i-\overline{Y})^2\right]\right\}=\sigma^2$,

即 $S^2=\dfrac{1}{m+n-2}\left[\sum\limits_{i=1}^m(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{i=1}^n(Y_i-\overline{Y})^2\right]$ 为参数 $\sigma^2$ 的无偏估计量.

# 八、假设检验

## ◇ 填空题

**1.【解】** 在 $\sigma$ 未知的情况下,对参数 $\mu$ 进行假设检验选用统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$,

其中 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$,$\mu_0=0$,使用的统计量为 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$.

## ◇ 选择题

**2.【解】** 选(A).

## ◇ 解答题

**3.【解】**(1)$X$ 的所有可能取值为 0,1,2,3,4,5,其分布律为 $P(X=i)=\dfrac{C_{10}^iC_{90}^{5-i}}{C_{100}^5}$,$i=0,1,2,3,4,5$.

则 $E(X)=\sum_{i=0}^{5} i\times P(X=i)=0.5025$， $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.4410$.

(2) 这批产品被拒绝的概率为 $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=0.417$.

4.【解】令 $H_0:\mu\geqslant 1000, H_1:\mu<1000$. 因为总体方差已知，所以选取统计量 $\dfrac{\overline{X}-1000}{\dfrac{10}{5}}\sim N(0,1)$，

左临界点为 $-z_{0.05}=-1.645$，因为 $\dfrac{995-1000}{\dfrac{10}{5}}=-2.5<-1.645$，所以拒绝 $H_0$，即该批产品不合格.

5.【解】令 $H_0:\mu\leqslant 10, H_1:\mu>10$. 选统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$，

查表得临界点为 $t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(19)=1.7291$，而 $\dfrac{10.2-10}{\dfrac{0.5099}{\sqrt{20}}}=1.754>1.7291$，

拒绝 $H_0$，即可以认为该厂产品防腐剂显著大于 10 毫克.

6.【解】令 $H_0:\sigma^2\leqslant 15^2, H_1:\sigma^2>15^2$. 因为 $\sigma^2$ 已知，所以取统计量 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$，

$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，因为 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{9\times 30.23^2}{225}=36.554>16.919$，所以 $H_0:\sigma^2\leqslant 15^2$ 被拒绝，即机器不能正常工作.

# 致读者

亲爱的读者，感谢一路走来有您相伴，您的信赖、支持和期许是我们工作的动力。图书的质量是图书的生命，好图书源于好质量，为了向读者提供更高质量的图书，世纪文都教育科技集团图书事业部现进行有奖纠错活动，对于首次指正书中错误的读者，我们将奉上精美礼品一份。

有奖纠错 QQ:2238719772

**我们会恪尽职守，不负众望，将图书越办越好。最后，祝您考试成功，学业有成！**

**扫下方二维码，了解更多文都图书信息。**

**文都图书邮购目录**

5420011107

## 汤家凤精品图书系列

搜索一下

1.2022《考研数学复习大全》（数学一至三）

2.2022《考研数学高等数学辅导讲义》

3.2022《考研数学线性代数辅导讲义》

4.2022《概率论与数理统计辅导教程》

**5.2022《考研数学接力题典1800》（数学一至三）**

6.2022《考研数学历年真题全解析》（数学一至三）

7.2022《考研数学强化测试10套卷》（数学一至三）

8.2022《考研数学绝对考场最后八套题》（数学一至三）

**文都图书　名师精品**



上架指导：考研类图书

ISBN 978-7-5022-7484-9

01>

9 787502 274849

定价：78.00元