文都教育®

2022
文都考研数学系列

考研数学
接力题典1800
适用：基础、强化、提高

策划◎文都考研数学命题研究组
编著◎汤家凤

数学一

题目册

依据考研新大纲全新改编

基础篇： 理清基本原理，掌握基本方法
提高篇： 训练计算能力，强化分析应用
超值服务： 全书免费网络答疑

中国原子能出版社

文都教育®

2022
文都考研数学系列

考研数学
接力题典1800

适用：基础、强化、提高

策划◎文都考研数学命题研究组

编著◎汤家凤

数学一

题目册

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学接力题典1800. 数学一 / 汤家凤编著. —北京：中国原子能出版社，2019.1(2020.12重印)
ISBN 978-7-5022-7484-9

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①汤… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第025895号

考研数学接力题典1800. 数学一

出版发行	中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路43号 100048)
责任编辑	王 青
特约编辑	贾俊峰
印 刷	北京铭传印刷有限公司
经 销	全国新华书店
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	34 字 数 850千字
版 次	2019年1月第1版 2020年12月第9次印刷
书 号	ISBN 978-7-5022-7484-9 定 价 78.00元

网址:http://www.aep.com.cn **E-mail:atomep123@126.com**
发行电话:010-68452845

○ 前言

全国硕士研究生招生考试数学试卷分为数学一、数学二、数学三，其中数学一、数学三需要复习高等数学、线性代数、概率统计，数学二需要复习高等数学和线性代数。各试卷题型及分值分布一致，题型分选择题、填空题、解答题(包括计算题、证明题、应用题等)，选择题10题，分值50分，填空题6题，分值30分，解答题70分。由于考研数学复习内容量大面广，需要考查考生对基本概念的理解，基本公式及基本原理的掌握，同时需要考生具有很强的计算能力、综合分析能力、逻辑推理能力、空间想象能力及实际应用能力。要牢固掌握基础知识并用所学知识融会贯通地解决问题，就需要进行系统的练习。那么拥有一本通过分层递进的习题训练达到基础知识的掌握和解题能力的提高，并能帮助考生最终取得优异成绩的习题册就成为广大考研学子的迫切需求。

本书是作者在长达二十多年的考研数学授课、阅卷及对新大纲深入研究的基础上，根据考研数学命题趋势及命题的重点、难点和考生的弱点，从广大考生的实际出发精心编写而成。

本书分基础篇和提高篇，包括高等数学、线性代数和概率统计。基础篇是针对基础复习阶段而设计的，注重对基本概念的理解，基本原理和基本方法的掌握，为复习打下坚实的基础；提高篇适用于复习的强化阶段，注重基本概念的深化、原理的拓展，同时训练计算能力、综合分析能力、证明问题的能力、利用数学知识解决实际问题的能力。本书设计问题的难度和综合性比考试的要求略高，从这些年的使用情况看，达到了非常好的效果。

本书是针对数学一的考生编写，其主要特点有：

1. 每部分的题目都是严格依据最新考纲的规定，无论是题型还是知识点都是依据考研考试的要求设计。基础篇每部分融合了基本概念、基本原理、基本方法的考查点，知识覆盖面广，题型丰富、新颖。通过基础篇的系统练习，考生扎实掌握基础知识，对考纲和考试有清晰的认识，为强化复习打下扎实的基础。

2. 强化复习是取得数学高分非常关键的阶段，不仅强化课程非常关键，习题的设计也是非常重要的一环。本书提高篇的题目侧重对考生的复杂计算能力、逻辑推理能力、综合分析能力和实际应用能力的训练。

3. 本书题目从题型的难度和综合性等方面都体现了整个数学的认知过程，各部分解答力求通俗易懂，方法独到，从最近这些年的使用情况看基本达到了考试对知识点、题型和题目难易度考察的要求。

数学复习不同于其他科目的复习，大家复习时一定要早动手、重基础、循序渐进。基础阶段一定要先建立整个数学的知识框架和体系，然后做一些基础练习（基础知识考查所占分值比重较大，切不可好高骛远）；强化阶段是数学复习脱胎换骨的阶段，通过进一步训练综合题型提高自己的各种数学能力和应试技巧以及对考试的适应能力，这是贯穿本书的设计理念。

本书从初次出版到现在的若干年中，受到全国广大学子的厚爱和同仁的支持，文都考研命题研究组的同仁做了大量有益的工作，在此表示由衷的感谢。

限于本人能力，书中不足之处难免，欢迎全国广大的学子和同仁的不吝指正。

欢迎各位同学在学习之余能关注汤老师微博、微信公众号及一直播，汤老师将在这些平台对书中部分题目作直播讲解。

汤老师微博　　　　汤老师微信公众号

汤老师一直播 ID：186288809

汤家凤

2020 年 12 月于南京

○ 目录(题目册)

上篇　基础篇

高等数学部分 …… 3
一、函数、极限、连续 …… 3
二、导数与微分 …… 13
三、中值定理与一元函数微分学的应用 …… 18
四、不定积分 …… 26
五、定积分及其应用 …… 31
六、向量代数与空间解析几何 …… 40
七、多元函数微分学 …… 43
八、重积分 …… 47
九、曲线积分与曲面积分 …… 52
十、无穷级数 …… 56
十一、常微分方程 …… 63
线性代数部分 …… 68
一、行列式 …… 68
二、矩阵 …… 69
三、向量 …… 73
四、线性方程组 …… 76
五、矩阵的特征值和特征向量 …… 79
六、二次型 …… 83
概率统计部分 …… 86
一、随机事件与概率 …… 86
二、随机变量及其分布 …… 88
三、多维随机变量及其分布 …… 90

四、随机变量的数字特征 …… 94
五、大数定律和中心极限定理 …… 97
六、数理统计的基本概念 …… 97
七、参数估计 …… 99
八、假设检验 …… 101

下篇　提高篇

高等数学部分 …… 105
一、函数、极限、连续 …… 105
二、一元函数微分学 …… 109
三、一元函数积分学 …… 117
四、向量代数与空间解析几何 …… 123
五、多元函数微分学 …… 124
六、重积分 …… 127
七、曲线积分与曲面积分 …… 129
八、无穷级数 …… 131
九、常微分方程 …… 134
线性代数部分 …… 138
一、行列式 …… 138
二、矩阵 …… 139
三、向量 …… 141
四、线性方程组 …… 143
五、矩阵的特征值和特征向量 …… 146
六、二次型 …… 151
概率统计部分 …… 152
一、随机事件与概率 …… 152
二、随机变量及其分布 …… 154
三、多维随机变量及其分布 …… 155
四、随机变量的数字特征 …… 158
五、大数定律和中心极限定理 …… 161
六、数理统计的基本概念 …… 162
七、参数估计 …… 163
八、假设检验 …… 164

[上篇]

基础篇

高等数学部分

一、函数、极限、连续

Ⅰ 入门练习

◇ 填空题

1.(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\ln(1+x)}=$________.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin x)^x-1}{x\ln(1+x)}=$________.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt{1-x^2}-1}=$________.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2\ln(1+x)}=$________.

2.(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{x^2}-1}{x^4}=$________.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2}=$________.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-x}{x^3}=$________.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\arctan x}}{x^3}=$________.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\ln(1+x)}-e^x}{x^2}=$________.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=$________.

3.(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x^2)^{\frac{1}{x\tan x}}=$________.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}+\sin x)^{\frac{2}{x}}=$________.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x}{\ln(1+x)}\right]^{\frac{1}{\sin 2x}}=$________.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}=$________.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=$________.

4. (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}=$________.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=$________.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+2}{x^2-1}=$________.　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^4+2x)}{\ln(x^2+x+1)}=$________.

5. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$________.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-x)=$________.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]=$________.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\arctan x-\dfrac{\pi}{2}x\right)=$________.

6. (1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sin x}=$________.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=$________.

7. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$,则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的________间断点.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\arctan x+b\sin 2x}{\ln(1+x)}, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{1-\sqrt[a]{1-x^2}}{x^2}, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则 $a=$________,$b=$________.

◆ 选择题

9. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{2x}=\lim\limits_{t\to 0}(1-2t)^{\frac{1}{\sin t}}$,则 $a=$(　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$

(C) $-\dfrac{1}{2}$　　(D) $-\dfrac{1}{3}$

10. 下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $\{a_n\}$ 有界,$\{b_n\}$ 收敛,则 $\{a_nb_n\}$ 收敛

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ 存在

(D) 若 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 无界,则 $\{a_nb_n\}$ 也无界

11. 设 $\alpha=\ln\dfrac{x}{\arctan x}$，$\beta=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，当 $x\to 0$ 时，则(　　).

(A)α 是 β 的低阶无穷小

(B)α 是 β 的高阶无穷小

(C)α 是 β 的等价无穷小

(D)α 是 β 的同阶但非等价的无穷小

12. 设 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}\arctan\dfrac{1}{x}$，则(　　).

(A)$f(x)$ 有一个可去间断点，一个跳跃间断点，一个第二类间断点

(B)$f(x)$ 有两个可去间断点，一个第二类间断点

(C)$f(x)$ 有两个跳跃间断点，一个第二类间断点

(D)$f(x)$ 有一个可去间断点，两个第二类间断点

◇ 解答题

13. 用定义法证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=3$.

14. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+ax+b\right)=0$，求 a,b.

15. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x\sin x}{x^2-x\cos 2x+1}$.

16. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

17. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)$.

18. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$.

19. 设 $a_1>0$，$a_{n+1}=\ln(1+a_n)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求此极限.

20. 设 $0<a_1<\pi$，$a_{n+1}=\sin a_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求此极限；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{a_n^2}\right)$.

21. 设 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2-1}$,求 $f(x)$ 的间断点,并进行分类.

22. 设 $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$,求 $f(x)$ 的间断点,并进行分类.

Ⅱ 基础练习

◇ 填空题

1. 设 $f(x)=\sin x$, $f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)=$________, $\varphi(x)$ 的定义域为________.

2. 设 $a>0$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{(b-\cos x)\sqrt{a+x^2}}=1$,则 $a=$________, $b=$________.

3. (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x}{x^3}=$________.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=$________.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2\pi x}{(x-1)\ln x}=$________.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{\cos x+1}{2}\right)^x-1}{x^3}=$________.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^{2x}+\sin 3x)}{x}=$________.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\arctan x}}{x-\sin x}=$________.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\,dt-\ln\sqrt{1+x^2}}{x^4}=$________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1+\arctan x}\right)^{\frac{1}{x^2\arcsin x}}=$________.

10. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+x^2)^{\frac{1}{x^2}}=$________.

11. 设 $a\neq 1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n-an+2}{n(1-a)}\right]^{3n}=$________.

12. (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x\arctan x-\pi x)=$________.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)=$________.

13. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x+6}+x)=$________.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-x^3\sin\dfrac{1}{x}\right)=$________.

15. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\frac{\pi}{2}x=$________.

16. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$________.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\cos x}-\sqrt{1+x}}{x^3}=$________.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^3}=$________.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\arctan x}-e^{\arcsin x}}{x^3}=$________.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x}e^{\frac{1}{x}}-x\right)=$________.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2(\sqrt{1+x}-1)}=$________.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin^2\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin^2\frac{n\pi}{n}}{n}\right)=$________.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{n^2-1^2}}{n^2}+\frac{2+\sqrt{n^2-2^2}}{n^2}+\cdots+\frac{n+\sqrt{n^2-n^2}}{n^2}\right)=$________.

24. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$,则 $a=$________,$b=$________.

25. 设 $x\to 0$ 时,$\ln(\cos ax)\sim -2x^b(a>0)$,则 $a=$________,$b=$________.

26. 设 $f(x)$ 连续,且 $f(0)=0,f'(0)=2$,则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{e^{x^2}-\cos x}=$________.

27. 若 $f(x)=\begin{cases}\frac{\arcsin 2x^2+e^{ax^2}-1}{\ln(1+2x^2)}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

28. 设 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{2}{x\arctan x}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

29. 设 $f(x)$ 连续可导,$f(0)=0$ 且 $f'(0)=b$,若 $F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $A=$________.

30. 设 $f(x)$ 连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x+xf(x)}{x^3}=\frac{2}{3}$,则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+f(x)}{x^2}=$________.

31. 设 $f(x)$ 可导且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$,又 $g(x)=\begin{cases}\frac{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{x-\arctan x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

◇ 选择题

32. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于(　　).

(A)0　　(B)1

(C)$\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

33. 函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}, -\infty<x<+\infty$ 是(　　).

(A) 有界函数　　(B) 单调函数

(C) 周期函数　　(D) 偶函数

34. 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}dt, g(x)=\int_0^x \sin^2(x-t)dt$,则当 $x\to 0$ 时,$g(x)$ 是 $f(x)$ 的(　　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶但非等价的无穷小　　(D) 等价无穷小

35. 当 $x\to 0^+$ 时,下列无穷小中,阶数最高的是(　　).

(A)$\ln(1+x^2)-x^2$　　(B) $\sqrt{1+x^2}+\cos x-2$

(C)$\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt$　　(D)$e^{x^2}-1-x^2$

36. 设当 $x\to 0$ 时,$(x-\sin x)\ln(1+x)$ 是比 $e^{x^n}-1$ 高阶的无穷小,而 $e^{x^n}-1$ 是比 $\frac{1}{x}\int_0^x(1-\cos^2 t)dt$ 高阶的无穷小,则 n 为(　　).

(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)4

37. 设 $\alpha=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}dt, \beta=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$,当 $x\to 0$ 时,α 是 β 的(　　).

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但非等价的无穷小

38. 设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2 dt, g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$,则当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　).

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但非等价的无穷小

39. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$(　　).

(A) 等于 1　　(B) 为 ∞

(C) 不存在但不是 ∞　　(D) 等于 0

40. 当 $x\to 1$ 时,$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为(　　).

(A)2　　(B)0

(C)∞　　(D) 不存在但不是 ∞

41. 设 $f(x)$ 连续且 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 为(　　).

(A) a^2　　(B) $a^2f(a)$　　(C) 0　　(D) 不存在

42. 设 $y=f(x)$ 由 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]=$(　　).

(A) 2　　(B) 1　　(C) -1　　(D) -2

43. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+\mathrm{e}^{tx}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

(A) 连续点　　(B) 第一类间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 不能判断连续性的点

44. 设 $f(x)$ 是不恒为零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$(　　).

(A) 在 $x=0$ 处无极限　　(B) $x=0$ 为其可去间断点

(C) $x=0$ 为其跳跃间断点　　(D) $x=0$ 为其第二类间断点

45. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，则 $f(x)$(　　).

(A) 无间断点　　(B) 有间断点 $x=1$

(C) 有间断点 $x=-1$　　(D) 有间断点 $x=0$

46. 设 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{ax+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)=b$，其中 a,b 为常数，则(　　).

(A) $a=1,b=1$　　(B) $a=1,b=-1$

(C) $a=-1,b=1$　　(D) $a=-1,b=-1$

47. $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的(　　).

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C) 连续点　　(D) 第二类间断点

◇ 解答题

48. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sqrt{4x^2+1}}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+2x-3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\sin x-x^2\cos x}{\cos2x\ln(1-2x)}$.　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[\cos(x-1)]}{1-\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\arctan^2x[2x+\ln(1-2x)]}$.

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}-2}{\sqrt{1+x^4}-1}$.　　(8) $\lim\limits_{x\to0}(\sin3x+\mathrm{e}^{2x})^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}}$.

49. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}$.

50. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\arcsin^2 x}\right)$.

51. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-2x}}{x}$.

52. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

53. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\ln(1+x)}}{\sqrt[3]{1-x^2}-1}$.

54. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{x^2}{2}-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

55. 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\sin\pi x}$.

56. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sqrt{1-x^2}\cos x)}{\sin x\ln(1+\tan x)}$.

57. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^{x^2}-\cos x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x}+x+1}{\sqrt{x^2+x+2}-x}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\tan x$.

58. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\sin 3x}$.

59. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x^2}$.

60. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

61. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2|x|}{x+2}\arctan x$.

62. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(t^2+1)e^{t^2-x^2}\,dt$.

63. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}(x\neq 0)$.

64. 设 $a_n=\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

65. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2}{n^3+n^2+n+1}+\dfrac{2^2}{n^3+n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n^2+n+n}\right)$.

66. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2+n^2}}\right)$.

67. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}$.

68. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$.

69. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

70. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$.

71. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$.

72. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

73. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

74. 设当 $x\to 0$ 时,$f(x)=\int_0^{x^2}\ln(1+t)\mathrm{d}t\sim g(x)=x^a(\mathrm{e}^{bx}-1)$,求 a,b 的值.

75. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

76. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{\arctan^2 x}=A$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

77. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

78. 求$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

79. 设 $f(x)=\int_0^{\tan x}\arctan t^2\mathrm{d}t$,$g(x)=x-\sin x$,当 $x\to 0$ 时,比较这两个无穷小的关系.

80. 设 $f(x)$ 连续,且$\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+\cos x]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$,$f'(0)$ 存在,求 $f'(0)$.

81. 设 $f(x)$ 二阶连续可导,$f''(0)=4$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

82. 求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan\dfrac{\pi}{4}x\right)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$.

83. 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x^2)^{\frac{1}{x(\sin x-\tan x)}}$.

84. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-x}{x(1-\sqrt{\cos x})}$.

85. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3\sin x}$.

86. 求$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

87. 求$\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\ln(1+x)}$.

88. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax-a\sin x}{x(1-\cos ax)}$.

89. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(e^t-1-t)^2\mathrm{d}t}{x^2(x-\arctan x)}$.

90. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$.

91. 确定正数 a,b 的值,使得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=2$.

92. 设 $x-(a+b\cos x)\sin x$ 为 $x\to 0$ 时 x 的 5 阶无穷小,求 a,b 的值.

93. 确定常数 a,b,c 的值,使得当 $x\to 0$ 时,$e^x(1+bx+cx^2)=1+ax+o(x^3)$.

94. 确定常数 a,c,使得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x(e^{t^2}-1)\mathrm{d}t}=c$,其中 c 为非零常数.

95. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=2$,求 a,b 的值.

96. 设$\lim\limits_{x\to 0}(x^{-3}\sin 3x+ax^{-2}+b)=0$,求 a,b 的值.

97. 确定常数 a,b 的值,使得 $\ln(1+2x)+\dfrac{ax}{1+bx}=x+x^2+o(x^2)$.

98. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数,求 a,b 的值.

99. 设 $b>0$,且$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(ae^{-x}+x^2+\sin x)}{\sqrt{bx^2+x\cos x-1}}=2$,求 b 的值.

100. 设 $a_n=\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}}}_{(n\text{ 重})}$,证明:$\{a_n\}$ 收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

101. 设 $a_1=1,a_{n+1}+\sqrt{1-a_n}=0$,证明:数列$\{a_n\}$ 收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

102. 设 $a_1=4,a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,并求此极限.

103. 设 $a_1>0,a_{n+1}=1-e^{-a_n}(n=1,2,\cdots)$,

(1) 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,并求此极限.

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n^2}$.

104. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\dfrac{\ln^n(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

105. 设$f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$,求$f(x)$的间断点及其分类.

106. 讨论函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^n+x^n)}{n}(x>0)$的连续性.

107. 设$f(x)=\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$,求$f(x)$的间断点并判断其类型.

108. 设$f(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x-1}}}\arctan\dfrac{1}{x}$,求$f(x)$的间断点,并判断其类型.

109. 求$f(x)=\dfrac{(x^3+x)}{(x^2-1)\arctan x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-2}}$的间断点并判断其类型.

二、导数与微分

① 入门练习

◇ 填空题

1. (1) 设$f(x)$为连续函数,且$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=3$,则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}=$________.

(2) 设$f(x)$连续,且$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x^2-1}=-1$,则$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(\cosh)-1}{h^2}=$________.

2. (1)$y=\sin^2\dfrac{1+x}{1-x}$,则$y'=$________.　(2)$y=\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}$,则$y'=$________.

(3)$y=\arcsin\sqrt{1-x}$,则$y'=$________.　(4)$y=\arctan^2\sqrt{x}$,则$y'=$________.

3. (1)$y=\ln^2(1+x)+\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$,则$y'=$________.

(2)$y=x^2 2^x$,则$y'=$________.

(3)$y=\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$,则$y'=$________.

4. (1)$y=a^{x^a}$,则$y'=$________.　(2) 设$y=(1+x^2)^{\sin x}$,则$y'=$________.

5. 设$f(x)=\lim\limits_{t\to0}x^2(1+t^2)^{\frac{x}{\sin t^2}}$,则$f'(x)=$________.

6. (1) 设$\mathrm{e}^{x+y}=xy+1$,则$y'(0)=$________.

(2) 设$\sin xy+y-3x=1$,则$y'(0)=$________.

7.(1) 设函数 $y=y(x)$ 由 $e^{xy}=\sin 2x+y^3$ 确定,则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由 $e^{xy}=x^2+y^2+1$ 确定,则 $\frac{dy}{dx}=$ ________.

8.(1) 设 $y=\frac{1}{2x+1}$,则 $y^{(n)}(x)=$ ________.

(2) 设 $y=\ln(1-x-2x^2)$,则 $y^{(n)}(x)=$ ________.

9. 设函数 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\frac{\Delta x}{1+x^2}+o(\Delta x)$,且 $y(0)=4$,则 $y(x)=$ ________.

10.(1) 设 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln(1+t^2),\end{cases}$ 则 $\frac{dy}{dx}=$ ________, $\frac{d^2y}{dx^2}=$ ________.

(2) 设 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\sin 2t,\end{cases}$ 则 $\frac{dy}{dx}=$ ________, $\frac{d^2y}{dx^2}=$ ________.

◇ 解答题

11. 设 $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}+\ln(\tan 2x+1)$,求 $\frac{dy}{dx}$.

12. 设 $y=y(x)$ 由 $2^{xy}+\ln(1+x^2)=y$ 确定,求 $dy\,|_{x=0}$.

13. 求由 $e^{x+y}-\sin xy=e$ 确定的曲线 $y=y(x)$ 在点$(0,1)$处的切线方程.

14. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x<0,\\ \ln(1+2x), & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

15. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

16. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+b, & x<0,\\ \ln(1+ax)+1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 且 $f'(0)$ 存在,求 a,b.

17. 设 $y=\frac{1}{x^2-1}$,求 $y^{(n)}(x)$.

Ⅱ 基础练习

◇ 填空题

1.(1) $y=\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})$,则 $y'=$ ________.

(2) $y=\arcsin^2\sqrt{x}$,则 $y'=$ ________.

2.(1) 设 $y=y(x)$ 由 $e^{xy}=x^2+y+1$ 确定,则 $\frac{dy}{dx}=$ ________.

(2) 设 $y=y(x)$ 由 $\sqrt{x^2+y^2}+\ln y=1+2xy$ 确定,则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________.

3. 设 $y=x^{\sin 2x}$，则 $\mathrm{d}y=$______.

4. 设 $y=y(x)$ 由 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$______.

5. 设 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+y}+\cos(xy)=\sin 3x+2$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$______.

6. 设 $f(x)$ 为连续的偶函数且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(-1+2h)}{h}=$______.

7. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-1}{x-a}=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(a+2h)-f^2(a-h)}{h}=$______.

8. 设 $f(x)=x(x-1)(x+2)\cdots(x-99)(x+100)$，则 $f'(0)=$______.

9. 设 $f(x)$ 为奇函数且 $f'(1)=2$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^3)\right|_{x=-1}=$______.

10. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+2}{x-1}=3$，则曲线 $L:y=f(x)$ 在点 $(-3,f(-3))$ 处的切线方程为______.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x)+a, & x>0,\\ \mathrm{e}^{bx}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 $a=$______，$b=$______.

12. (1) 设 $f(x)$ 连续且 $f(0)=0, f'(0)=\pi$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(2x-t)\mathrm{d}t}{x-\ln(1+x)}=$______.

(2) 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$______.

13. 设 $f(x)$ 连续且 $f(0)=0, f'(0)=4$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}{x^2}=$______.

14. 设 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 在 $x_0=-1$ 处取得增量 $\Delta x=0.05$ 时，函数增量 Δy 的线性部分为 0.15，则 $f'(1)=$______.

15. 设 $f(x)=\dfrac{7x-2}{2x^2+x-1}$，则 $f^{(n)}(0)=$______.

16. (1) 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=t^2,\\ y=\sin 2t\end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$______.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\ln(1+t),\\ \mathrm{e}^{yt}=y+2t+1\end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$______.

◇ 选择题

17. 设 $f(x)$ 可导，且 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$ 在 $x=0$ 处可导，则(　　).

(A) $f(0)=0$　　(B) $f'(0)=0$

(C) $f(0)=f'(0)$　　(D) $f(0)=-f'(0)$

18. 设 $f(x)$ 连续，且 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$(　　).

(A) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)+\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$　　(B) $f(\ln x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(C) $\frac{1}{x}f(\ln x)-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$　　(D) $f(\ln x)-f\left(\frac{1}{x}\right)$

19. 设 $f(x)=|x^3-1|g(x)$，其中 $g(x)$ 连续，则 $g(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的(　　).

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 非充分非必要条件

20. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 为有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在，但不连续

(C) 连续，但不可导　　(D) 可导

21. 设函数 $f(x)$ 在 $|x|<\delta$ 内有定义且 $|f(x)|\leqslant x^2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不连续　　(B) 连续但不可微

(C) 可微且 $f'(0)=0$　　(D) 可微但 $f'(0)\neq 0$

22. 设 $y=y(x)$ 由 $x-\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=0$ 确定，则 $y''(0)$ 等于(　　).

(A) $2e^2$　　(B) $2e^{-2}$　　(C) e^2-1　　(D) $e^{-2}-1$

23. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，则(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

(B) 若 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(D) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A>0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

24. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\frac{1}{x}, & x>0,\\ x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处(　　).

(A) 不连续　　(B) 连续但不可导

(C) 可导但导数不连续　　(D) 导数连续

25. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-1}, & x\neq 1,\\ 3, & x=1,\end{cases}$ 则在 $x=1$ 处 $f(x)$(　　).

(A) 不连续　　(B) 连续但不可导

(C) 可导但不是连续可导　　(D) 连续可导

26. 若 $f(-x)=-f(x)$，且在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0,f''(x)>0$，则在 $(-\infty,0)$ 内(　　).

(A) $f'(x)<0,f''(x)<0$　　(B) $f'(x)<0,f''(x)>0$

(C) $f'(x)>0,f''(x)<0$　　(D) $f'(x)>0,f''(x)>0$

◇ 解答题

27. 讨论 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}, & x\neq 0,\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的可导性.

28. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t, & x>0\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

29. (1) 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,求 y''.

(2) 设 $y=\ln\left(\tan\sqrt{x^2+1}\right)$,求 y'.

30. 设 $y=f\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$,且 $f'(x)=\dfrac{1}{3}\ln x$,求 y'.

31. (1) 由方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 确定函数 $y=y(x)$,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由 $2^{xy}=x+y$ 确定,求 $\left.\mathrm{d}y\right|_{x=0}$.

(3) 设由 $\mathrm{e}^{-y}+x(y-x)=1+x$ 确定 $y=y(x)$,求 $y''(0)$.

(4) 设 $y=y(x)$ 由 $x-\displaystyle\int_1^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 确定,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

(5) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+tx)^{\frac{1}{t}}$,求 $\left.\mathrm{d}f(x)\right|_{x=1}$.

32. 设 $f(x)$ 可导且 $f'(0)\neq 0$,且 $\begin{cases}x=f(t)-\pi,\\ y=f(\mathrm{e}^{3t}-1),\end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$.

33. 设 $y=\ln(2+3^{-x})$,求 $\left.\mathrm{d}y\right|_{x=0}$.

34. 设 $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x^2-3x-2}$,求 $f^{(n)}(x)$.

35. 设 $y=x^2\ln x$,求 $y^{(n)}(n\geqslant 3)$.

36. 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{x^2}xf(x-t)\mathrm{d}t$.

37. 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}, & x<0,\\ ax^2+bx+c, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 且 $f''(0)$ 存在,求 a,b,c.

38. 设 $f(x)$ 连续,且对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$, $f'(0)=1$,求 $f(x)$.

39. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

40. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导,证明:$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a)$.

41. 设 $f(x)$ 连续,$f(0)=0$,$f'(0)=1$,求

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a-\ln(1+a)}\left[\int_{-a}^{a}f(x+a)\mathrm{d}x-\int_{-a}^{a}f(x-a)\mathrm{d}x\right].$$

42. 设 $\displaystyle\int_0^{x^2}t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^{\ln y}\mathrm{e}^t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}$,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

43. 设 $f(x)$ 连续,且 $g(x)=\displaystyle\int_0^{x}x^2f(x-t)\mathrm{d}t$,求 $g'(x)$.

44. 证明：曲线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}$上任一点的切线的横截距与纵截距之和为2.

45. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$f'(0)=1$，且对任意的$x,y\in(-\infty,+\infty)$，有$f(x+y)=f(x)f(y)$，求$f(x)$.

46. 设$f(x)$在$[a,b]$上有定义，$M>0$且对任意的$x,y\in[a,b]$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^k.$$

(1) 证明：当$k>0$时，$f(x)$在$[a,b]$上连续；

(2) 证明：当$k>1$时，$f(x)\equiv$常数.

47. 设$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+b, x\leqslant 0,\\ \ln(1+ax),\ x>0\end{cases}$处处可导，确定常数$a,b$，并求$f'(x)$.

48. 设对一切x，有$f(x+1)=2f(x)$，且当$x\in[0,1]$时$f(x)=x(x^2-1)$，讨论函数$f(x)$在$x=0$处的可导性.

49. 设$\int_1^{y-x^2}e^{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x\cos(x-t)^2\mathrm{d}t$确定$y$为$x$的函数，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

50. 设$f(x)$二阶可导，$f(0)=0$，令$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0.\end{cases}$

(1) 求$g'(x)$； (2) 讨论$g'(x)$在$x=0$处的连续性.

51. 求常数a,b，使得

$$f(x)=\begin{cases}\ln(1+3x)+2a\mathrm{e}^x, & x>0,\\ 5\arctan\dfrac{2x}{1-x}+3b(x+1)^2, & x\leqslant 0\end{cases}$$

在$x=0$处可导.

三、中值定理与一元函数微分学的应用

Ⅰ 入门练习

◇ 填空题

1. 函数$f(x)=x^2-3x+4$在$[1,2]$上满足罗尔定理的条件，则$\xi=$________.

2. 设$f(x)=\ln(1+x)$，当$x>0$时，由拉格朗日中值定理，$f(x)=f'(\theta x)x(0<\theta<1)$，则$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta=$________.

3. 设$f(x)=\mathrm{e}^x$，且$f(x)-f(0)=f'(\theta x)x$，则$\lim\limits_{x\to 0}\theta=$________.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sin\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n+1}\right)=$________.

5. 函数$f(x)=x\mathrm{e}^{-2x}$的最大值为________.

6. 函数$y=\mathrm{e}^{-x^2}$的拐点为________、凸区间为________.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\cos t\,\mathrm{d}t+\cos x-1}{x^4}=$________.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-1+\dfrac{x^2}{2}}{x^2\arctan^2 x}=$________.

9. 曲线 $y=f(x)=\dfrac{2x^3-4x^2+1}{x^2+x}$ 的斜渐近线为________.

10. 设曲线 $L:r=\mathrm{e}^{2\theta}$，则曲线 L 的弧微分为________.

11. 曲线 $L:\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(a>0)$，在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 对应点处的曲率为________.

◇ 选择题

12. 下列命题正确的是(　　).

(A) 若 $x=a$ 为 $f(x)$ 的驻点，则 $x=a$ 为 $f(x)$ 的极值点

(B) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导，则 $x=a$ 为 $f(x)$ 的极值点

(C) 若 $x=a$ 为 $f(x)$ 的极值点，则 $x=a$ 为 $f(x)$ 的驻点

(D) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导且 $x=a$ 处为 $f(x)$ 的极值点，则 $x=a$ 为 $f(x)$ 的驻点

13. 设 $f(x)$ 为二阶可导的奇函数，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0,f''(x)>0$，则当 $x\in(-\infty,0)$ 时(　　).

(A) $f'(x)>0,f''(x)>0$　　(B) $f'(x)<0,f''(x)>0$

(C) $f'(x)>0,f''(x)<0$　　(D) $f'(x)<0,f''(x)<0$

14. 设曲线 $y=f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x^2-1}$，则(　　).

(A) 曲线 $y=f(x)$ 有一条水平渐近线，一条斜渐近线

(B) 曲线 $y=f(x)$ 有一条铅直渐近线，一条斜渐近线

(C) 曲线 $y=f(x)$ 有一条水平渐近线，一条铅直渐近线

(D) 两条斜渐近线

15. 设 $f(x)$ 可导且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{(x-2)^2}=-3$，则(　　).

(A) $x=2$ 为 $f(x)$ 的极大值点

(B) $x=2$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(C) $(2,1)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=2$ 不是极值点，$(2,1)$ 也非 $y=f(x)$ 的拐点

16. 设 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$，则(　　).

(A) $f(x)$ 有一个极大值点，没有极小值点

(B) $f(x)$ 有一个极小值点，没有极大值点

(C) $f(x)$ 有一个极大值点，一个极小值点

(D) $f(x)$ 没有极大值点，也没有极小值点

17. 设 $f''(x)>0$,且 $f(0)=0$,则 $-f(-1),f(1),f'(0)$ 的大小次序为(　　).

(A) $-f(-1)<f(1)<f'(0)$　　(B) $-f(-1)<f'(0)<f(1)$

(C) $f(1)<-f(-1)<f'(0)$　　(D) $f(1)<f'(0)<-f(-1)$

◇ 解答题

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续,在 $(0,3)$ 内可导,且 $2f(0)=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$,证明:存在 $\xi\in(0,3)$,使得 $f'(\xi)=0$.

19. 设 $f(x)$ 二阶可导,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=0$ 且 $f(1)=1$,证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f''(\xi)=0$.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(1)=0$,证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0.$$

21. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)=0$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)-2f(\xi)=0$.

22. 设 $f''(x)>0,f(0)=0$,证明:$2f(1)<f(2)$.

23. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导 $(a>0)$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}.$$

24. 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

25. 证明:当 $x>0$ 时,$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

26. 证明:当 $x>0$ 时,$\mathrm{e}^x>1+x$.

27. 证明:当 $x>0$ 时,$\mathrm{e}^x-1>(1+x)\ln(1+x)$.

28. 求曲线 $y=\dfrac{2x^2+x+2}{x-1}$ 的渐近线.

29. 求曲线 $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}\arctan\dfrac{1}{x}$ 的渐近线.

30. 讨论方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-1$ 有几个根.

31. 当 $x>0$ 时,方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根,求 k 的取值范围.

Ⅱ 基础练习

◇ 填空题

1. 设 $f(x)=x^2-x-2$ 在 $[-1,2]$ 上满足罗尔定理的条件,则中值 $\xi=$________.

2. 设 $f(x)=\sin x$，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=f'\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)\frac{\pi}{2}$，则 $\theta=$______.

3. 设 $f(x)=e^{2x}$，且 $f(x)-f(0)=f'(\theta x)x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=$______.

4. 设 $f(x)$ 二阶可导，$x=1$ 为极值点，且 $f(x)$ 满足 $f''(x)+f'(x)=1+x-e^{x}$，则 $x=1$ 为______(填极大值点或极小值点).

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1+x^2}{\ln(1+2x)(x-\sin x)}=$______.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}=$______.

7. 曲线 $y=f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{x^2+1}\arctan x$ 的水平渐近线为______.

8. 曲线 $y=f(x)=2xe^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线为______.

9. 曲线 $y=f(x)=e^{-(x-1)^2}$ 的拐点为______.

10. 曲线 $L:\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\cos t\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的曲率为______.

◇ 选择题

11. 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有(　　).

(A)1 条　　(B) 2 条

(C)3 条　　(D)4 条

12. 函数 $f(x)=x^3-3x+k$ 只有一个零点，则 k 的范围为(　　).

(A) $|k|<1$　　(B) $|k|>1$

(C) $|k|>2$　　(D)$k<2$

13. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有定义，$f(0)=1$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)-2xf(x)}{x^2}=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 可导，且 $f'(0)=0$　　(B) 可导，且 $f'(0)=-1$

(C) 可导，且 $f'(0)=2$　　(D) 不可导

14. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处(　　).

(A)$f(x)$ 在 $x=a$ 处可导且 $f'(a)\neq 0$

(B)$f(a)$ 为 $f(x)$ 的极大值

(C)$f(a)$ 不是 $f(x)$ 的极值

(D)$f(x)$ 在 $x=a$ 处不可导

15. 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^2}=-2$，则(　　).

(A)$f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

(B)$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)\neq 0$

(C)$f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值

(D)$f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值

16. 设 $f(x)$ 二阶连续可导,且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f''(x)}{\sin^3 \pi x}=2$,则(　　).

(A)$x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点

(B)$x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(C)$(1,f(1))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D)$x=1$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(1,f(1))$ 也不是 $y=f(x)$ 的拐点

17. 设 $f(x)$ 二阶连续可导,$f'(0)=0$,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|+x^3}=-1$,则(　　).

(A)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点

(B)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(C)$(0,f(0))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点

(D)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,f(0))$ 也不是 $y=f(x)$ 的拐点.

18. 设函数 $f(x)$ 二阶可导,且 $f'(x)>0,f''(x)>0,\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$,其中 $\Delta x<0$,则(　　).

(A)$\Delta y>\mathrm{d}y>0$　　(B)$\Delta y<\mathrm{d}y<0$

(C)$\mathrm{d}y>\Delta y>0$　　(D)$\mathrm{d}y<\Delta y<0$

19. 设 $f''(x)$ 连续,$f'(0)=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$,则(　　).

(A)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C)$(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点

(D)$f(0)$ 非极值,$(0,f(0))$ 也非 $y=f(x)$ 的拐点

20. 设函数 $f(x)$ 在$[0,a]$上连续,在$(0,a)$内二阶可导,且 $f(0)=0,f''(x)<0$,则$\dfrac{f(x)}{x}$在$(0,a]$上(　　).

(A) 单调增加　　(B) 单调减少

(C) 恒等于零　　(D) 非单调函数

21. 设 $f(x)$ 可导,则当 $\Delta x\to 0$ 时,$\Delta y-\mathrm{d}y$ 是 Δx 的(　　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 等价无穷小

(C) 同阶无穷小　　(D) 低阶无穷小

22. $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内二阶可导,$f''(x)<0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,则 $f(x)$ 在$(-\infty,0)$内(　　).

(A) 单调增加且大于零　　(B) 单调增加且小于零

(C) 单调减少且大于零　　(D) 单调减少且小于零

23. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶连续可导,且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\sin x}=1$,则下列正确的是(　　).

(A)$x=0$ 是 $f(x)$ 的零点

(B)$(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点

(C)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(D)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点

24. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有定义，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是（　　）.

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(-h)}{h}$ 存在

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{\ln^2(1+h)}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$ 存在

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\tan h)}{h^2}$ 存在

25. 设曲线 $y=x^2+ax+b$ 与曲线 $2y=xy^3-1$ 在点$(1,-1)$ 处切线相同，则（　　）.

(A)$a=1,b=1$　　(B)$a=-1,b=-1$

(C)$a=2,b=1$　　(D)$a=-2,b=-1$

26. 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$x_0\neq 0$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点，则（　　）.

(A)x_0 为 $f(x)$ 的驻点

(B)$-x_0$ 为 $-f(-x)$ 的极小值点

(C)$-x_0$ 为 $-f(x)$ 的极小值点

(D) 对一切的 x 有 $f(x)\leqslant f(x_0)$

27. 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)>0$，则下列正确的是（　　）.

(A)$f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值

(B)$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C)$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(D)$(x_0,f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点

28. 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极小值 -2，则（　　）.

(A)$a=1,b=2$　　(B)$a=-1,b=-2$

(C)$a=0,b=-3$　　(D)$a=0,b=3$

29. 当 $x\in[0,1]$ 时，$f''(x)>0$，则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 的大小次序为（　　）.

(A)$f'(0)>f(1)-f(0)>f'(1)$

(B)$f'(0)<f'(1)<f(1)-f(0)$

(C)$f'(0)>f'(1)>f(1)-f(0)$

(D)$f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$

30. 设 $f(x),g(x)(a<x<b)$ 为大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有（　　）.

(A)$f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B)$f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C)$f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D)$f(x)g(x)>f(a)g(a)$

31. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）.

(A) 不可导　　(B) 可导但 $f'(0) \neq 0$

(C) 取极大值　　(D) 取极小值

32. 设 $f(x)$ 连续,且 $f'(0) > 0$,则存在 $\delta > 0$,使得(　　).

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少

(C) 对任意的 $x \in (-\delta,0)$,有 $f(x) > f(0)$

(D) 对任意的 $x \in (0,\delta)$,有 $f(x) > f(0)$

◇ 解答题

33. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,在 $(0,2)$ 内可导,且 $2f(0)=f(1)+f(2)$,证明:存在 $\xi \in (0,2)$,使得 $f'(\xi)=0$.

34. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,在 $(0,2)$ 内可导,且 $f(0)=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$,证明:存在 $\xi \in (0,2)$,使得 $f'(\xi)=0$.

35. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$,证明:存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

36. 设 $f(x)$ 二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=0$,又 $f(2)=1$,证明:存在 $\xi \in (1,2)$,使得 $f''(\xi)=0$.

37. 设 $f(x)$ 二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$,又 $f(1)=1$,证明:存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f''(\xi)=0$.

38. 证明方程 $e^x=-x^2+ax+b$ 不可能有三个不同的根.

39. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2, f(1)=\dfrac{1}{2}$.

(1) 证明:存在 $c \in (0,1)$,使得 $f(c)=c$;

(2) 证明:存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f'(\xi)+f(\xi)=1+\xi$.

40. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,在区间 (a,b) 内可导,且 $f(a)=g(b)=0$, $g'(x)<0$,试证明:存在 $\xi \in (a,b)$ 使 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\dfrac{\int_a^{\xi} f(t)\mathrm{d}t}{\int_{\xi}^{b} g(t)\mathrm{d}t}=0$.

41. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)=0$,证明:

(1) 存在 $\xi \in (a,b)$,使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$;

(2) 存在 $\eta \in (a,b)$,使得 $\eta f'(\eta)+f(\eta)=0$.

42. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,证明:存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t+(\xi-1)f(\xi)=0$.

43. 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $g'(x) \neq 0$. 证明:存在 $\xi \in (a,b)$,使得

$$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

44. 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续,在 $(1,2)$ 内可导,证明:存在 $\xi \in (1,2)$,使得

$$\xi f'(\xi)-f(\xi)=f(2)-2f(1).$$

45. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)$，证明：存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得

$$f'(\xi)+f'(\eta)=0.$$

46. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，证明：存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $\frac{4}{\pi}f'(\xi)=(1+\eta^2)f'(\eta)$.

47. 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f'(x)\neq 0$，证明：存在 $\xi,\eta,\zeta\in(1,2)$，使得

$$\frac{f'(\zeta)}{f'(\xi)}=\frac{\xi}{\eta}.$$

48. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导 $(a>0)$. 证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

49. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)$，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为常数. 证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)>0$，$f'(\eta)<0$.

50. 设 $b>a>0$，证明：$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$.

51. (1) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上可导，且 $|f'(x)|\leqslant M$，又 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内至少有一个零点，证明：

$$|f(0)|+|f(2)|\leqslant 2M.$$

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M$，又 $f(x)$ 在 (a,b) 内能取到最小值，证明：

$$|f'(a)|+|f'(b)|\leqslant M(b-a).$$

52. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导且 $f(0)=f(1)$，又 $|f''(x)|\leqslant M$，证明：$|f'(x)|\leqslant\frac{M}{2}$.

53. 证明：当 $x>1$ 时，$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$.

54. 证明：当 $x>0$ 时，$x^2>(1+x)\ln^2(1+x)$.

55. 证明：当 $x>0$ 时，$\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

56. 求 $y=\int_0^x(1-t)\arctan t\,dt$ 的极值.

57. 设 PQ 为抛物线 $y=\frac{x^2}{4}$ 的弦，且 PQ 在此抛物线过 P 点的法线上，求 PQ 长度的最小值.

58. 求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间与极值，并求该曲线的渐近线.

59. 证明：当 $0<x<1$ 时，$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$.

60. 证明：当 $0<x<1$ 时，$e^{-2x}>\frac{1-x}{1+x}$.

61. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，证明：$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$.

62. 求 $f(x)=\int_0^1|x-t|\,dt$ 在 $[0,1]$ 上的最大值与最小值.

63. 证明方程 $\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个根.

64. 设 $k>0$，讨论常数 k 的取值，使 $f(x)=x\ln x+k$ 在其定义域内没有零点、有一个零点及两个

零点.

65. 设 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$，讨论 $f(x)$ 的单调性、凹凸性、拐点、水平渐近线.

66. 证明：当 $x>0$ 时，$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{x+1}$.

67. 设 $0<a<1$，证明：方程 $\arctan x=ax$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个实根.

68. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内可导，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=-f(\xi)\cot\xi$.

69. 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内二阶可导，且 $2f(0)=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=f(2)+f(3)$.

证明：(1) $\xi_1,\xi_2\in(0,3)$，使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$；

(2) 存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f''(\xi)-2f'(\xi)=0$.

70. 设 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(x)\neq 0\ (1<x<2)$，又 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(2x-1)}{x-1}$ 存在，证明：

(1) 存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $\dfrac{\ln 2}{\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{\xi f(\xi)}$；

(2) 存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t=\xi(\xi-1)f'(\eta)\ln 2$.

71. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导且 $f''(x)>0$，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内为凹函数.

72. 求曲线 $y=f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

73. 求曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线.

四、不定积分

Ⅰ 入门练习

◇ 填空题

1. (1) $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x=$________.　　(2) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=$________.

(3) $\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=$________.　　(4) $\int\frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=$________.

2. (1) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$________.　　(2) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$________.

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=$________.　　(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}=$________.

3. (1) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}=$______.　(2) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx=$______.

4. (1) $\int \frac{dx}{(2x+3)^2}=$______.　(2) $\int \frac{x}{(x+2)^3}dx=$______.

5. (1) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=$______.　(2) $\int \frac{e^x}{4+e^{2x}}dx=$______.

6. (1) $\int \sin^3 x\cos x\,dx=$______.　(2) $\int \frac{\cos x+\sin x}{(\sin x-\cos x)^2}dx=$______.

(3) $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx=$______.　(4) $\int \tan^2 x\,dx=$______.

7. (1) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}=$______.　(2) $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx=$______.

8. (1) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=$______.　(2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=$______.

9. (1) $\int xe^{2x}dx=$______.　(2) $\int x^2\ln x\,dx=$______.

(3) $\int x^2\sin x\,dx=$______.　(4) $\int x^2\arctan x\,dx=$______.

10. (1) $\int e^{2x}\cos x\,dx=$______.　(2) $\int \sec^3 x\,dx=$______.

◇ 解答题

11. 计算 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

12. 计算 $\int x\ln(1+x^2)dx$.

13. 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.　(2) $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{1+\cos x}$.　(3) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$.

14. 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.　(2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.　(4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

15. 计算下列不定积分：

(1) $\int x\arcsin x\,dx$.　(2) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx$.

16. 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{x}{(2x+3)^2}dx$.　(2) $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

(3) $\int \frac{x^3-1}{x^2+x}dx$.　(4) $\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$.

17. 设$\frac{\sin x}{x}$为$f(x)$的一个原函数,求$\int f'(2x-1)\mathrm{d}x$.

Ⅱ 基础练习

◇ 填空题

1. $\int \frac{\cos\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$______.

2. (1)$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=$______.

(2)$\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^4 x}\mathrm{d}x=$______.

(3)$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=$______.

3. $\int \frac{x^3+4x^2+x}{(x+2)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x=$______.

4. $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}=$______.

5. $\int \frac{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{4x}-10\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x=$ ______.

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}=$______.

7. $\int \frac{1}{1+\cos x+\sin^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=$______.

8. $\int \mathrm{e}^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=$______.

◇ 选择题

9. 设$f(x)$为可导函数,$F(x)$为其原函数,则(　　).

(A) 若$f(x)$是周期函数,则$F(x)$也是周期函数

(B) 若$f(x)$是单调函数,则$F(x)$也是单调函数

(C) 若$f(x)$是偶函数,则$F(x)$是奇函数

(D) 若$f(x)$是奇函数,则$F(x)$是偶函数

10. 设$\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+C$,则$\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x$等于(　　).

(A) $\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$　　(B) $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

(C) $2(1-x^2)^2+C$　　(D) $-2(1-x^2)^2+C$

◇ 解答题

11. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{(5-x)\sqrt{1-x}}$.

(2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

(3) $\int \frac{x^{14}}{(x^5+1)^4}dx$.

(4) $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$.

(5) $\int \frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$.

(6) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

(7) $\int \frac{x-1}{2x^2+x-1}dx$.

(8) $\int \frac{1+\ln(1-x)}{x^2}dx$.

(9) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$.

(10) $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$.

12. 求 $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

13. 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4x-1)}}$.

14. 求 $\int \frac{x+1}{(3x+2)^3}dx$.

15. 求 $\int \frac{dx}{(x-3)^2(x^2-6x+8)}$.

16. 求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}(x>1)$.

17. 求 $\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}dx$.

18. 求 $\int \arcsin^2 x\,dx$.

19. 求 $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

20. 求 $\int \frac{\sin x}{\sin x-\cos x}dx$.

21. 求 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

22. 求 $\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}dx$.

23. 求 $\int \frac{(x+1)\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

24. 求 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$.

25. 求 $\int \frac{\tan^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

26. 求$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{2\arctan x+3}}$.

27. 求$\int \frac{\cos 2x}{(3+\sin x\cos x)^2}dx$.

28. 求$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$.

29. 求$\int \frac{dx}{\sqrt{4e^x+1}}$.

30. 求$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$.

31. 求$\int \sqrt{e^x-1}\,dx$.

32. 求$\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}+e^{2x}+1}dx$.

33. 求$\int \frac{2x^3+4x+1}{x^2+x+1}dx$.

34. 求$\int \frac{\sin x+\cos^2 x}{1+\sin x}dx$

35. 求$\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$.

36. 求$\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin^2 x}dx$.

37. 求$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

38. 求$\int \frac{\sin x\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}{2+\sin^2 x}dx$.

39. 求$\int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}dx$.

40. 求$\int \arcsin x\arccos x\,dx$.

41. 求$\int x\arctan\sqrt{x}\,dx$.

42. 求$\int \frac{x\arctan x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

43. 求$\int \arctan(1+\sqrt{x})dx$.

44. 求$\int \frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx$.

45. 求$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}dx$.

46. 求$\int \frac{1+\cos x}{1+\sin^2 x}dx$.

47. 求$\int \frac{xe^x dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

48. 求$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

49. 求$\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$.

50. 求$\int \frac{x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

51. 求$\int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$.

52. 设$f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$,且$f[\varphi(x)]=\ln x$,求$\int \varphi(x)dx$.

53. 设$f(\ln x)=\begin{cases}1,x<1,\\ x,x\geqslant 1,\end{cases}$ 求$\int f(x)dx$.

54. 求$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$.

55. 求$\int \frac{1}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}dx$.

56. 求$\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$.

57. 求$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x-2}}dx$.

58. 设$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{1}{x-t}}$,求$\int \frac{f(x)}{(x-1)^2}dx$.

59. (1)$\varphi(x)=\int_{\sin x}^{\cos 2x}\ln(1+t^2)dt$,求$\varphi'(x)$.

(2) 设$F(x)=\int_0^x dy\int_0^{y^2}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$,求$F''(x)$.

五、定积分及其应用

Ⅰ 入门练习

◇ 填空题

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=$________.

2. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1-\sin x}=$________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos^2 t\,\mathrm{d}t - x}{x^3} =$ ________.

4. 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}{x-\ln(1+x)} =$ ________.

5. 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-x}^{x}[f(t+x)+f(t-x)]\mathrm{d}t =$ ________.

6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x x\sin(x-t)^2\,\mathrm{d}t =$ ________.

7. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=$ ________.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1^2}+\dfrac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=$ ________.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin^2\dfrac{\pi}{n}+2\sin^2\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+n\sin^2\dfrac{n\pi}{n}\right)=$ ________.

8. $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x =$ ________.

9. $\int_{-\pi}^{\pi}(|x|+x^3)\sin^2 x\,\mathrm{d}x =$ ________.

10. $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x(1+\sin x)}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x =$ ________.

11. $\int_0^{2\pi} x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x =$ ________.

12. $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}} =$ ________.

13. 设 $f(2)=3$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$，则 $\int_0^1 xf'(2x)\mathrm{d}x =$ ________.

14. 设 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x =$ ________.

15. 设区域 D 由 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与 x 轴围成，区域 D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为________.

◇ 解答题

16. 计算下列定积分：

(1) $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.　　(2) $\int_0^{\pi}(\sin^2 x+\cos^3 x)\mathrm{d}x$.

17. (1) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$，并求 $I=\int_0^1\dfrac{x^2}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

(2) 计算 $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

19. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x$.

20. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0,\end{cases}$ 计算 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

21. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x$.　　(2) $\int_{-1}^1 (x^2+\sin x)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^1 \dfrac{x^2}{x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

22. 设 $f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

23. 讨论 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$ 的敛散性，若收敛求其值.

24. 讨论广义积分 $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}$ 的敛散性，若收敛求其值.

25. 计算：

(1) $\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$.　　(2) $\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

26. 求椭圆 $L:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积.

27. 设曲线 $L: y=\sqrt{2x-x^2}$ 与 x 轴围成区域 D，

(1) 求区域 D 的面积；

(2) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周而成的几何体的体积；

(3) 求区域 D 绕 $x=2$ 旋转一周所得的几何体的体积.

Ⅱ 基础练习

◇ 填空题

1. 设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=$________.

2. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，且 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+bx$ 也是以 T 为周期的连续函数，则 $b=$________.

3. $\int_{-1}^1 \left[x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2})+(x^2+1)\sqrt{1-x^2}\right]\mathrm{d}x=$________.

4. $\int_0^1 \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x=$________.

5. $\int_0^{\pi} x\sqrt{\sin^2 x-\sin^4 x}\,\mathrm{d}x=$________.

6. 设 $f(x)\in C[1,+\infty)$，广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且满足 $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^4}\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$________.

7. 设 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$________.

8. 设 $f(x)$ 二阶连续可导，且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$，则 $\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x=$________.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+2x}, & x>0,\\ \frac{1}{4+x^2}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $\int_{-1}^{5} f(x-1)\mathrm{d}x=$________.

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^a x}=$________(其中 a 为常数).

11. $\int_0^{+\infty} x^7\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=$________.

12. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}=$________.

13. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=$________.

◇ 选择题

14. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x$，$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x$，则有(　　).

(A) $N<P<M$　　(B) $M<P<N$

(C) $N<M<P$　　(D) $P<M<N$

15. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\ (x\in[0,2])$，则(　　).

(A) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

(B) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{x^3}{3}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

(D)$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

16. 下列广义积分发散的是(　　).

(A)$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　　　(B)$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$

(C)$\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2}dx$　　　　(D)$\displaystyle\int_{0}^{+\infty}x^{10}e^{-x^2}dx$

17. 设在区间$[a,b]$上$f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$,令$S_1=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$,$S_2=f(b)(b-a)$,

$S_3=\dfrac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$,则(　　).

(A)$S_1<S_2<S_3$　　　　(B)$S_2<S_1<S_3$

(C)$S_3<S_1<S_2$　　　　(D)$S_2<S_3<S_1$

18. 曲线$y=x(x-1)(2-x)$与x轴所围成的图形面积可表示为(　　).

(A)$-\displaystyle\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

(B)$\displaystyle\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

(C)$-\displaystyle\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

(D)$\displaystyle\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

19. 双纽线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$所围成的区域面积可表示为(　　).

(A)$2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$　　　　(B)$4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$

(C)$2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\, d\theta$　　　　(D) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2 d\theta$

20. 设$f(x),g(x)$在区间$[a,b]$上连续,且$g(x)<f(x)<m$,则由曲线$y=g(x)$,$y=f(x)$及直线$x=a$,$x=b$所围成的平面区域绕直线$y=m$旋转一周所得旋转体体积为(　　).

(A)$\pi\displaystyle\int_a^b[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx$

(B)$\pi\displaystyle\int_a^b[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx$

(C)$\pi\displaystyle\int_a^b[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx$

(D)$\pi\displaystyle\int_a^b[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx$

21. 矩形闸门宽a米,高h米,垂直放在水中,上边与水面相齐,闸门压力为(　　).

(A)$\rho g\displaystyle\int_0^h ah\,dh$　　　　(B)$\rho g\displaystyle\int_0^a ah\,dh$

(C)$\rho g\int_0^h \frac{1}{2}ah\,dh$ (D)$2\rho g\int_0^h ah\,dh$

22. 在曲线 $y=(x-1)^2$ 上的点(2,1)处作曲线的法线,由该法线、x 轴及该曲线所围成的区域为 $D(y>0)$,则区域 D 绕 x 轴旋转一周所成的几何体的体积为( ).

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{8\pi}{15}$ (D) $\frac{13\pi}{15}$

◇ 解答题

23. 当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=x$,设 $g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & x>\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 当 $x\geqslant 0$ 时,求$\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$.

24. 求$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\sin^2 x]\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

25. 设 $f(x)$ 连续,且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$. 证明:

(1) 若 $f(x)$ 是偶函数,则 $F(x)$ 为偶函数;

(2) 若 $f(x)$ 单调不增,则 $F(x)$ 单调不减.

26. 求$\int_{-2}^{2}(3x+1)\max\{2,x^2\}\mathrm{d}x$.

27. 求$\int_{-1}^{1}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$.

28. 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin^2 x, & x>0,\\ \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求$\int_0^{2\pi}f(x-\pi)\mathrm{d}x$.

29. 计算下列定积分:

(1)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{2+\sin x}+x^2\sin x\right)\mathrm{d}x$.

(2)$\int_0^{\ln 5}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

(3)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$.

(4)$\int_{-2}^{2}\left(x^3\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

(5)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

(6)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{(\cos x+2\sin x)^2}$.

(7)$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

(8)$\int_0^{\pi}\frac{x\,|\sin x\cos x|}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$.

30. 求$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{|\ln x|}{x}\mathrm{d}x$.

31. 求$\int_0^{n\pi}x\,|\cos x|\,\mathrm{d}x$.

32. 求$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$.

33. 求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 x}}\mathrm{d}x$.

34. 设 $f(x)=\sin^3 x+\int_{-\pi}^{\pi} xf(x)\mathrm{d}x$，求 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

35. 设 $f(x)\in C[-\pi,\pi]$，且 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

36. 设 $f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

37. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导，且 $f(0)=0$，证明：$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{1}{2}\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x$.

38. 求 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2+3x^4}}$.

39. 求 $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

40. 设 $f(2)=\dfrac{1}{2}$，$f'(2)=0$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$，求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x$.

41. 设 $f(x)=\int_0^x \dfrac{\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$.

42. 设 $y'=\arctan(x-1)^2$，$y(0)=0$，求 $\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x$.

43. 设 $f(t)=\int_1^t \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$，求 $\int_0^1 t^2 f(t)\mathrm{d}t$.

44. 设 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{\cos t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x$.

45. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 的最大值与最小值.

46. 求 $\int_{-1}^1 \dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

47. 计算 $\int_3^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$.

48. 求 $\int_{-1}^1 (2+\sin x)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

49. 计算 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

50. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

51. 设 $f(x)$ 为连续函数，

(1) 证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$；

(2) 证明：$\int_0^{2\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

(3) 求 $\int_0^{\pi} \dfrac{x\sin x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

52. 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n x\,dx=2^{-n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

53. 设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上可积，当 $0\leqslant x<y\leqslant 1$ 时，$|f(x)-f(y)|\leqslant|\arctan x-\arctan y|$，又 $f(1)=0$，证明：$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\leqslant\frac{1}{2}\ln 2$.

54. 设 $f(a)=f(b)=0,\int_a^b f^2(x)dx=1,f'(x)\in C[a,b]$.

(1) 求$\int_a^b xf(x)f'(x)dx$；

(2) 证明：$\int_a^b f'^2(x)dx\int_a^b x^2f^2(x)dx\geqslant\frac{1}{4}$.

55. 设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上可导，$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}x^2f(x)dx$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$$

56. 设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上连续，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)dx=g(\xi)\int_a^\xi f(x)dx.$$

57. 设 $f(t)$ 在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内可导，且$\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx=\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f'(\xi)=0$.

58. 设 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导，$f(0)=f(2)=0$，且 $|f'(x)|\leqslant 2$. 证明：

$$\left|\int_0^2 f(x)dx\right|\leqslant 2.$$

59. 设 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上二阶连续可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

60. 设 $y=f(x)$ 为区间$[0,1]$上的非负连续函数.

(1) 证明：存在 $c\in(0,1)$，使得在区间$[0,c]$上以 $f(c)$ 为高的矩形面积等于区间$[c,1]$上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积；

(2) 设 $f(x)$ 在$(0,1)$内可导，且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，证明：(1) 中的 c 是唯一的.

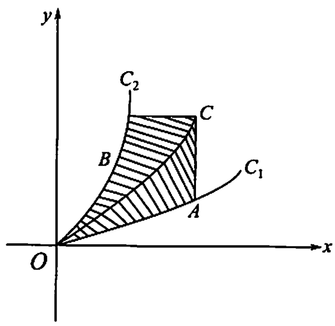
61. 求曲线 $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴围成的区域绕 x 轴、y 轴形成的几何体体积.

62. 设 $L:y=\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. 由 $x=0$，L 及 $y=\sin t$ 围成的区域面积为 $S_1(t)$；由 L、$y=\sin t$ 及 $x=\frac{\pi}{2}$ 围成的区域面积为 $S_2(t)$，其中 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$.

(1) 令 $S(t)=S_1(t)+S_2(t)$，求 $S(t)$.

(2) t 取何值时，$S(t)$ 取最小值？t 取何值时，$S(t)$ 取最大值？

63. 设 $f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)\mathrm{d}t\ (x>-1)$，求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的平面区域的面积.



第 64 题图

64. 设 C_1,C_2 是任意两条过原点的曲线，曲线 C 介于 C_1,C_2 之间，如果过 C 上任意一点 P 引平行于 x 轴和 y 轴的直线，得两块阴影所示区域 A,B，它们有相等的面积，设 C 的方程是 $y=x^2$，C_1 的方程是 $y=\frac{1}{2}x^2$，求曲线 C_2 的方程.

65. 设曲线 $y=a+x-x^3$，其中 $a<0$. 当 $x>0$ 时，该曲线在 x 轴下方与 y 轴、x 轴所围成图形的面积和在 x 轴上方与 x 轴所围成图形的面积相等，求 a.

66. 求曲线 $y=x^2-2x$ 与 $y=0$、$x=1$、$x=3$ 所围成区域的面积 S，并求该区域绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

67. 设平面图形 D 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 围成，求图形 D 绕直线 $x=2$ 旋转一周所成的旋转体的体积.

68. 设 $L: y=\mathrm{e}^{-x}\ (x\geqslant 0)$.

(1) 求由 $y=\mathrm{e}^{-x}$、x 轴、y 轴及 $x=a\ (a>0)$ 所围成平面区域绕 x 轴旋转一周而得的旋转体的体积 $V(a)$；

(2) 设 $V(c)=\frac{1}{2}\lim\limits_{a\to+\infty}V(a)$，求 c.

69. 求由曲线 $y=4-x^2$ 与 x 轴围成的部分绕直线 $x=3$ 旋转一周所成的几何体的体积.

70. 过曲线 $y=x^2\ (x\geqslant 0)$ 上某点处作切线，使该曲线、切线与 x 轴所围成区域的面积为 $\frac{1}{12}$，求切点坐标、切线方程，并求此图形绕 x 轴旋转一周所成立体的体积.

71. 设曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{4-a}}=1\ (0<a<4)$ 与 x 轴、y 轴所围成的图形绕 x 轴旋转所得立体体积为 $V_1(a)$，绕 y 轴旋转所得立体体积为 $V_2(a)$，问 a 为何值时，$V_1(a)+V_2(a)$ 最大，并求最大值.

72. 设一抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $(0,0)$ 与 $(1,2)$，且 $a<0$，确定 a,b,c，使得抛物线与 x 轴所围图形的面积最小.

73. 设直线 $y=kx$ 与曲线 $y=\sqrt{x}$ 所围平面图形为 D_1，它们与直线 $x=1$ 围成平面图形为 D_2.

(1) 求 k，使得 D_1 与 D_2 分别绕 x 轴旋转一周成旋转体体积 V_1 与 V_2 之和最小，并求最小值；

(2) 求(1) 中条件成立时的 $S_{D_1}+S_{D_2}$.

74. 求摆线$\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的长度.

75. 设曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作曲线的切线，求此曲线、切线及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的表面积.

76. 一半径为 R 的球沉入水中，球面顶部正好与水面相切，球的密度为 1，求将球从水中取出所做的功.

77. 半径为 2 的球体盛满水，求将水从球顶部全部抽出所做的功.

六、向量代数与空间解析几何

Ⅰ 入门练习

◇ 填空题

1. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为单位向量，且两向量的夹角为$\frac{\pi}{4}$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-1}{x}=$________.

2. 过点 $M_0(1,-1,2)$ 且与平面 $\pi_1:x+2y-z-2=0$ 与 $\pi_2:x-y-z-4=0$ 的交线垂直的平面为________.

3. 直线 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面为________.

4. 点 $M(2,1,1)$ 到直线 $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1}$ 之间的距离为________.

5. 曲线 $L:\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1,\\ z=0\end{cases}$绕 y 轴旋转而成的曲面为________.

6. 平面 $\pi_1:x-2y+2z-2=0$ 与平面 $\pi_2:x-2y+2z+4=0$ 之间的距离为________.

7. 点 $M(1,-1,2)$ 关于平面 $x+y-2z-8=0$ 的对称点为________.

8. 设点 $A(1,0,-1),B(2,1,0),C(0,1,1)$ 则由 A,B,C 所构成的三角形的面积为________.

9. 过点 $M(1,-1,2)$ 且与平面 $\pi_1:x-y+z-2=0,\pi_2:2x+y-z+1=0$ 都垂直的平面为________.

10. 直线$L:\begin{cases}2x-y+2=0,\\ x+y-z-1=0\end{cases}$在平面 $\pi_0:x+y+z-4=0$ 上投影直线的一般式为________.

◇ 解答题

11. 一直线位于 $\pi:x+y+z+1=0$ 内，与直线 $L:\begin{cases}x+2z=0,\\ y+z+1=0\end{cases}$垂直，且经过直线 L 与平面 π 的交点，求该直线.

12. 求直线 $L:\begin{cases}x-y+z-2=0,\\x+y-z=0\end{cases}$ 在平面 $\pi:x-y-z-1=0$ 上的投影直线.

13. 求过直线 $L:\begin{cases}x-y-2z-2=0,\\2x+y+z-1=0\end{cases}$ 且垂直于平面 $x+2y-z-3=0$ 的平面.

14. 求点 $M(1,-1,2)$ 关于平面 $\pi:x-2y-z-7=0$ 对称的点的坐标.

15. 设 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-1}$，$L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$，判断两直线是否为异面直线；若是，求两条直线之间的距离.

Ⅱ 基础练习

◇ 填空题

1. 若 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{13}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{19}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{24}$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

2. 过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程为________.

3. 过原点及点 $(6,-3,2)$ 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直的平面方程为________.

4. 设 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$，$L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，则过 L_1 平行于 L_2 的平面方程为________.

5. 过点 $A(3,2,1)$ 且平行于直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ 及 $L_2:\begin{cases}x=2t+3,\\y=t-1,\\z=10\end{cases}$ 的平面方程为________.

6. 一平面经过点 $M_1(2,1,3)$ 及点 $M_2(3,4,-1)$，且与平面 $3x-y+6z-6=0$ 垂直，则该平面方程为________.

7. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 处的法线方程为________.

8. 点 $M(1,-1,2)$ 到平面 $\pi:2x-y+5z-12=0$ 的距离 $d=$________.

9. 设平面 $\pi_1:3x-2y+6z-2=0$ 与平面 $\pi_2:3x-2y+6z+12=0$，则这两个平行平面之间的距离为________.

10. 点 $M(3,-4,4)$ 到直线 $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ 的距离为________.

11. 由曲线 $L:\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转曲面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为________.

12. 曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为________.

◇ 选择题

13. 设直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+5=0,\\2x-y-10z-12=0\end{cases}$ 及平面 $\pi:4x-2y+z-6=0$，则直线 L(　　).

(A) 平行于平面 π　　(B) 在平面 π 上

(C) 垂直于平面 π　　(D) 与平面 π 斜交

14. 设直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$,$L_2:\begin{cases}x-y-6=0,\\2y+z-3=0,\end{cases}$ 则直线 L_1,L_2 的夹角为(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

15. 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线(　　).

(A) 只有1条　　(B) 只有2条

(C) 至少3条　　(D) 不存在

◇ 解答题

16. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,且 $|\boldsymbol{b}|=1$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{4}$.求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$.

17. 设 $\overrightarrow{AB}=\{2,1,3\}$,$\overrightarrow{BC}=\{-1,4,2\}$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. 设点 $A(1,-1,1)$,$B(-3,2,-1)$,$C(5,3,-2)$,判断三点是否共线,若不共线求过三点的平面的方程.

19. 求经过平面 $\pi_1:x+y+1=0$ 与 $\pi_2:x+2y+2z=0$ 的交线,且与平面 $\pi_3:2x-y-z=0$ 垂直的平面方程.

20. 求过直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ 与$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 的平面方程.

21. 求经过点 $P_1(5,-4,3)$ 和 $P_2(-2,1,8)$ 及直线 $L:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-3}$ 与平面 $\pi:x-y+z=0$ 交点的平面方程.

22. 求过点 $M(1,-2,2)$ 且与直线 $L:\begin{cases}2x+y-z+2=0,\\y-z-5=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

23. 求过点 $A(-1,2,3)$ 垂直于 $L:\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$ 且与平面 $\pi:7x+8y+9z+10=0$ 平行的直线方程.

24. 求直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ 在平面 $\pi:x-3y+2z-5=0$ 上的投影直线.

25. 求直线 $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ 与直线 $L_2:\begin{cases}x-2z-3=0,\\x+3y+z+5=0,\end{cases}$ 的夹角.

26. 设 $L_1:x-1=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$,$L_2:x+1=y-1=z$.

(1) 若 $L_1\perp L_2$,求 λ;

(2) 若 L_1,L_2 共面,求 λ.

27. 设直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面为 Σ.

(1) 求由曲面 Σ 及 $y=0,y=2$ 所围成的几何体 Ω 的体积;

(2) 设 Ω 为均匀的几何体,求该几何体的质心.

七、多元函数微分学

Ⅰ 入门练习

◇ 填空题

1. (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+y\sin x^2)^{\frac{1}{x\ln(1+2x)}}=$________.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(\cos xy)^{\frac{1}{x^2}}=$________.

2. 设 $z=x^y+y^x$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

3. 设 $z=(x^2+y^2)^{xy}$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

4. $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 可导，则 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

5. 设 f 二阶可导，$z=\dfrac{y}{x}f(xy)$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

6. 设 $z=f(t^2,\sin t)$，其中 f 二阶连续可偏导，则$\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}=$________.

7. 设 $z=f(xy,x+y)$，其中 f 二阶连续可偏导，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

8. 设 $z=z(x,y)$ 由 $x^3y^2z=x^2+y^2+\cos z$ 确定，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

9. 设 $z=f(x,y)$，且 $F(x,y,z)=0$，其中 f,F 连续可偏导，则$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=$________.

10. 设 $z=f(x,y)$ 连续且$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-2x+y}{(x-1)^2+y^2}=0$，则 $\mathrm{d}z\,|_{(1,0)}=$________.

11. 函数 $z=x^2\cos y$ 在点$\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$处沿从点$\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$到点$\left(2,\dfrac{\pi}{2}\right)$的射线的方向导数为________.

12. 设 $z=f(x,y)$ 满足：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x$，$f'_x(x,0)=2\cos x$，$f(0,y)=e^y+1$，则 $f(x,y)=$________.

◇ 解答题

13. 设 $z=f(t^2,e^{2t})$，其中 f 二阶连续可偏导，求$\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$.

14. 设 $z=f(e^x\sin y,xy)$，其中 f 二阶连续可偏导，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

15. $u=f(x^2,xy,xy^2z)$,其中 f 连续可偏导,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$.

16. 设 $z=f(x,y)$ 在点(1,1)处可微,$f(1,1)=1,f'_1(1,1)=a,f'_2(1,1)=b$,又 $u=f[x,f(x,x)]$,求$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

17. 设 $z=\int_{x+y}^{xy}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

18. 设 $y=y(x),z=z(x)$ 由$\begin{cases}x^2+y^2=2z,\\x+y-z+1=0\end{cases}$确定,求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

19. 设 $z=z(x,y)$ 是由 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所确定的二元函数,其中 F 连续可偏导,求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

20. 求曲线 $L:\begin{cases}x^2+2y^2+z^2=3,\\2x-y+z=1\end{cases}$在点(1,1,0)处的切线与法平面.

21. 求曲面 $\Sigma:x^2-y^2+2z^2=8$ 上与平面 $\pi:x-y+2z-5=0$ 平行的切平面.

22. 求二元函数 $f(x,y)=x^3-3x^2-9x+y^2-2y+2$ 的极值.

23. 已知 $z=f(x,y)$ 满足:$\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-4y\mathrm{d}y$ 且 $f(0,0)=5$.

(1) 求 $f(x,y)$;

(2) 求 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+4y^2\leqslant 4\}$ 上的最小值和最大值.

Ⅱ 基础练习

◇ 填空题

1. 设 $z=\ln(x^2+y^2)$,则$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$________.

2. 设 $z=x^{\sin^2 y}+\mathrm{e}^{\tan\frac{y}{x}}$,则$\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

3. 设 $z=f(\mathrm{e}^{2t},\sin^2 t)$,其中 f 二阶连续可偏导,则$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}=$________.

4. 设 $z=\arctan\frac{y^2}{x}$,则 $\mathrm{d}z=$________.

5. 已知 $x=z\mathrm{e}^{y+z}$ 确定函数 $z=z(x,y)$,则 $\mathrm{d}z\mid_{(\mathrm{e},0)}=$________.

6. 设 $\mathrm{e}^{x^2+yz}=x^2+y^2+z$,则 $\mathrm{d}z=$________.

7. 设 $f(x,y)$ 满足$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2,f(x,0)=1,f'_y(x,0)=x$,则 $f(x,y)=$________.

8. $z=\frac{y}{x}f(xy)+yg(x^2+y^2)$,其中 f,g 二阶连续可导,则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

9. 设 $u=f(x,y,z)=\mathrm{e}^x yz^2$,其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数,则

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,1,-1)}=$________.

10. 设 $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

11. 设 $z=z(x,y)$ 由 $\int_1^{x+y+z}e^{-t^2}dt=x^2+y^2+z$ 确定，求 dz.

12. 设 $z=f(x,y)$ 是由 $e^{2yz}+x+y^2+z=\dfrac{7}{4}$ 确定的函数，则 $\left.dz\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$________.

13. 设 $y=y(x)$ 由 $x-\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=0$ 确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________.

14. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的微分为 $dz=$________.

15. 曲线 $L:\begin{cases}4x^2+9y^2=25,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转曲面在点 $(0,-1,2)$ 处指向外侧的单位法向量为________.

16. 曲面 $z=1-x^2-y^2$ 上与平面 $x+y-z+3=0$ 平行的切平面为________.

17. 设 $f(x,y)$ 可微，且 $f'_1(-1,3)=-2$，$f'_2(-1,3)=1$，令 $z=f(2x-y,\dfrac{y}{x})$，则 $\left.dz\right|_{(1,3)}=$________.

◇ 选择题

18. 设 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^4}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处（　　）.

(A) 对 x 可偏导，对 y 不可偏导

(B) 对 x 不可偏导，对 y 可偏导

(C) 对 x 可偏导，对 y 也可偏导

(D) 对 x 不可偏导，对 y 也不可偏导

19. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的某邻域内连续，且满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{|x|+y^2}=-3$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处（　　）.

(A) 取极大值　　　　(B) 取极小值

(C) 不取极值　　　　(D) 无法确定是否取极值

20. 设 $u=f(x+y,xz)$ 有二阶连续的偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=$（　　）.

(A) $f'_2+xf''_{11}+(x+z)f''_{12}+xzf''_{22}$

(B) $xf''_{12}+xzf''_{22}$

(C) $f'_2+xf''_{12}+xzf''_{22}$

(D) xzf''_{22}

21. 设 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 都存在，则（　　）.

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

(B) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在

(C)$f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处可微

(D) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$ 存在

22. 设可微函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 处取得极小值,则下列结论正确的是(　　).

(A)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数为零

(B)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数大于零

(C)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数小于零

(D)$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数不存在

23. $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在(0,1) 处的梯度为(　　).

(A)$\boldsymbol{i}$　　(B) $-\boldsymbol{i}$　　(C)$\boldsymbol{j}$　　(D) $-\boldsymbol{j}$

◇ 解答题

24. 设 $u=x^{y^z}$,求 $\mathrm{d}u$.

25. 求函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 沿$\dfrac{1}{2}x^2+yz$ 的梯度方向的方向导数.

26. 举例说明:多元函数连续不一定可偏导,可偏导不一定连续.

27. 设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$讨论函数 $f(x,y)$ 在点(0,0) 处的连续性与可偏导性.

28. 讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0) 处的连续性、可偏导性及可微性.

29. 设 $f(x,y)=\begin{cases}y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 试讨论 $f(x,y)$ 在点(0,0) 处的连续性、可偏导性和可微性.

30. 设 $z=yf(x^2-y^2)$,其中 f 可导,证明:$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

31. 设 $z=\mathrm{e}^{x^2+y^2}\sin xy$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

32. 设 $z=\int_0^{x^2y} f(t,\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$,$f$ 有一阶连续的偏导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

33. 设 $u=f(x+y,x^2+y^2)$,其中 f 二阶连续可偏导,求$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

34. 设 $z=f[xg(y),x-y]$,其中 f 二阶连续可偏导,g 二阶可导,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

35. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z+\ln z-\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=1$ 确定,求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$.

36. 设 $z=f[x+\varphi(x-y),y]$，其中 f 二阶连续可偏导，φ 二阶可导，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

37. 设 $u=f(z)$，其中 z 是由 $z=y+x\varphi(z)$ 确定的 x,y 的函数，其中 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 为可微函数. 证明：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(z)\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

38. 设 $xy=xf(z)+yg(z)$，且 $xf'(z)+yg'(z)\neq 0$，其中 $z=z(x,y)$ 是 x,y 的函数. 证明：

$$[x-g(z)]\frac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\frac{\partial z}{\partial y}.$$

39. 设 $z=f(x,y)$ 由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 确定，求 dz.

40. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的偏导数，$y=y(x)$，$z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 与 $e^z-xz=0$ 确定，求$\dfrac{du}{dx}$.

41. 设 $z=f(x,y)$ 由 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2-xy$ 确定，求 dz.

42. 设 $y=f(x,t)$，其中 t 是由 $G(x,y,t)=0$ 确定的 x,y 的函数，且 $f(x,t)$，$G(x,y,t)$ 一阶连续可偏导，求$\dfrac{dy}{dx}$.

43. 设变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，其中 z 二阶连续可偏导，求常数 a.

44. (1) 求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

(2) 求函数 $f(x,y)=(x^2+2x+y)e^y$ 的极值.

45. 试求 $z=f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 在矩形闭域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,-1\leqslant y\leqslant 2\}$ 上的最大值、最小值.

46. 求 $u=x^2+y^2+z^2$ 在$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 上的最小值.

八、重积分

Ⅰ 入门练习

◇ 填空题

1. $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{mn}{(m^2+i^2)(n^2+j^2)}=$________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$________

3. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}(t>0)$，则$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\iint\limits_D e^{-x^2}\cos xy\,dx\,dy}{t^2}=$________.

4. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$,则 $\iint\limits_D (x+2y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

5. 设区域 $D=\{(x,y)\mid -\pi\leqslant x\leqslant \pi, 0\leqslant y\leqslant |x|\}$,则 $\iint\limits_D (\sin^2 x+xy^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

6. 设 $f(u)$ 连续,$f(0)=0$,$f'(0)=1$,且 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$,

则 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\tan t-t}=$________.

7. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$,则 $\iint\limits_D (x^2+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

8. 改变积分次序 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=$________.

9. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=$________.

10. 设区域 D 由 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与 x 轴围成,$f(x,y)=xy-\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则 $f(x,y)$ $=$________.

11. 均匀的几何体由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=1$ 围成,则质心坐标为________.

12. 曲线 $L:\begin{cases}z=x^2,\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面介于 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的体积为________.

◇ 解答题

13. 计算下列二重积分:

(1) 设区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$,求 $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) $\iint\limits_D \max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

14. 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2}\}$,求 $\iint\limits_D |x-y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

15. 计算 $\iint\limits_D (xy^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$.

16. 求 $\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 $L:\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成的区域.

17. 计算 $\iint\limits_D \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x+y\geqslant 1, x^2+y^2\leqslant 1\}$.

18. 计算 $\iiint\limits_\Omega (\sqrt{x^2+y^2}+xy)\mathrm{d}v$,其中 Ω 由 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 及 $z=0$ 所围成.

19. 计算 $\iiint\limits_\Omega x^2 z\,\mathrm{d}v$,其中 Ω:$\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$.

Ⅱ 基础练习

◇ 填空题

1. $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}dy =$ ________.

2. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{y}{x}} dx =$ ________.

3. 改变积分次序：$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx =$ ________.

4. $\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} \cos x^2 dx + \int_1^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{1} \cos x^2 dx =$ ________.

5. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{1} \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy =$ ________.

6. 设 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，则 $\iint\limits_D \sqrt{\left|\,|x|-y\,\right|}\,dxdy =$ ________.

7. 设 $D=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)^2\leqslant 4(x^2-y^2)\}$，则区域 D 的面积为________.

8. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续且 $f(0,0)=2$，则 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x,y)dxdy}{t^2} =$ ________.

9. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ D 为 $-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$，则 $\iint\limits_D f(y)f(x+y)dxdy$ $=$ ________.

◇ 选择题

10. 设 $D:x^2+y^2\leqslant 16$，则 $\iint\limits_D |x^2+y^2-4|\,dxdy$ 等于(　　).

(A)40π　　(B)80π　　(C)20π　　(D)60π

11. 设区域 D 由 $x=0,y=0,x+y=\frac{1}{2},x+y=1$ 围成，若

$I_1=\iint\limits_D [\ln(x+y)]^3 dxdy, I_2=\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy, I_3=\iint\limits_D \sin^3(x+y)dxdy$，则(　　).

(A)$I_1>I_2>I_3$　　(B)$I_2>I_3>I_1$

(C)$I_1<I_2<I_3$　　(D)$I_2<I_3<I_1$

12. 设平面区域 $D:1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，$f(x,y)$ 是区域 D 上的连续函数，则 $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$ 等于(　　).

(A)$2\pi\int_1^2 rf(r)dr$

(B)$2\pi\left[\int_1^2 rf(r)\mathrm{d}r-\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r\right]$

(C)$2\pi\int_1^2 rf(r^2)\mathrm{d}r$

(D)$2\pi\left[\int_0^2 rf(r^2)\mathrm{d}r-\int_0^1 rf(r^2)\mathrm{d}r\right]$

13. 设 $x^2+y^2\leqslant 2ay(a>0)$,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在极坐标下的累次积分为(　　).

(A)$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(B)$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(C)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(D)$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

14. 极坐标下的累次积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于(　　).

(A)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

(B)$\int_0^2\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

(C)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

(D)$\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

◇ 解答题

15. 改变积分次序$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

16. 改变积分次序并计算$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

17. 计算$\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$.

18. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x+y\leqslant b\}(0<a<b)$.

19. 把二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写成极坐标下的累次积分的形式(先 r 后 θ),其中 D 由直线 $x+y=1,x=1,y=1$ 围成.

20. 把$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写成极坐标的累次积分,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$.

21. 设 $f(x)$ 连续，$f(0)=1$，令 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,(t\geqslant 0)$，求 $F''(0)$.

22. 计算 $I=\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 由曲线 $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ 及 x 轴和 y 轴围成，其中 $a>0,b>0$.

23. 设 D 是由点 $O(0,0)$，$A(1,2)$ 及 $B(2,1)$ 为顶点构成的三角形区域，计算 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

24. 求 $I=\iint\limits_D \dfrac{x\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

25. 求 $I=\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant \dfrac{\pi}{2}\}$.

26. 求 $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant \pi^2$.

27. 求 $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x+y)^2\mathrm{d}y$.

28. 计算 $I=\iint\limits_D y^2\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $x=-2,y=2,x$ 轴及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 围成.

29. 计算 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 1,x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

30. 计算 $\iint\limits_D \sin x^2\cos y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant a^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$.

31. 计算 $\iint\limits_D \dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

32. 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4x,0\leqslant y\leqslant x\}$.

33. 求 $\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的立体.

34. 计算 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由 $x^2+y^2=z^2$ 与 $z=a(a>0)$ 所围成的区域.

35. 计算 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴一周所成的曲面介于 $z=2$ 与 $z=8$ 之间的几何体.

36. 计算 $\iiint\limits_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x^2+y^2=3z$ 围成的几何体.

37. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(0)=0$，求极限 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^5}\iiint\limits_\Omega f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，

其中 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant \sqrt{t^2-x^2-y^2}$.

38. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^3}\iiint\limits_\Omega f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，

其中 $\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant \sqrt{t^2-x^2-y^2}$.

九、曲线积分与曲面积分

Ⅰ 入门练习

◇ 填空题

1. 设 $L:y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$，则$\int_L xy\mathrm{d}s=$________.

2. 设 $L:x^2+y^2=4$，则$\oint_L(x^2+xy^2)\mathrm{d}s=$________.

3. 设 L 为 $y=x^2$ 从点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的一段有向曲线段，则$\int_L y\mathrm{d}x+(2x+1)\mathrm{d}y$ $=$________.

4. 设 L 为 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 从点 $O(0,0)$ 到点 $A(2,0)$ 的一段有向曲线段，则 $\int_L 2y\mathrm{d}x-(x+1)\mathrm{d}y=$________.

5. 设函数 $\varphi(x)$ 可导，$\varphi(0)=2$，又$\int_L xy^2\mathrm{d}x+\varphi(x)y\mathrm{d}y$ 与路径无关，则 $\int_{(1,2)}^{(2,3)}xy^2\mathrm{d}x+\varphi(x)y\mathrm{d}y=$________.

6. 设曲面 Σ 是由平面 $x+2y-z=2$ 被柱面 $x^2+y^2=4$ 所截而成的，则 $\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x}{2}+y-\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}S=$________.

7. 质点在力 $\boldsymbol{F}=\{2x-y,x+2y\}$ 作用下从点 $A(-1,0)$ 沿曲线段 $L:y=\sqrt{1-x^2}$ 到点 $B(1,0)$ 所做的功为________.

8. 设 $\Sigma:z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，取上侧，则$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+2y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

9. 设 $f(x,y,z)=x^2-y^2+2z^2$，则 $\mathrm{div}(\mathbf{grad}f)=$________.

10. 设 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25,\\x+y+z=3\sqrt{3}\end{cases}$ 从 z 轴正向看，L 为逆时针，则 $\oint_L y\mathrm{d}x-(2z+1)\mathrm{d}y+2x\mathrm{d}z=$________.

◇ 解答题

11. 计算$\int_L x^3\mathrm{d}y-(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}x$，其中 $L:y=\sqrt{1-x^2}$ 从点 $B(-1,0)$ 到点 $A(1,0)$.

12. 计算$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 $L:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，取逆时针方向.

13. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(xy+x^2z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma:z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$.

14. 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma: z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$.

15. 计算$\iint\limits_{\Sigma}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，取上侧.

16. 验证$\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$在$x>0$内为某个二元函数$u(x,y)$的全微分，并求$u(x,y)$.

Ⅱ 基础练习

◇ 填空题

1. 设$I=\oint_L \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中$L$是椭圆$4x^2+y^2=1$，$L$为逆时针方向，则$I=$________.

2. 设曲线$L: y=\sqrt{1-x^2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$，则$\int_L(x^2+2xy)\mathrm{d}s=$________.

3. 设$L: \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，且$L$的长度为$l$，则$\oint_L(9x^2+72xy+4y^2)\mathrm{d}s=$________.

4. 设$\Gamma: \begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ x+y+z=1,\end{cases}$则$\oint_\Gamma x^2\mathrm{d}s=$________.

5. $\oint_L x^2y\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y=$________，其中$L: |x|+|y|=1$，方向取逆时针方向.

6. $\int_{(1,1)}^{(2,2)}xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=$________.

7. 设S为平面$x-2y+z=1$位于第四卦限的部分，则$\iint\limits_S\mathrm{d}S=$________.

◇ 选择题

8. 设$\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}(x+y\neq 0)$为某函数的全微分，则$a$为(　　).

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

9. 设L为由$y^2=x+3$及$x=2$围成的区域的边界，取逆时针方向，则$\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$等于(　　).

(A) -2π　　(B) 2π　　(C) π　　(D) 0

10. 设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=1(z\geqslant 0)$，$\Sigma_1$为$\Sigma$在第一卦限的部分，则(　　).

(A) $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$　　(B) $\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$

(C) $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}S$　　(D) $\iint\limits_{\Sigma}xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}S$

11. 设曲面Σ是$z=x^2+y^2$界于$z=0$与$z=4$之间的部分，则$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S$等于(　　)

(A)$2\pi e^4$　　(B)$\pi(e^4-1)$

(C)$2\pi(e^4-1)$　　(D)πe^4

◇ 解答题

12. $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$,其中 L 为由 x 轴,$x^2+y^2=4$ 及 $y=x$ 所围成的第一象限内的区域的边界.

13. 计算$\int_L x\,dy-(2y+1)dx$,其中

(1)L 从原点经过直线 $y=x$ 到点$(2,2)$;

(2)L 从原点经过抛物线 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 到点$(2,2)$.

14. 计算$\int_L (xy^2+y)dx+(x^2y+x)dy$,其中

(1)L 从原点沿直线 $y=x$ 到点$(1,1)$;

(2)L 从原点沿抛物线 $y=x^2$ 到点$(1,1)$.

15. 计算$\int_L (3x+2y+1)dx+xe^{x^2+y^2}dy$,其中 L 为 $x^2+y^2=4$ 第一象限内逆时针方向部分.

16. 利用格林公式计算$\int_L (e^x\sin y+x-y)dx+(e^x\cos y+y)dy$,其中 L 是圆周 $y=\sqrt{2ax-x^2}\ (a>0)$ 上从点 $A(2a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的弧段.

17. 求 $I=\int_L \dfrac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}dx+[4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2})]dy$,其中 L 为 $x^2+y^2=a^2$ 上从点 $A(a,0)$ 沿逆时针方向到点 $B(-a,0)$ 的有向曲线段,其中 $a>0$.

18. 计算 $I=\int_L (e^x+1)\cos y\,dx-[(e^x+x)\sin y-x]dy$,其中 L 为由点 $A(2,0)$ 沿心形线 $r=1+\cos\theta$ 上侧到原点的有向曲线段.

19. 在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x\ (a>0)$ 中,求一条曲线 L,使沿该曲线从点 O 到 A 的积分 $I=\int_L (1+y^3)dx+(2x+y)dy$ 的值最小.

20. 设 $Q(x,y)$ 在平面 xOy 上具有一阶连续的偏导数,且$\int_L 2xy\,dx+Q(x,y)dy$ 与路径无关,且对任意的 t 有$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\,dx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\,dx+Q(x,y)dy$,求 $Q(x,y)$.

21. 设曲线积分$\int_L [f'(x)+2f(x)+e^x]y\,dx+[f'(x)-x]dy$ 与路径无关,且 $f(0)=0$,$f'(0)=\dfrac{1}{2}$,其中 $f(x)$ 一阶连续可导,求 $f(x)$.

22. 计算曲线积分$\oint \dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+4y^2}$,其中 L 为不经过原点的逆时针光滑闭曲线.

23. 计算$\int_L \dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2+4y^2}$,其中 L 为 $x^2+y^2=1$ 从点 $A(1,0)$ 经过 $B(0,1)$ 到 $C(-1,0)$ 的曲线段.

24. 计算 $I=\iint\limits_S \left(2x+\dfrac{4y}{3}+z\right)dS$,其中 S 是平面$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分.

25. 计算$\iint\limits_{\Sigma} z^2 dS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 位于 $z=2$ 下方的部分.

26. 求 $I=\iint\limits_{\Sigma} z dS$，其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 被 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所截的顶部.

27. 计算 $I=\iint\limits_{S}(x^2+y^2+z)dS$，其中 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的部分.

28. 计算$\iint\limits_{S}(x^2+y^2)dS$，其中 $S:x^2+y^2+z^2=2z$.

29. 设 $\Sigma:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1(z\geqslant 0)$，点 $P(x,y,z)\in\Sigma$，π 为曲面 Σ 在点 P 处的切平面，$d(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{d(x,y,z)}dS$.

30. 计算$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} xz^2 dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$，其中 Σ 为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和 $z=0$ 围成区域的表面外侧.

31. 计算$\oint\!\!\!\oint\limits_{S}(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)dS$，其中 $S:x^2+y^2+z^2=R^2$，取外侧.

32. 设 $f(u)$ 连续可导，计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)dydz+\frac{1}{x}f\left(\frac{x}{y}\right)dzdx+zdxdy$，其中曲面 Σ 为由 $y=x^2+z^2+6$ 与 $y=8-x^2-z^2$ 所围成立体的外侧.

33. 求曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} x^2 dydz+y^2 dzdx$，其中 Σ 是 $z=x^2+y^2$ 被 $z=x$ 所截的部分，取下侧.

34. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+3z^2)dydz+(x^3z^2+yz)dzdx-3y^2dxdy$，其中 Σ 为 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $z=0$ 上方部分的下侧.

35. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} x^3 dydz+y^3 dzdx+(z^3+1)dxdy$，其中 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$ 部分的上侧.

36. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant 0)$ 的外侧，计算$\iint\limits_{\Sigma} yzdzdx+2dxdy$.

37. 计算曲面积分$\iint\limits_{S}(x^2+y^2)dzdx+zdxdy$，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 位于第一卦限的部分，方向取下侧.

38. 计算$\iint\limits_{\Sigma} x^2 dydz+y^2 dzdx+z^2 dxdy$，其中 $\Sigma:(x-1)^2+(y-1)^2+\frac{z^2}{4}=1(y\geqslant 1)$，取外侧.

39. 设 $f(x,y,z)$ 是连续函数，Σ 是平面 $x-y+z-1=0$ 在第四卦限部分的上侧，计算

$$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]dydz+[2f(x,y,z)+y]dzdx+[f(x,y,z)+z]dxdy.$$

40. 计算$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$，其中 Σ 是 $z=x^2+4y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 的上侧.

41. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{e}^{z}}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ 被 $z=1$ 和 $z=2$ 截得部分的下侧.

42. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(z-y)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 $\frac{x^{2}}{4}+y^{2}=1$ 位于 $z=0$ 与 $z=3$ 之间的部分的外侧.

43. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}yz(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+zx(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $z=\sqrt{4x-x^{2}-y^{2}}\,(z\geqslant 0)$ 被柱面 $(x-1)^{2}+y^{2}=1$ 所截部分的上侧.

44. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x(z-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ 位于平面 $z=1$ 及 $z=2$ 之间部分的外侧.

45. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}}$，其中 $\Sigma: z=-\sqrt{a^{2}-x^{2}-y^{2}}$，取上侧$(a>0)$.

46. 对右半空间 $x>0$ 内的任意光滑有侧封闭曲面 Σ，有

$$\oiint\limits_{\Sigma}xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

其中 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有一阶连续的偏导数，且 $f(0+0)=1$，求 $f(x)$.

47. 设向量场 $\boldsymbol{A}=\{xz^{2}+y^{2},x^{2}y+z^{2},y^{2}z+x^{2}\}$，求 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ 及 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$.

十、无穷级数

Ⅰ 入门练习

◇ 填空题

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$________.

2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n}}=$________.

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-1)}=$________.

4. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{p}}$ 收敛，则 p 的范围为________.

5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^{2}-x}$ 展开为 $(x+1)$ 的幂级数为________，收敛域为________.

6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^{2}x^{n}$ 的和函数为 $S(x)=$________.

7. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{n}$ 的和函数为________.

8. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}x^n$ 的收敛域为________.

9. 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(2x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，在 $x=3$ 处发散，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为________.

10. 设函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，当 $x\in[-2,2)$ 时，$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0,\\ 2-x, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x<2\end{cases}$ 设 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数 $S(x)$，则 $S(9)=$________.

◇ 解答题

11. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$ 的敛散性.

12. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$ 的敛散性，若收敛是绝对收敛还是条件收敛？

13. 将 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

14. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)x^n$ 的和函数.

15. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{2n+1}$ 的和函数.

16. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数.

17. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+6n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的和函数.

Ⅱ 基础练习

◇ 填空题

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=$________.

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域为________，和函数为________.

3. 设 $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$，则 $f^{(n)}(0)=$________.

4. 函数 $f(x)=\frac{x^3}{(1-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数为________.

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{n(n+1)}$ 在 $-1<x<1$ 内的和函数为________.

6. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径为________.

7. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n\times 4^n}$ 的收敛域为________.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{2^n}=$________.

9. 设函数 $f(x)=\pi x+x^2(-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $b_3=$________.

10. $f(x)$ 为以 2π 为周期的函数，当 $-\pi\leqslant x<\pi$ 时，$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$ 设其傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(11\pi)=$________.

◇ 选择题

11. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{a_n}}{n}$(　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性不确定

12. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散($a_n>0$)，令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$(　　).

(A) 发散　　(B) 收敛于 $\frac{1}{a_1}$

(C) 收敛于 0　　(D) 敛散性不确定

13. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{a}{n}\right)(a>0)$(　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 收敛性与 a 有关

14. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛($u_n>0$)，则下列结论正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho<1$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ 一定收敛　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n}$ 收敛

15. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列正确的是(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 一定收敛　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 一定发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛　　(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 一定收敛

16. 设常数 $k>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$(　　).

(A) 发散　　(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛　　(D) 敛散性与 k 有关

17. 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛

18. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，又 $0<k<\dfrac{\pi}{2}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\dfrac{k}{n}\right)a_{2n}$(　　).

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛

(C) 发散　　(D) 敛散性与 k 有关

19. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则下列级数必收敛的是(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

20. 下列说法正确的是(　　).

(A) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 一定发散

(B) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 一定发散

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 一定收敛

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 一个收敛一个发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 一定发散

21. 下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)^2$ 收敛

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 收敛

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定发散

(D) 若 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定收敛

22. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，则(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 一定发散　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 一定发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都发散　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(|u_n|+|v_n|)$ 一定发散

23. 下列命题正确的是(　　).

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 一定发散

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 一定发散

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 一定收敛

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛

24. 设 a 为任意常数,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin an\pi}{n^2}+(-1)^n\ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)\right]$(　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性与常数 a 有关

25. 下列说法正确的是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 一定收敛

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 一定收敛

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 一定收敛

26. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\,\pi$(　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性不确定

27. 设 $k>0$,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+k}}$(　　).

(A) 发散　　(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛　　(D) 敛散性与 k 的取值有关

28. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2,且 $R_1<R_2$,设 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 R_0,则有(　　).

(A) $R_0=R_2$　　(B) $R_0=R_1$

(C) $R_0<R_1$　　(D) $R_0>R_2$

29. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 的收敛半径为(　　).

(A) 1　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\sqrt{2}$　　(D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

30. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=-1$处收敛，则此级数在$x=2$处(　　).

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛

(C) 发散　　(D) 敛散性不确定

31. 设$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x<\pi,\end{cases}$则以$2\pi$为周期的傅里叶级数在$x=\pi$处收敛于(　　).

(A) $1+\pi^2$　　(B) -1　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) $\frac{\pi^2}{2}$

◇ 解答题

32. 设$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$

$S_0=\int_0^2 f(x)e^{-x}dx$，$S_1=\int_2^4 f(x-2)e^{-x}dx$，…，$S_n=\int_{2n}^{2n+2}f(x-2n)e^{-x}dx$，求$\sum_{n=0}^{\infty}S_n$.

33. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$的敛散性.

34. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)$的敛散性.

35. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$的敛散性.

36. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{2}{n}}}$的敛散性.

37. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$的敛散性.

38. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$的敛散性.

39. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{n^2}$的敛散性.

40. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}\ln\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$的敛散性.

41. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$的敛散性，若收敛是绝对收敛还是条件收敛.

42. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})(a\neq 0)$的敛散性. 若收敛是绝对收敛还是条件收敛.

43. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛，又$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n(n=1,2,\cdots)$. 证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

44. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n u_{n+1}}$收敛，并说明反之不成立.

45. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为发散的正项级数，令$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n(n=1,2,\cdots)$. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{S_n}$收敛.

46. 设 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

47. 设 $u_n>0(n=1,2,\cdots),S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^2}$ 收敛.

48. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，证明下列级数收敛：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

49. 判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$ 的敛散性，若级数收敛，判断其是绝对收敛还是条件收敛.

50. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为两个正项级数. 证明：

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

51. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域.

52. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域.

53. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n^2}$ 的收敛域.

54. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n+3^n)x^n}{n}$ 的收敛域.

55. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 的和函数.

56. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}x^{n-1}$ 的和函数.

57. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}$ 的和函数.

58. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 的和函数.

59. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$ 的和函数.

60. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}(x+1)^n$ 的和函数.

61. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域及和函数.

62. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

63. 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+x+1)^n}{n(n+1)}$的收敛域与和函数.

64. 求幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}(|x|<1)$ 的和函数 $S(x)$ 及其极值.

65. (1) 验证 $y=x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ 满足微分方程$(1-x)y'+y=1+x$;

(2) 求级数 $y=x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ 的和函数.

66. 将 $f(x)=\arctan x$ 展开成 x 的幂级数.

67. 将 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

68. 将 $f(x)=\ln x$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

69. 将 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

70. 设有幂级数 $2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

(1) 求该幂级数的收敛域;

(2) 证明:此幂级数满足微分方程 $y''-y=-1$;

(3) 求此幂级数的和函数.

71. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期,且其在$[-\pi,\pi)$上的表达式为 $f(x)=|x|$,求 $f(x)$ 的傅里叶级数,并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$的和.

72. 将 $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}\leqslant|x|\leqslant\pi\end{cases}$ 展开成傅里叶级数.

十一、常微分方程

Ⅰ 入门练习

◆ 填空题

1. 设 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=y\Delta x+o(\Delta x)$ 且 $y(0)=1$,则 $y(x)=$________.

2. 曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处切线的斜率等于该点坐标之积的两倍,且该曲线过点$(0,2)$,则 $f(x)=$________.

3. 微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+y^2}{x^2}$的通解为________.

4. 微分方程$(1+x^2)y'=xy$ 且满足 $x=0$ 时 $y=1$,则该方程的特解为________.

5. 设 y_1,y_2 为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的两个特解,p,q 为常数且 py_1-qy_2 为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 的解,py_1+qy_2 为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的解,则 $p=$________,$q=$________.

6. $yy'-y^2=1$ 的满足 $y(0)=0$ 的特解为________.

7. 设连续函数 $f(x)$ 满足:$f(x)-\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x$,则 $f(x)=$________.

8. $y_0=2+\mathrm{e}^{3x}$ 为 $y''+py'+qy=0$ 的一个特解,则该微分方程为________.

9. 设 $y_0=\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x$ 为 $y''+py'+qy=0$ 的一个特解,则该微分方程为________.

10. 方程 $yy''-y'^2=y^2$ 的满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的特解为________.

◇ 解答题

11. 求微分方程 $y'-2xy=\mathrm{e}^{x^2}$ 的满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

12. 设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $P(x,y)$ 的切线在 x 轴上的截距等于该点法线在 y 轴上截距的相反数,且曲线经过点(1,0),求该曲线.

13. 求微分方程 $y''+y'^2=1$ 满足 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解.

14. 求微分方程 $y''+y'-2y=(2x+1)\mathrm{e}^x-2$ 的通解.

15. 设 $f(x)$ 连续,且 $f(x)-4\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x$,求 $f(x)$.

Ⅱ 基础练习

◇ 填空题

1. 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为________.

2. 设函数 $\varphi(u)$ 可导且 $\varphi(0)=1$,二元函数 $z=\varphi(x+y)\mathrm{e}^{xy}$ 满足 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$,则 $\varphi(u)=$________.

3. 设 $y=y(x)$ 可导,$y(0)=2$,令 $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$,且 $\Delta y=\frac{xy}{1+x^2}\Delta x+\alpha$,其中 α 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小量,则 $y(x)=$________.

4. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2x+y^2}$ 的通解为________.

5. 微分方程 $y^2\mathrm{d}x+(x^2-xy)\mathrm{d}y=0$ 的通解为________.

6. 连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=3\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t+2$,则 $f(x)=$________.

7. 微分方程 $(2x+3)y''=4y'$ 的通解为________.

8. 微分方程 $yy''=1+y'^2$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$ 的解为________.

9. 设 $y=y(x)$ 过原点,在原点处的切线平行于直线 $y=2x+1$,又 $y=y(x)$ 满足微分方程

$y''-6y'+9y=e^{3x}$，则 $y(x)=$________.

10. 微分方程 $2y''=3y^2$ 满足初始条件 $y(-2)=1, y'(-2)=1$ 的特解为________.

11. 微分方程 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$ 的通解为________.

12. 设二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+y'+qy=Q(x)$ 有特解 $y=3e^{-4x}+x^2+3x+2$，则 $Q(x)=$________，该微分方程的通解为________.

13. 以 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x+\cos x$ 为通解的二阶常系数非齐次线性微分方程为________.

14. 设 $y''-3y'+ay=-5e^{-x}$ 的特解形式为 Axe^{-x}，则其通解为________.

15. 设 $f(x)$ 可导，且 $\int_0^1[f(x)+xf(xt)]dt=1$，则 $f(x)=$________.

◇ 选择题

16. 设三阶常系数齐次线性微分方程有特解 $y_1=e^x, y_2=2xe^x, y_3=3e^{-x}$，则该微分方程为(　　).

(A) $y'''-y''-y'+y=0$　　(B) $y'''+y''-y'-y=0$

(C) $y'''+2y''-y'-2y=0$　　(D) $y'''-2y''-y'+2y=0$

17. 设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 为一阶非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的两个线性无关的特解，则该方程的通解为(　　).

(A) $C[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]$

(B) $C[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]$

(C) $C[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+\varphi_2(x)$

(D) $[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+C\varphi_2(x)$

18. 设 $y=y(x)$ 为微分方程 $2xydx+(x^2-1)dy=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的解，则 $\int_0^{\frac{1}{2}}y(x)dx$ 为(　　)

(A) $-\ln 3$　　(B) $\ln 3$

(C) $-\frac{1}{2}\ln 3$　　(D) $\frac{1}{2}\ln 3$

19. 微分方程 $y''-4y=e^{2x}+x$ 的特解形式为(　　).

(A) $ae^{2x}+bx+c$　　(B) $ax^2e^{2x}+bx+c$

(C) $axe^{2x}+bx^2+cx$　　(D) $axe^{2x}+bx+c$

20. 微分方程 $y''-4y=x+2$ 的通解为(　　).

(A) $(C_1+C_2x)e^{2x}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$　　(B) $(C_1+C_2x)e^{-2x}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$

(C) $C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{1}{4}x$　　(D) $C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$

◇ 解答题

21. 求微分方程 $xy'=y\ln\frac{y}{x}$ 的通解.

22. 求微分方程 $xy''+2y'=e^x$ 的通解.

23. 求微分方程 $xy'+(1-x)y=e^{2x}(x>0)$ 的满足 $\lim\limits_{x\to 0^+}y(x)=1$ 的特解.

24. 求微分方程$(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0(x>0)$ 的满足初始条件 $y(1)=0$ 的解.

25. 求微分方程$(y-x^3)dx-2xdy=0$ 的通解.

26. 求微分方程 $y^2dx+(2xy+y^2)dy=0$ 的通解.

27. 求微分方程 $\cos y\dfrac{dy}{dx}-\cos x\sin^2 y=\sin y$ 的通解.

28. 求微分方程 $xy\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 满足初始条件 $y(e)=2e$ 的特解.

29. 求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.

30. 求微分方程$(xy^2+y-1)dx+(x^2y+x+2)dy=0$ 的通解.

31. 求微分方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2x+y}$ 的通解.

32. 求微分方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{(x+y)^2}$ 的通解.

33. 设$y=e^x$为微分方程$xy'+P(x)y=x$的解,求此微分方程满足初始条件$y(\ln 2)=0$的特解.

34. (1) 设 $f(x)=e^x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$,其中 $f(x)$ 连续,求 $f(x)$.

(2) 设 $f(x)$ 在$(-1,+\infty)$ 内连续且 $f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x tf(t)dt=1(x>-1)$,求 $f(x)$.

35. 用变量代换 $x=\ln t$ 将方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}+e^{2x}y=0$化为 y 关于t 的方程,并求原方程的通解.

36. 设 $f(x)$ 二阶可导,且$\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=x$,求 $f(x)$.

37. 求微分方程 $y''+2x(y')^2=0$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=1$ 的特解.

38. 求微分方程 $yy''=y'^2$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=1$ 的特解.

39. 一条曲线经过点$(2,0)$,且在切点与 y 轴之间的切线长为 2,求该曲线方程.

40. 设曲线 L_1 与 L_2 皆过点$(1,1)$,曲线 L_1 在点(x,y) 处纵坐标与横坐标之商的变化率为 2,曲线 L_2 在点(x,y) 处纵坐标与横坐标之积的变化率为 2,求两曲线所围成区域的面积.

41. 用变量代换 $x=\sin t$ 将方程$(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-4y=0$ 化为 y 关于t 的方程,并求微分方程的通解.

42. 设二阶常系数齐次线性微分方程以 $y_1=e^{2x},y_2=2e^{-x}-3e^{2x}$ 为特解,求该微分方程.

43. 求微分方程 $y''+2y'-3y=(2x+1)e^x$ 的通解.

44. 求 $y''-2y'-e^{2x}=0$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=1$ 的特解.

45. 求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{ax}$ 的通解.

46. 求微分方程 $y''+y=x^2+3+\cos x$ 的通解.

47. 求微分方程 $x^3y'''+2x^2y''-xy'+y=0$ 的通解.

48. 求微分方程 $x^2y''-2xy'+2y=2x-1$ 的通解.

49. 设单位质点在水平面内作直线运动，初速度 $v|_{t=0}=v_0$. 已知阻力与速度成正比（比例系数为 1），问 t 为多少时此质点的速度为 $\frac{v_0}{3}$？并求到此时刻该质点所经过的路程.

50. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)>0$，设 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上的平均值等于 $f(0)$ 与 $f(x)$ 的几何平均数，求 $f(x)$.

51. 设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内，L 上任意一点 M 处的切线与 y 轴总相交，交点为 A，已知 $|MA|=|OA|$，且 L 经过点 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，求 L 的方程.

52. 在上半平面上求一条上凹曲线，其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 的长度的倒数（Q 为法线与 x 轴的交点），且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行.

53. 一半球形雪堆融化速度与半球的表面积成正比，比例系数为 $k>0$，设融化过程中形状不变，设半径为 r_0 的雪堆融化 3 小时后体积为原来的 $\frac{1}{8}$，求全部融化需要的时间.

54. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足 $f(0)=1, f'(x)-f(x)=a(x-1)$. $y=f(x), x=0, x=1, y=0$ 围成的平面区域绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最小，求 $f(x)$.

线性代数部分

一、行列式

◇ 填空题

1. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x+2 & -2 & 3 \\ 1 & 2x+3 & 4 \\ -2 & -1 & 3x+1 \end{vmatrix}$，则 x^2 项的系数为________.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的第一行元素为 1，2，3，$|\boldsymbol{A}|$ 的第二行元素的代数余子式分别为 $a+1$，$a-2$，$a-1$，则 $a=$________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，则 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=$________.

4. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3]$，其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,3)$ 为三维列向量，且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=-2$，则行列式 $|-\boldsymbol{A}_1-2\boldsymbol{A}_2,2\boldsymbol{A}_2+3\boldsymbol{A}_3,-3\boldsymbol{A}_3+2\boldsymbol{A}_1|=$________.

5. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2)$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 是三维列向量，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=4$，则 $|5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}|=$________.

◇ 选择题

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是四阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=6$，则 $\left|-\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \\ & 2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\right|$ 为(　　).

(A)24　　(B)-24　　(C)48　　(D)-48

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 4，$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$，则 $|2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^2|$ 为(　　).

(A)0　　(B)54　　(C)-2　　(D)-24

◇ 解答题

8. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

9. 计算 $D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+2)^2 & (a+4)^2 \\ b^2 & (b+2)^2 & (b+4)^2 \\ c^2 & (c+2)^2 & (c+4)^2 \end{vmatrix}$.

10. 证明：$D=\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

11. 设 $D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.(1) 计算 D； (2) 求 $M_{31}+M_{33}+M_{34}$.

12. 计算 $D=\begin{vmatrix} 2a & -1 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & -1 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & -1 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix}$.

13. 计算 $D=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$.

二、矩阵

◇ 填空题

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$________.

2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $n\geqslant 2$，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$________.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2-9\boldsymbol{E})=$________.

4. $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 的充分必要条件是________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=4$，则 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right|=$________.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=4$，则 $\left|\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}\right|=$________.

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶矩阵，$|\boldsymbol{A}^*|=8$，则 $\left|\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-3\boldsymbol{A}^*\right|=$________.

8. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & t \\ 1 & 9 & t+7 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是三阶非零矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $t=$________.

9. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&2&0\\-1&2&-2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$______.

10. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$______.

11. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$______.

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$______.

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵($n\geqslant 2$)，则 $[(\boldsymbol{A}^*)^*]^{-1}=$______(用 $\boldsymbol{A}^*$ 表示).

14. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=$______.

15. 设 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,0,\cdots,0,a)^{\mathrm{T}}$，其中 $a<0$，又 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则 $a=$______.

16. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足关系 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}=$______.

17. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 阶矩阵且 $r(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{AB})=$______.

18. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&-2\\b&3&c\\2&d&-5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A})=$______.

19. $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}_1^{2009}\boldsymbol{P}_2^{-1}=$______.

◇ 选择题

20. 设 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{AB}$ 为(　　).

(A)$\boldsymbol{O}$　　(B)$-\boldsymbol{E}$　　(C)$\boldsymbol{E}$　　(D)$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$

21. 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,则下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆

(B) 若 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{AB}$ 可逆

(C) 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可逆

(D) 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 都可逆

22. 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵,下列结论不正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵

(B) 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 为对称矩阵

(C)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵

(D)$k\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵

23. 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 皆为 n 阶矩阵,则下列结论正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(B)$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$

(C)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 且 $r(\boldsymbol{A})=n$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(D) 若 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$,则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 或 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$

24. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过若干次初等变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$,则(　　).

(A) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

(B) $|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$

(C) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$ 则 $|\boldsymbol{B}|=0$

(D) 若 $|\boldsymbol{A}|>0$ 则 $|\boldsymbol{B}|>0$

25. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$,且 $r(\boldsymbol{A})=r$,$r(\boldsymbol{B})=r_1$,则(　　).

(A)$r>r_1$

(B)$r<r_1$

(C)$r\geqslant r_1$

(D)r 与 r_1 的关系依矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的情况而定

26. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 阶矩阵,且 $m>n$,令 $r(\boldsymbol{AB})=r$,则(　　).

(A)$r>m$　　(B)$r=m$

(C)$r<m$　　(D)$r\geqslant m$

27. 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶非零矩阵,且 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$,则(　　).

(A)$r(\boldsymbol{A})=1$　　(B)$r(\boldsymbol{A})=2$

(C)$r(\boldsymbol{A})=3$　　(D)$r(\boldsymbol{A})=4$

28. 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,其中 $\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则(　　).

(A)$r(\boldsymbol{B})=n$　　(B)$r(\boldsymbol{B})<n$

(C)$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$　　(D) $|\boldsymbol{A}|=0$

29. 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶可逆矩阵,则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}\\ 2\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的逆矩阵为(　　).

(A)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^{-1}\\ 2\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　(B)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^{-1}\\ 3\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

(C)$\begin{pmatrix} O & \frac{1}{3}A^{-1} \\ \frac{1}{2}B^{-1} & O \end{pmatrix}$　　(D)$\begin{pmatrix} O & \frac{1}{2}B^{-1} \\ \frac{1}{3}A^{-1} & O \end{pmatrix}$

30. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & 2a_{12}+a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & 2a_{22}+a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & 2a_{32}+a_{33} \end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

则 A,B 的关系为(　　).

(A)$B=P_1P_2A$　　(B)$B=P_2P_1A$

(C)$B=P_2AP_1$　　(D)$B=AP_2P_1$

31. 设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33}-2a_{32} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}-2a_{22} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13}-2a_{12} \end{pmatrix}$, 又 $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则(　　).

(A)$B=P_1AP_2$　　(B)$B=P_2AP_1$

(C)$B=P_2^{-1}AP_1$　　(D)$B=P_1^{-1}AP_2^{-1}$

◇ 解答题

32. 设 A,B 为 n 阶矩阵,且 $A^2=A$, $B^2=B$, $(A+B)^2=A+B$. 证明:$AB=O$.

33. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 且 $AX+|A|E=A^*+X$, 求 X.

34. 设四阶矩阵 B 满足 $\left(\frac{1}{4}A^*\right)^{-1}BA^{-1}=2AB+E$, 且 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求矩阵 B.

35. 设 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8E$, 且 $A=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, 求 B.

36. 设 $AX=A+2X$, 其中 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 X.

37. 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $(a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$, 求 A^{-1}.

38. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2+2A-3E=O$. 求:(1)$(A+2E)^{-1}$; (2)$(A+4E)^{-1}$.

39. 设 A 为 n 阶矩阵,且 $A^k=O$,求$(E-A)^{-1}$.

40. 设 A,B 为 n 阶矩阵,$P=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$,$Q=\begin{pmatrix}|B|A^* & O\\ O & |A|B^*\end{pmatrix}$.

(1) 求 $P\cdot Q$; (2) 证明:当 P 可逆时,Q 也可逆.

41. 设 A 为 n 阶可逆矩阵,$A^2=|A|E$. 证明:$A=A^*$.

42. 设 A 为 n 阶矩阵,且 $A^2-2A-8E=O$. 证明:$r(4E-A)+r(2E+A)=n$.

43. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,且 $r(A)=n$,若 $AB=AC$,证明:$B=C$.

44. 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵,若 $A^{\mathrm{T}}A=O$,证明:$A=O$.

45. 证明:$r(A\,\vdots\,AB)=r(A)$.

三、向量

◇ 填空题

1. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 为 4 阶方阵,且 $AX=0$ 的通解为 $X=k(1,1,2,-3)^{\mathrm{T}}$,则 α_2 由 α_1,α_3,α_4 表示的表达式为________.

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,且 $\alpha_1+a\alpha_2+4\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3$ 线性相关,则 a $=$________.

3. 设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,$\beta=\begin{pmatrix}3\\a+1\\1\end{pmatrix}$,$\gamma=\begin{pmatrix}b+2\\a-4\\9\end{pmatrix}$,且 α,β,γ 两两正交,则 $a=$________,$b=$________.

4. 设 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,$\varepsilon_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$和 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$,$e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$,$e_3=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$为三维空间的两组基,则从基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 e_1,e_2,e_3 的过渡矩阵为________.

◇ 选择题

5. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,则(　　).

(A)α_1 可由 α_2,α_3 线性表示

(B)α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

(C)α_4 可由 α_1,α_3 线性表示

(D)α_4 可由 α_1,α_2 线性表示

6. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,则向量组(　　).

(A)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性无关

(B)$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

(C)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

(D)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关

7. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是(　　).

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关

(B) 存在一组不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的维数大于其个数

(D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任一向量均不能由其余 $m-1$ 个向量线性表示

8. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,$\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,但 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,则(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}_1$ 线性相关

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

9. 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$ 线性无关,则 n 维列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充分必要条件是(　　).

(A) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示

(B) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 等价

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$\boldsymbol{\beta}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,$\boldsymbol{\beta}_2$ 不可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,对任意的常数 k 有(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

11. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$,记向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$;(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$;(Ⅲ):$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$,若向量组(Ⅲ)线性相关,则(　　).

(A)(Ⅰ),(Ⅱ)都线性相关

(B)(Ⅰ)线性相关

(C)(Ⅱ)线性相关

(D)(Ⅰ),(Ⅱ)至少有一个线性相关

12. 设向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r_1,向量组(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_2,且向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表示,则(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1+r_2

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s-\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1-r_2

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1+r_2

(D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r_1

13. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 都不是零向量

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量不成比例

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一向量都不可由其余向量线性表示

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一个部分向量组线性无关

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$(　　).

(A) 必有一列元素全为零

(B) 必有两行元素对应成比例

(C) 必有一列是其余列向量的线性组合

(D) 任一列都是其余列向量的线性组合

◇ 解答题

15. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

16. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 为 $m+1$ 维向量，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m(m>1)$. 证明：若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

17. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n(n\geqslant 2)$ 线性无关，证明：当且仅当 n 为奇数时，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

18. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 n 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

19. 证明：若一个向量组中有一个部分向量组线性相关，则该向量组一定线性相关.

20. n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关，且与非零向量 $\boldsymbol{\beta}$ 正交. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

21. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为两两正交的非零向量组，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，并举例说明逆命题不成立.

22. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵$(m>n)$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$. 证明：$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

23. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\gamma}$ 线性相关. 证明：向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表示.

24. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\t+2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}t-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 线性相关，但任意两个向量线性无关，求参数 t.

25. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个线性无关的 n 维列向量，且与向量 $\boldsymbol{\beta}$ 正交. 证明：向量 $\boldsymbol{\beta}$ 为零向量.

26. 设三维向量空间的两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

27. 设三维向量空间 $\mathbf{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,1)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标为$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为$(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，且 $y_1=x_1-x_2-x_3,y_2=-x_1+x_2,y_3=x_1+2x_3$，求从基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵.

四、线性方程组

◇ 填空题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&a\\1&a&9\end{pmatrix}(a<0)$，且 $AX=0$ 有非零解，则 $A^*X=0$ 的通解为________.

2. 设 A 为 n 阶矩阵，A 的各行元素之和为 0 且 $r(A)=n-1$，则方程组 $AX=0$ 的通解为________

3. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $|A|=0$，$A_{ki}\neq 0$，则 $AX=0$ 的通解为________.

4. 设 $\eta_1,\cdots,\eta_s$ 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一组解，则 $k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s$ 为方程组 $AX=b$ 的解的充分必要条件是________.

5. 设 $B\neq O$ 为三阶矩阵，且矩阵 B 的每个列向量为方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\3x_1-x_2+kx_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 的解，则 $k=$________，$|B|=$________.

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的三个解向量，$r(A)=3$，且 $\alpha_1+\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\2\\-8\end{pmatrix}$，则方程组 $AX=b$ 的通解为________.

7. 设方程组 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 无解，则 $a=$________.

8. 设方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=-a_1,\\x_2+x_3=a_2,\\x_3+x_4=-a_3,\\x_4+x_1=a_4\end{cases}$ 有解，则 a_1,a_2,a_3,a_4 满足的条件是________.

◇ 选择题

9. 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，下列命题正确的是(　　).
   (A) 若方程组 $AX=0$ 只有零解，则方程组 $AX=b$ 有唯一解
   (B) 若方程组 $AX=0$ 有非零解，则方程组 $AX=b$ 有无穷多个解
   (C) 若方程组 $AX=b$ 无解，则方程组 $AX=0$ 一定有非零解
   (D) 若方程组 $AX=b$ 有无穷多个解，则方程组 $AX=0$ 一定有非零解

10. 设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，则下列命题正确的是(　　).
   (A) 若 $m<n$，则方程组 $AX=b$ 一定有无穷多个解

(B) 若 $m>n$,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有唯一解

(C) 若 $r(\boldsymbol{A})=n$,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有唯一解

(D) 若 $r(\boldsymbol{A})=m$,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有解

11. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为四维非零列向量组,令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k(0,-1,3,0)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为(　　)

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

12. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,下列向量组中也是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+22\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为(　　).

(A)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(B)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(C)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(D)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

◇ 解答题

14. 求方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+4x_4-3x_5=0,\\2x_1+x_2+3x_3+5x_4-5x_5=0,\\x_1-x_2+3x_3-2x_4-x_5=0,\\3x_1+x_2+5x_3+6x_4-7x_5=0\end{cases}$$

的通解.

15. 参数 a 取何值时,线性方程组 $\begin{cases}ax_1+(a+3)x_2+x_3=-2,\\x_1+ax_2+x_3=a,\\x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$ 有无数个解?并求其通解.

16. 设 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}4\\5\\-3\\11\end{pmatrix}$ 为 $\begin{cases}a_1x_1+2x_2+a_3x_3+a_4x_4=d_1,\\4x_1+b_2x_2+3x_3+b_4x_4=d_2,\\3x_1+c_2x_2+5x_3+c_4x_4=d_3\end{cases}$ 的三个解,求其通解.

17. $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\10\end{pmatrix}$,求极大线性无关组,并把其余向量用极大线性无关组线性表出.

18. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为四维列向量组,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 阶矩阵且 $r(\boldsymbol{A})=1$,设 $(1,-2,1,2)^{\mathrm{T}}$,$(1,0,5,2)^{\mathrm{T}}$,$(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$,$(2,-4,3,a+1)^{\mathrm{T}}$ 皆为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.(1) 求常数 a; (2) 求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

20. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_5$,$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+6\boldsymbol{\alpha}_5$,求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

21. 四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有三个解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 且 $r(\boldsymbol{A})=3$,设 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-6\\4\\-2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\4\end{pmatrix}$,求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

22. $\boldsymbol{A}_{n\times n}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{B}_{n\times n}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1)$,当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时,方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 是否有非零解?

23. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{pmatrix}$.

(1) a,b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合?

(2) a,b 为何值时,$\boldsymbol{\beta}$ 可唯一表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合?

24. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的前 $n-1$ 个列向量线性相关,后 $n-1$ 个列向量线性无关,且 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(n-1)\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$.

(1) 证明:方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

25. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}$,且 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有两个线性无关的解向量,求 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

26. 就 a,b 的不同取值,讨论方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1,\\2x_1+(a+2)x_2-(b+2)x_3=3,\\-3ax_2+(a+2b)x_3=-3\end{cases}$ 解的情况.

27. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\a_1&a_2&a_3&a_4\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&a_4^2\\a_1^3&a_2^3&a_3^3&a_4^3\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a_1^3\\a_2^3\\a_3^3\\a_4^3\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$.

(1) 若 $a_i\neq a_j(i\neq j)$，求 $A^TX=b$ 的解；

(2) 若 $a_1=a_3=a\neq 0,a_2=a_4=-a$，求 $A^TX=b$ 的通解.

28. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，$A\beta\neq 0$. 证明：齐次线性方程组 $BY=0$ 只有零解，其中 $B=(\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_s)$.

29. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&0&-1\\3&-2&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&b+2\\a&-3\\5&-1\end{pmatrix}$，已知 $AX=B$ 有解，求 X.

五、矩阵的特征值和特征向量

◇ 填空题

1. 设 A 是三阶矩阵，其三个特征值为 $-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1$，则 $|4A^*+3E|=$________.

2. 设 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&a\\2&a&b\end{pmatrix}$ 的特征向量，则 $a=$________，$b=$________.

3. 已知 $A=\begin{pmatrix}0&-2&a\\1&3&5\\0&0&2\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，则 $a=$________.

4. 设 A 为三阶实对称矩阵，且 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\a+1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-6\\3\\-2a\end{pmatrix}$ 为 A 的不同特征值对应的特征向量，则 $a=$________.

5. 设 $A\sim B$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&x&3\\0&4&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}6&0&0\\2&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则 $x=$________，$y=$________.

6. 设 A 是三阶实对称矩阵，其特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=5$，且 $\lambda_1=3$ 对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，则 $\lambda_2=\lambda_3=5$ 对应的线性无关的特征向量为________.

7. 设 α,β 为三维非零列向量，$(\alpha,\beta)=3$，$A=\alpha\beta^T$，则 A 的特征值为________.

◇ 选择题

8. 设 A 是 n 阶矩阵，下列结论正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都不可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆

(B)$r(\boldsymbol{A})<n,r(\boldsymbol{B})<n$ 的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{AB})<n$

(C)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

(D)$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\sim\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值为(　　).

(A) $\dfrac{|\boldsymbol{A}|^{n-1}}{\lambda}$　　(B) $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$

(C)$\lambda|\boldsymbol{A}|$　　(D)$\lambda|\boldsymbol{A}|^{n-1}$

10. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=0,\lambda_3=1$,则下列结论不正确的是(　　).

(A) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆

(B) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹为零

(C) 特征值 $-1,1$ 对应的特征向量正交

(D) 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有一个线性无关的解向量

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,又 $\lambda=-2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值,其对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3$,下列向量中是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$　　(B)$3\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$　　(D)$2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2$

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵,下列结论不正确的是(　　).

(A) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 合同

(B) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都是实数

(C) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{PAP}^{-1}$ 为对角阵

(D) 存在正交阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角阵

13. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似,则(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值都是单值

(B)$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵

(C)$\boldsymbol{A}$ 存在 n 个线性无关的特征向量

(D)$\boldsymbol{A}$ 一定为 n 阶实对称矩阵

14. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为四维非零列向量,且 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$,令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关特征向量个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

15. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵,下列矩阵不是正定矩阵的是(　　).

(A)$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$　　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

(C)$\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$　　(D)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$

◇ 解答题

16. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\a&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量.

(1) 求 a;

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量；

(3) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵.

17. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&a\\1&1&b\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 求 a,b 及 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量.

(2) $\boldsymbol{A}$ 可否对角化？若可对角化，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

18. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，并证明 $\boldsymbol{A}$ 不可以对角化.

19. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&5\end{pmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量且 $\lambda=2$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

20. 设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 的实特征值的绝对值为 1.

21. 设 λ_0 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(1) 证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 特征值相等；

(2) 求 $\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$ 的特征值；

(3) 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，求 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

22. 设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量. 证明：$\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

23. $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\neq 0$，求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，并证明 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

24. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，其中 $a_1\neq 0$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$.

(1) 求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值及其对应的线性无关的特征向量.

25. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，求 $|6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|$.

26. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，其对应的线性无关的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\beta}$.

27. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}$，证明：λ^2 是 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值，$\boldsymbol{X}$ 为特征向量. 若 $\boldsymbol{A}^2$ 有特征值 λ，其对应的特征向量为 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}$ 是否一定为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量？说明理由.

28. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵.

(1) 是否有 $\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $1,2,\cdots,n$，证明：$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

29. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零列向量，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$.

(1) 证明：$\boldsymbol{A}$ 可逆并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$；

(2) 证明：$\boldsymbol{\alpha}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

30. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$ 有一个特征值为 3.

(1) 求 y；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵.

31. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A})=1$，$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，设 $(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值对应的特征向量.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

32. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=8,\lambda_2=\lambda_3=2$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=8$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$，属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，求属于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的另一个特征向量.

33. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(b\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$ 且 $a\neq b$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 可对角化.

34. 设非零 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 不可以相似对角化.

35. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\3&6&1\end{pmatrix}$.

(1) 证明：$\boldsymbol{A}$ 可对角化；

(2) 求 $\boldsymbol{A}^m$.

36. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x,y 满足的条件.

37. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，且存在自然数 k，使得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 不可以对角化.

38. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i\,(i=1,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

39. 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-3&3\\6&x&-6\\y&-9&13\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量. 求 x,y，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 对应的特征值 μ.

40. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{A}|=-1$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征向量，求 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 λ 及 a,b,c 和 $\boldsymbol{A}$ 对应的特征值 μ.

41. 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

(1) 求 a,b；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

42. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

(1) 求 a；

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

43. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，且存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得 $\boldsymbol{A\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$. 求常数 a.

44. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，又 $|\boldsymbol{A}|=2$，求 $|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{E}|$.

45. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$，其对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)$，求 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}_1$.

六、二次型

◇ 填空题

1. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_2)^2+4x_2x_3$ 的矩阵为________.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 经过施密特正交规范化后的向量组为________.

3. 设二次型 $2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+ax_2x_3$ 的秩为 2，则 $a=$________.

4. 设 $5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 为正定二次型，则 t 的取值范围是________.

◇ 选择题

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵，则(　　).

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$，使得 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1$，$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{BP}_2$ 为对角矩阵

(B) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$，使得 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}_1$，$\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BQ}_2$ 为对角矩阵

(C) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

6. n 阶实对称矩阵 A 正定的充分必要条件是(　　).

(A)A 无负特征值　　(B)A 是满秩矩阵

(C)A 的每个特征值都是单值　　(D)A^{-1} 是正定矩阵

7. 下列说法正确的是(　　).

(A) 任一个二次型的标准形是唯一的

(B) 若两个二次型的标准形相同,则两个二次型对应的矩阵的特征值相同

(C) 若一个二次型的标准形系数中没有负数,则该二次型为正定二次型

(D) 二次型的标准形不唯一,但规范形是唯一的

8. 设 A 为可逆的实对称矩阵,则二次型 X^TAX 与 $X^TA^{-1}X$(　　).

(A) 规范形与标准形都不一定相同

(B) 规范形相同但标准形不一定相同

(C) 标准形相同但规范形不一定相同

(D) 规范形和标准形都相同

9. 设 n 阶矩阵 A 与对角矩阵合同,则 A 是(　　).

(A) 可逆矩阵　　(B) 实对称矩阵

(C) 正定矩阵　　(D) 正交矩阵

10. 设 A,B 都是 n 阶矩阵,且存在可逆矩阵 P,使得 $AP=B$,则(　　).

(A)A,B 合同

(B)A,B 相似

(C) 方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解

(D)$r(A)=r(B)$

11. 设 A,B 为 n 阶实对称矩阵,则 A 与 B 合同的充分必要条件是(　　).

(A)$r(A)=r(B)$　　(B) $|A|=|B|$

(C)$A\sim B$　　(D)A,B 与同一个实对称矩阵合同

12. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则 A 与 B(　　).

(A) 相似且合同　　(B) 相似不合同

(C) 合同不相似　　(D) 不合同也不相似

13. 设 A,B 为三阶矩阵,且特征值均为 $-2,1,1$,以下命题:

(1)$A\sim B$;(2)A,B 合同;(3)A,B 等价;(4) $|A|=|B|$ 中正确的命题个数为(　　).

(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)4 个

◇ 解答题

14. 用配方法化下列二次型为标准形:

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-5x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3.$$

15. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$,$\mathrm{tr}(A)=1$,又 $B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 且 $AB=O$.

(1) 求正交矩阵 Q，使得在正交变换 $X=QY$ 下二次型化为标准形.

(2) 求矩阵 A.

16. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，A 的主对角线上元素之和为 3，又 $AB+B=O$，其中

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}.$$

(1) 求正交变换 $X=QY$ 将二次型化为标准形；

(2) 求矩阵 A.

17. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ 经过正交变换化为标准形 $5y_1^2+by_2^2-4y_3^2$，求：

(1) 常数 a,b；

(2) 正交变换的矩阵 Q.

18. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a-1)x_1^2+(a-1)x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2\ (a>0)$ 的秩为 2.

(1) 求 a；

(2) 用正交变换法化二次型为标准形.

19. 设 n 阶实对称矩阵 A 的秩为 r，且满足 $A^2=A$（A 称为幂等阵）.

求：(1) 二次型 X^TAX 的标准形；　(2) $|E+A+A^2+\cdots+A^n|$ 的值.

20. 设 A 为 n 阶实对称可逆矩阵，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j$.

(1) 记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，把二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式；

(2) 二次型 $g(X)=X^TAX$ 是否与 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 合同？

21. 设 $C=\begin{pmatrix}A&B^T\\B&D\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，令 $P=\begin{pmatrix}E&-A^{-1}B^T\\O&E\end{pmatrix}$，

(1) 求 P^TCP；

(2) 证明：$D-BA^{-1}B^T$ 为正定矩阵.

22. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1{}^2+4x_2{}^2+2x_3{}^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 为正定二次型，求 t 的范围.

23. 设 A 是 n 阶正定矩阵，证明：$|E+A|>1$.

24. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-2x_2x_3+x_3^2$.

(1) 设 $f(x_1,x_2,x_3)=0$，求 X；

(2) 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

25. 设 A 为三阶实对称矩阵，存在正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&l_{12}&l_{13}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&l_{22}&l_{23}\\0&l_{32}&l_{33}\end{pmatrix}$，使得 $X^TAX=y_2^2+y_3^2$.

(1) 求正交矩阵 Q.

(2) 求矩阵 A.

概率统计部分

一、随机事件与概率

◇ 填空题

1. 设 $P(B)=0.5, P(A-B)=0.3$，则 $P(A+B)=$________.

2. 设 $P(A)=0.6, P(B)=0.5, P(A-B)=0.4$，则 $P(B-A)=$________, $P(A+B)$ $=$________.

3. 设事件 A, B 相互独立，$P(A)=0.3$，且 $P(A+\overline{B})=0.7$，则 $P(B)=$________.

4. 设 A, B 为两个随机事件，且 $P(A)=0.7, P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$________.

5. 设 $P(A)=0.4$，且 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，则 $P(B)=$________.

6. 设 A, B 为两个随机事件，则 $P\{(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})\}=$________.

7. 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{8}$，则 A, B, C 都不发生的概率为________.

8. 设事件 A, B, C 两两独立，满足 $ABC=\varnothing, P(A)=P(B)=P(C)$，且 $P(A+B+C)=\dfrac{9}{16}$，则 $P(A)=$________.

9. 有 16 件产品，12 个一等品，4 个二等品. 从中任取 3 个，至少有一个是一等品的概率为________.

10. 设口袋中有 10 只红球和 15 只白球，每次取一个球，取后不放回，则第二次取得红球的概率为________.

11. 从 n 阶行列式的展开式中任取一项，此项不含 a_{11} 的概率为 $\dfrac{8}{9}$，则 $n=$________.

12. 设一次试验中，出现事件 A 的概率为 p，则 n 次试验中 A 至少发生一次的概率为________, A 至多发生一次的概率为________.

◇ 选择题

13. 对任意两个事件 A 和 B，若 $P(AB)=0$，则(　　).

(A) $AB=\varnothing$　　(B) $\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$

(C) $P(A)P(B)=0$　　(D) $P(A-B)=P(A)$

14. 在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电，以 E 表示事件“电炉断电”，而 $T_{(1)} \leqslant T_{(2)}$

$\leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于(　　).

(A)$\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$　　(B)$\{T_{(2)} \geqslant t_0\}$

(C)$\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$　　(D)$\{T_{(4)} \geqslant t_0\}$

15. 设 A,B 为任意两个不相容的事件且 $P(A)>0,P(B)>0$，则下列结论正确的是(　　).

(A)$\overline{A}\,\overline{B}=\varnothing$　　(B)$\overline{A}\,\overline{B}\neq\varnothing$

(C)$P(AB)=P(A)P(B)$　　(D)$P(A-B)=P(A)$

16. 设 A,B 为两个随机事件，其中 $0<P(A)<1,P(B)>0$ 且 $P(B\mid A)=P(B\mid\overline{A})$，下列结论正确的是(　　).

(A)$P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$　　(B)$P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$

(C)$P(AB)=P(A)P(B)$　　(D)$P(AB)\neq P(A)P(B)$

17. 设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，且 $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$，则下列结论正确的是(　　).

(A) 事件 A,B 互斥　　(B) 事件 A,B 独立

(C) 事件 A,B 不独立　　(D) 事件 A,B 对立

18. 设 A,B,C 是相互独立的随机事件，且 $P(A)\neq 0,0<P(C)<1$，则下列给出的四对事件中不相互独立的是(　　).

(A)$\overline{A+B}$ 与 C　　(B)$\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$

(C)$\overline{A-B}$ 与 $\overline{C}$　　(D)$\overline{AB}$ 与 $\overline{C}$

◇ 解答题

19. 袋中有 12 只球，其中红球 4 个，白球 8 个，从中一次抽取两个球，求下列事件发生的概率：

(1) 两个球中一个是红球一个是白球；

(2) 两个球颜色相同.

20. 一个盒子中 5 个红球，5 个白球，现按照如下方式，求取到 2 个红球和 2 个白球的概率.

(1) 一次性抽取 4 个球；(2) 逐个抽取，取后无放回；(3) 逐个抽取，取后放回.

21. 10 件产品中 4 件为次品，6 件为正品，现抽取 2 件产品，逐个抽取，取后无放回.

(1) 求第一件为正品，第二件为次品的概率；

(2) 在第一件为正品的情况下，求第二件为次品的概率；

(3) 求第二件为正品的概率.

22. 10 件产品有 3 件次品，7 件正品，每次从中任取一件，取后不放回，求下列事件的概率：

(1) 第三次取得次品；(2) 第三次才取得次品；(3) 已知前两次没有取到次品，第三次取得次品；(4) 不超过三次取到次品.

23. 一批产品有 10 个正品 2 个次品，任意抽取两次，每次取一个，抽取后不放回，求第二次抽取次品的概率.

24. 甲乙丙厂生产产品所占的比重分别为 60%，25%，15%，次品率分别为 3%，5%，8%，求任取一件产品是次品的概率.

25. 现有三个箱子，第一个箱子有 4 个红球，3 个白球；第二个箱子有 3 个红球，3 个白球；第三个箱子有 3 个红球，5 个白球；先取一只箱子，再从中取一只球.

(1) 求取到白球的概率;

(2) 若取到红球,求红球是从第二个箱子中取出的概率.

二、随机变量及其分布

◇ 填空题

1. 设随机变量 X 的分布律为 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ c-c^2 & c & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$,则 $c=$______.

2. 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,且方程 $x^2+4x+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$,则 $\mu=$______.

3. 设 $X \sim B(2,p)$,$Y \sim B(3,p)$,且 $P(X \geqslant 1)=\frac{5}{9}$,则 $P(Y \geqslant 1)=$______.

4. 设 $X \sim N(2,\sigma^2)$,且 $P(2 \leqslant X \leqslant 4)=0.4$,则 $P(X<0)=$______.

5. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布,且 $P(X=0)=\frac{1}{2}P(X=1)$,则 $P(X \geqslant 1)$ $=$______.

6. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,且 $E[(X-1)(X+2)]=8$,则 $\lambda=$______.

7. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} \frac{3x^2}{a^3}, & 0<x<a, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 若 $P\{X>1\}=\frac{7}{8}$,则 a $=$______.

8. 一工人同时独立制造三个零件,第 k 个零件不合格的概率为 $\frac{1}{k+1}(k=1,2,3)$,以随机变量 X 表示三个零件中不合格的零件个数,则 $P(X=2)=$______.

9. 设随机变量 X 的分布律为 $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$,则 $Y=X^2+2$ 的分布律为______.

10. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$,且 $Y=9X^2$,则 Y 的密度函数为______.

11. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$,则 $Y=2X$ 的密度函数为 $f_Y(y)=$ ______.

12. 设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 0.25, & 0 \leqslant x<1, \\ 0.5, & 1 \leqslant x<3, \\ 1, & x \geqslant 3, \end{cases}$$

则 $Y=X^2+1$ 的分布函数为______.

◇ 选择题

13. 设 X 和 Y 为相互独立的连续型随机变量，它们的密度函数分别为 $f_1(x)$，$f_2(x)$，它们的分布函数分别为 $F_1(x)$，$F_2(x)$，则（　　）.

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 为某一随机变量的密度函数

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 为某一随机变量的密度函数

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 为某一随机变量的分布函数

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 为某一随机变量的分布函数

14. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$. 如果随机变量 X 与 $-X$ 分布函数相同，则（　　）.

(A) $F(x)=F(-x)$　　(B) $F(x)=-F(-x)$

(C) $f(x)=f(-x)$　　(D) $f(x)=-f(-x)$

15. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}Ae^{-x}, & x\geqslant a \\ 0, & x<a\end{cases}$ ($a>0$，A 为常数)，则 $P\{a<X<a+b\}$ 的值（　　）.

(A) 与 b 无关，且随 a 的增加而增加

(B) 与 b 无关，且随 a 的增加而减少

(C) 与 a 无关，且随 b 的增加而增加

(D) 与 a 无关，且随 b 的增加而减少

16. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(|X-\mu|<2\sigma)$（　　）.

(A) 与 μ 及 σ^2 都无关　　(B) 与 μ 有关，与 σ^2 无关

(C) 与 μ 无关，与 σ^2 有关　　(D) 与 μ 及 σ^2 都有关

17. 设 $X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，令 $p=P(X\leqslant\mu-4)$，$q=P(Y\geqslant\mu+5)$，则（　　）.

(A) $p>q$　　(B) $p<q$

(C) $p=q$　　(D) p,q 的大小由 μ 的取值确定

18. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其分布函数为 $F(x)$，则对任意常数 a，有（　　）.

(A) $F(a+\mu)+F(a-\mu)=1$　　(B) $F(\mu+a)+F(\mu-a)=1$

(C) $F(a)+F(-a)=1$　　(D) $F(a-\mu)+F(\mu-a)=1$

19. 设随机变量 $X\sim U[1,7]$，则方程 $x^2+2Xx+9=0$ 有实根的概率为（　　）.

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{2}{3}$　　(D) 0

◇ 解答题

20. 设一汽车沿街道行驶，需要经过三个有红绿灯的路口，每个信号灯显示是相互独立的，且红绿灯显示时间相等，以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口个数，求 X 的分布.

21. 设袋中有 5 个球，其中 3 个新球，2 个旧球，从中任取 3 个球，用 X 表示 3 个球中的新球个数，求 X 的分布律与分布函数.

22. 设 $X\sim f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求 $F(x)$;

(2) 求 $P\left(-2<X<\frac{1}{4}\right)$.

23. 设 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{2}{9}, & 3\leqslant x\leqslant 6,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 若 $P(X\geqslant k)=\frac{2}{3}$,求 k 的取值范围.

24. 有三个盒子,第一个盒子有 4 个红球 1 个黑球,第二个盒子有 3 个红球 2 个黑球,第三个盒子有 2 个红球 3 个黑球,如果任取一个盒子,从中任取 3 个球,以 X 表示红球个数.

(1) 写出 X 的分布律;

(2) 求所取到的红球数不少于 2 个的概率.

25. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}Ae^{x}, & x<0,\\ B, & 0\leqslant x<1,\\ 1-Ae^{-(x-1)}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(1) 求常数 A,B;

(2) 求 X 的密度函数 $f(x)$;

(3) 求 $P\left(X>\frac{1}{3}\right)$.

26. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}A\cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

(1) 求常数 A;

(2) 求 X 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 内的概率;

(3) 求 X 的分布函数 $F(x)$.

27. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其分布函数为 $F(x)$,对任意实数 a,讨论 $F(-a)+F(a)$ 与 1 的大小关系.

28. 设 $X\sim N(0,1)$,$Y=X^2$,求 Y 的概率密度函数.

29. 设 $X\sim U(0,2)$,$Y=X^2$,求 Y 的概率密度函数.

30. 设 $X\sim E(2)$,其分布函数为 $F(x)$,已知 $Y=F(X)$,求 $f_Y(y)$.

三、多维随机变量及其分布

◇ 填空题

1. 设 $X\sim P(1)$,$Y\sim P(2)$,且 X,Y 相互独立,则 $P(X+Y=2)=$________.

2. 设随机变量 X,Y 相互独立且都服从二项分布 $B(n,p)$,则 $P\{\min(X,Y)=0\}=$________.

3. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}a\mathrm{e}^{-2x-3y}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$则$a=$________，$P(X>Y)=$________.

4. 设随机变量$X\sim N(0,\sigma^2)$，$Y\sim N(0,4\sigma^2)$，且$P(X\leqslant 1,Y\leqslant -2)=\dfrac{1}{4}$，则$P(X>1,Y>-2)$$=$________.

◇ 选择题

5. 设随机变量$X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}(i=1,2)$，且满足$P(X_1X_2=0)=1$，则$P(X_1=X_2)$等于(　　).

(A)0　　(B)$\dfrac{1}{4}$　　(C)$\dfrac{1}{2}$　　(D)1

6. 设随机变量X,Y相互独立，$X\sim U(0,2)$，$Y\sim E(1)$，则$P(X+Y>1)$等于(　　).

(A)$1-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$　　(B)$1-\mathrm{e}$　　(C)e　　(D)$2\mathrm{e}$

7. 设随机变量(X,Y)的分布函数为$F(x,y)$，用它表示概率$P(-X<a,Y<y)$，则下列结论正确的是(　　).

(A)$1-F(-a,y)$

(B)$1-F(-a,y-0)$

(C)$F(+\infty,y-0)-F(-a,y-0)$

(D)$F(+\infty,y)-F(-a,y)$

8. 设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,1)$，则(　　).

(A)$P(X+Y\leqslant 0)=\dfrac{1}{2}$　　(B)$P(X+Y\leqslant 1)=\dfrac{1}{2}$

(C)$P(X-Y\leqslant 0)=\dfrac{1}{2}$　　(D)$P(X-Y\leqslant 1)=\dfrac{1}{2}$

9. 设X,Y相互独立且都服从分布$N(0,4)$，则(　　).

(A)$P\{\max(X,Y)>0\}=\dfrac{1}{4}$　　(B)$P\{\min(X,Y)\geqslant 0\}=\dfrac{1}{4}$

(C)$P(X+Y>0)=\dfrac{1}{4}$　　(D)$P(X-Y\geqslant 0)=\dfrac{1}{4}$

10. 设X,Y为两个随机变量，$P(X\leqslant 1,Y\leqslant 1)=\dfrac{4}{9}$，$P(X\leqslant 1)=P(Y\leqslant 1)=\dfrac{5}{9}$，则$P\{\min(X,Y)\leqslant 1\}=$(　　).

(A)$\dfrac{4}{9}$　　(B)$\dfrac{20}{81}$　　(C)$\dfrac{2}{3}$　　(D)$\dfrac{1}{3}$

11. 设二维随机变量(X,Y)在区域$D:x^2+y^2\leqslant 9a^2(a>0)$上服从均匀分布，$p=P(X^2+9Y^2\leqslant 9a^2)$，则(　　).

(A)p 的值与 a 无关,且 $p=\frac{1}{2}$

(B) p 的值与 a 无关,且 $p=\frac{1}{3}$

(C)p 的值随 a 值的增大而增大

(D) p 的值随 a 值的增大而减少

12. 设(X,Y)服从二维正态分布,则下列说法不正确的是(　　).

(A)X,Y 一定相互独立

(B)X,Y 的任意线性组合 $l_1X+l_2Y(l_1,l_2$ 不全为零) 服从正态分布

(C)X,Y 都服从正态分布

(D)$\rho=0$ 时 X,Y 相互独立

◇ 解答题

13. 设 X,Y 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$,$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,且 $P(XY=0)=1$.

(1) 求(X,Y)的联合分布;

(2)X,Y 是否独立?

14. 设起点站上车人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布,每位乘客中途下车的概率为 $p(0<p<1)$,且中途下车与否相互独立,以 Y 表示中途下车人数.

(1) 求在发车时有 n 个乘客的情况下,中途有 m 个乘客下车的概率;

(2) 求(X,Y)的概率分布.

15. 袋中有 10 个大小相等的球,其中 6 个红球 4 个白球,随机抽取 2 次,每次取 1 个,定义两个随机变量如下:

$$X=\begin{cases}1,\text{第 1 次抽到红球},\\0,\text{第 1 次抽到白球},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1,\text{第 2 次抽到红球},\\0,\text{第 2 次抽到白球},\end{cases}$$

就下列两种情况,求(X,Y)的联合分布律:

(1) 第一次抽取后放回;

(2) 第一次抽取后不放回.

16. 设(X,Y)在区域 $D:0<x<1,|y|\leqslant x$ 内服从均匀分布.

(1) 求随机变量 X 的边缘密度函数;

(2) 设 $Z=2X+1$,求 $D(Z)$.

17. 设(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1,0<x<1,0<y<2x,\\0,\text{其他}.\end{cases}$求:

(1)(X,Y)的边缘密度函数;

(2)$Z=2X-Y$ 的密度函数.

18. 随机变量(X,Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}A(1-\sqrt{x^2+y^2}),x^2+y^2\leqslant 1,\\0,\qquad x^2+y^2>1.\end{cases}$

(1) 求常数 A;

(2) 求(X,Y)落在区域$x^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}$内的概率.

19. 设两台同样的记录仪,每台无故障工作的时间服从参数为5的指数分布,首先开动其中一台,当发生故障时停用而另一台自动开动.求两台记录仪无故障工作的总时间T的概率密度.

20. 设X,Y相互独立,且$X\sim N(1,2)$,$Y\sim N(0,1)$,求$Z=2X-Y+3$的密度函数.

21. 设X在区间$[-2,2]$上服从均匀分布,令$Y=\begin{cases}-1, & X\leqslant -1,\\ 1, & X>-1,\end{cases}$ $Z=\begin{cases}-1, & X\leqslant 1,\\ 1, & X>1.\end{cases}$求:

(1)Y,Z的联合分布律;

(2)$D(Y+Z)$.

22. 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	0.1	0.3
1	0.3	0.3

则在$Y=1$的条件下求随机变量X的条件概率分布.

23. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度为$f(x,y)=\begin{cases}cx\mathrm{e}^{-x(y+1)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求c;

(2) 求X,Y的边缘密度,问X,Y是否独立?

(3) 求$Z=\max(X,Y)$的密度.

24. 设随机变量(X,Y)的联合密度为$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$求:

(1)X,Y的边缘密度;

(2)$P\left\{Y<\frac{1}{8}\,\middle|\,X=\frac{1}{4}\right\}$.

25. 设(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}ax\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求a;

(2) 求X,Y的边缘密度,并判断其独立性;

(3) 求$f_{X|Y}(x\mid y)$.

26. 设一设备开机后无故障工作时间X服从指数分布,平均无故障工作时间为5小时,设备定时开机,出现故障自动关机,而在无故障下工作2小时便自动关机,求该设备每次开机无故障工作时间Y的分布.

27. 设$(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 判断X,Y是否独立,说明理由;

(2) 判断X,Y是否不相关,说明理由;

(3) 求$Z=X+Y$的密度.

28. 设随机变量 X,Y 相互独立且都服从标准正态分布,令 $U=X^2+Y^2$.求:

(1)$f_U(u)$;

(2)$P\{U>D(U)\mid U>E(U)\}$.

29. 设 X,Y 相互独立,且 $X\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$,$Y\sim N(0,1)$,令 $U=\max\{X,Y\}$,

求 $P\{1<U\leqslant 1.96\}$(其中 $\Phi(1)=0.841$,$\Phi(1.96)=0.975$).

30. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$,$Y\sim E(1)$,且 X,Y 相互独立,求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

31. 设$(X,Y)\sim N(1,1;1,4;0)$.

求:(1)$P\{X+Y\leqslant 2\}$.

(2)$P\{XY+1<X+Y\}$.

四、随机变量的数字特征

◇ 填空题

1. 随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0,\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 则 $D(X)=$________.

2. 从学校乘汽车到火车站的途中有三个交通岗,假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的,且遇到红灯的概率为$\frac{2}{5}$.设 X 表示途中遇到红灯的次数,则 $E(X)=$________.

3. 设随机变量 $X\sim B(n,p)$,且 $E(X)=5$,$E(X^2)=\frac{85}{3}$,则 $n=$________,$p=$________.

4. 随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=k\mathrm{e}^{-|x|}$ $(-\infty<x<+\infty)$,则 $E(X^2)=$________.

5. 设 X 表示 12 次独立重复射击击中目标的次数,每次击中目标的概率为 0.5,则 $E(X^2)=$________.

6. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X>\sqrt{D(X)}\}=$________.

7. 设随机变量 X 在$[-1,2]$上服从均匀分布,随机变量 $Y=\begin{cases}-1, & X<0,\\ 0, & X=0,\\ 1, & X>0,\end{cases}$ 则 $D(Y)=$________.

8. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立,且 $X_1\sim U[0,6]$,$X_2\sim N(0,2^2)$,$X_3\sim P(3)$,记 $Y=X_1-2X_2+3X_3$,则 $D(Y)=$________.

9. 设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布,令 $Y=4X-3$,则 $E(Y)=$________,$D(Y)=$________.

10. 若随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$,且 $P(2<X<4)=0.3$,则 $P(X<0)=$________.

11. 设随机变量 X,Y,Z 相互独立,且 $X\sim U[-1,3]$,$Y\sim B\left(10,\frac{1}{2}\right)$,$Z\sim N(1,3^2)$,且随机变量 $U=X+2Y-3Z+2$,则 $D(U)=$________.

12. 设常数 $a \in [0,1]$，随机变量 $X \sim U[0,1]$，$Y=|X-a|$，则 $E(XY)=$______.

13. 设随机变量 X,Y 相互独立，$D(X)=4D(Y)$，令 $U=3X+2Y, V=3X-2Y$，则 $\rho_{UV}=$______.

14. 设 X,Y 为两个随机变量，且 $D(X)=9, Y=2X+3$，则 X,Y 的相关系数为______.

15. 设 X,Y 为两个随机变量，$D(X)=4, D(Y)=9$，相关系数为 $\frac{1}{2}$，则 $D(3X-2Y)$ $=$______.

16. 设 X,Y 为两个随机变量，$E(X)=E(Y)=1, D(X)=9, D(Y)=1$，且 $\rho_{XY}=-\frac{2}{3}$，则 $E(X-2Y+3)^2=$______.

17. 设 X,Y 相互独立且都服从标准正态分布，则 $E|X-Y|=$______，$D|X-Y|=$______.

18. 设 $D(X)=1$，$D(Y)=9$，$\rho_{XY}=-0.3$，则 $\mathrm{Cov}(X, Y)=$______.

◇ 选择题

19. 设 X 为随机变量，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，则对任意常数 C 有(　　).

(A)$E[(X-C)^2]=E[(X-\mu)^2]$

(B)$E[(X-C)^2]\geqslant E[(X-\mu)^2]$

(C)$E[(X-C)^2]=E(X^2)-C^2$

(D)$E[(X-C)^2]<E[(X-\mu)^2]$

20. 设 X,Y 为两个随机变量，若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则(　　).

(A)$D(XY)=D(X)D(Y)$

(B)$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C)X,Y 独立

(D)X,Y 不独立

21. 设 X,Y 为两个随机变量，若对任意非零常数 a,b 有 $D(aX+bY)=D(aX-bY)$，下列结论正确的是(　　).

(A)$D(XY)=D(X)D(Y)$　　(B)X,Y 不相关

(C)X,Y 独立　　(D)X,Y 不独立

22. 设 X,Y 为随机变量，若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则(　　).

(A)X,Y 独立　　(B)X,Y 不独立

(C)X,Y 相关　　(D)X,Y 不相关

23. 若 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则(　　).

(A) X 和 Y 相互独立　　(B) X^2 与 Y^2 相互独立

(C) $D(XY)=D(X)D(Y)$　　(D) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

24. 设随机变量 $X \sim U[0,2]$，$Y=X^2$，则 X,Y(　　).

(A) 相关且相互独立　　(B) 不相互独立但不相关

(C) 不相关且相互独立　　(D) 相关但不相互独立

◇ 解答题

25. 一台设备由三大部件构成，在设备运转过程中各部件需要调整的概率分别为 0.1，0.2，

0.3,假设各部件的状态相互独立,以 X 表示同时需要调整的部件数,求 $E(X)$,$D(X)$.

26. 设随机变量 X 服从参数为$\frac{1}{3}$ 的指数分布,对 X 独立地重复观察 4 次,用 Y 表示观察值大于 3 的次数,求 $E(Y^2)$.

27. 设随机变量 X,Y 同分布,X 的密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 设 $A=\{X>a\}$ 与 $B=\{Y>a\}$ 相互独立,且 $P(A+B)=\frac{3}{4}$.

求:(1)a; (2)$E\left(\frac{1}{X^2}\right)$.

28. 某流水线上产品不合格的概率为 $p=\frac{1}{10}$,各产品合格与否相互独立,当检测到不合格产品时即停机检查.设从开始生产到停机检查生产的产品数为 X,求 $E(X)$ 及 $D(X)$.

29. 设试验成功的概率为$\frac{3}{4}$,失败的概率为$\frac{1}{4}$,独立重复试验直到成功两次为止.求试验次数的数学期望.

30. 游客乘电梯从底层到顶层观光,电梯于每个整点的5分、25分、55分从底层上行,设一游客早上 8 点 X 分到达底层,且 X 在$[0,60]$上服从均匀分布,求游客等待时间的数学期望.

31. 设 $X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 对 X 进行独立重复观察 4 次,用 Y 表示观察值大于$\frac{\pi}{3}$ 的次数,求 $E(Y^2)$.

32. 设某种零件的长度 $L\sim N(18,4)$,从一大批这种零件中随机取出 10 件,求这 10 件中长度在 $16\sim22$ 之间的零件数 X 的概率分布、数学期望和方差.

33. 一民航班车上有20名旅客,自机场开出,旅客有10个车站可以下车,如到达一个车站没有旅客下车就不停车,以 X 表示停车次数,求 $E(X)$(设每位旅客下车是等可能的).

34. 设某箱装有100件产品,其中一、二、三等品分别为80件、10件和10件,现从中随机抽取一件,记 $X_i=\begin{cases}1, & \text{抽到第 } i \text{ 等产品},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $(i=1,2,3)$.

(1) 求(X_1,X_2)的联合分布;

(2) 求 X_1,X_2 的相关系数.

35. 在长为 L 的线段上任取两点,求两点之间距离的数学期望及方差.

36. 设 X 与 Y 相互独立,且 $X\sim N(0,\sigma^2)$,$Y\sim N(0,\sigma^2)$,令 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$,求 $E(Z)$,$D(Z)$.

37. 设随机变量 X,Y 独立同分布,且 $X\sim N(0,\sigma^2)$,再设 $U=aX+bY$,$V=aX-bY$,其中 a,b 为不相等的常数.求:

(1)$E(U)$,$E(V)$,$D(U)$,$D(V)$,ρ_{UV};

(2) 设 U,V 不相关,求常数 a,b 之间的关系.

38. 设 $X\sim U(-1,1)$,$Y=X^2$,判断 X,Y 的独立性与相关性.

五、大数定律和中心极限定理

◇ 填空题

1. 设随机变量 X 方差为 2，则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant$ ________.
2. 若随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布于 $N(\mu, 2^2)$，则根据切比雪夫不等式得 $P\{|\overline{X}-\mu|\geqslant 2\}\leqslant$ ________.

◇ 选择题

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，则 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 满足辛钦大数定律的条件是（　　）.
   (A) $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 同分布且有相同的数学期望与方差
   (B) $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 同分布且有相同的数学期望
   (C) $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为同分布的离散型随机变量
   (D) $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为同分布的连续型随机变量

◇ 解答题

4. 设随机变量 X 的数学期望和方差分别为 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，用切比雪夫不等式估计 $P\{|X-\mu|<3\sigma\}$.
5. 设 X 为一个总体且 $E(X)=k, D(X)=1, X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的简单随机样本，令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，问 n 多大时才能使 $P\left\{|\overline{X}-k|<\frac{1}{2}\right\}\geqslant\frac{3}{4}$？
6. 一批种子中良种占 $\frac{1}{6}$，从中任取 6 000 粒，计算这些种子中良种所占比例与 $\frac{1}{6}$ 之差小于 0.01 的概率.
7. 某保险公司统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占 20%，用 X 表示抽取的 100 个索赔户中被盗索赔户的户数.
   (1) 求 X 的概率分布；
   (2) 用拉普拉斯定理求被盗户数不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.

六、数理统计的基本概念

◇ 填空题

1. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2), X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体的简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $\overline{X}\sim$ ________，$E(\overline{X}^2)=$ ________.
2. 设 X 为总体，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体的简单随机样本，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则 $E(S^2)=$ ________.

3. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为总体的简单样本，S^2 为样本方差，则 $D(S^2)=$ ________.

4. 设总体 $X \sim N(2,4^2)$，从总体中取容量为 16 的简单随机样本，则 $(\overline{X}-2)^2 \sim$ ________.

5. 设随机变量 $X \sim N(1,2)$，$Y \sim N(-1,2)$，$Z \sim N(0,9)$ 且随机变量 X,Y,Z 相互独立，已知 $a(X+Y)^2+bZ^2 \sim \chi^2(n)(ab \neq 0)$，则 $a=$ ________，$b=$ ________，$n=$ ________.

6. 若总体 $X \sim N(0, 3^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_9$ 为来自总体样本容量为 9 的简单随机样本，则 $Y=\frac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{9} X_i^2$ 服从________分布，其自由度为________.

7. 设 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 为来自正态总体 $X \sim N(0,4)$ 的简单随机样本，$Y=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2+cX_5^2(abc \neq 0)$，且 $Y \sim \chi^2(n)$，则 $a=$ ________，$b=$ ________，$c=$ ________，$n=$ ________.

8. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1},\cdots,X_{n+m})$为来自总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$ 的简单样本，则统计量 $U=\dfrac{m\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum\limits_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}$ 服从________分布.

9. 设 $U \sim N(\mu,1)$，$V \sim \chi^2(n)$，且 U,V 相互独立，则 $T=\dfrac{U-\mu}{\sqrt{V}}\sqrt{n}$ 服从________分布.

10. 设 X 为总体，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的样本，且总体的方差 $DX=\sigma^2$，令 $S_0^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则 $E(S_0^2)=$ ________.

◇ 选择题

11. 设(X_1,X_2,X_3)为来自总体 X 的简单随机样本，则下列不是统计量的是(　　).

(A) $\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2+X_3$　　(B) $kX_1^2+(1+k)X_2^2+X_3^2$

(C) $X_1^2+2X_2^2+X_3^2$　　(D) $\frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}(X_i-\overline{X})^2$

12. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)(n \geqslant 2)$为标准正态总体 X 的简单随机样本，则(　　).

(A) $n\overline{X} \sim N(0,1)$　　(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$　　(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$

13. 设 $X \sim t(2)$，则 $\dfrac{1}{X^2}$ 服从的分布为(　　).

(A) $\chi^2(2)$　　(B) $F(1,2)$

(C) $F(2,1)$　　(D) $\chi^2(4)$

14. 设随机变量 $X \sim F(m,n)$，令 $P\{X > F_\alpha(m,n)\}=\alpha(0<\alpha<1)$，若 $P(X<k)=\alpha$，则 k 等于(　　).

(A) $F_\alpha(m,n)$　　(B) $F_{1-\alpha}(m,n)$

(C) $\dfrac{1}{F_\alpha(m,n)}$　　(D) $\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$

15. 设 X,Y 都服从标准正态分布，则(　　).

(A)$X+Y$ 服从正态分布　　(B)X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

(C)X^2,Y^2 都服从 χ^2 分布　　(D)X^2/Y^2 服从 F 分布

16. 设随机变量 $X\sim F(m,m)$，令 $p=P(X\leqslant 1),q=P(X\geqslant 1)$，则(　　).

(A)$p<q$　　(B)$p>q$

(C)$p=q$　　(D)p,q 的大小与自由度 m 有关

◇ 解答题

17. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{20}$ 是总体 X 的简单样本，求统计量 $U=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(-1)^iX_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=11}^{20}X_i^2}}$

所服从的分布.

18. 设总体 $X\sim N(0,2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{30}$ 为总体 X 的简单随机样本，求统计量

$$U=\frac{1}{2}\,\frac{(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{20}^2)}{(X_{21}^2+X_{22}^2+\cdots+X_{30}^2)}$$

所服从的分布及自由度.

19. 设总体 $X\sim N(0,4)$，(X_1,X_2,X_3,X_4) 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 已知 $a(X_1-X_2)^2+b(X_3+2X_4)^2\sim\chi^2(2)$，求 a,b；

(2) 求统计量 $\dfrac{\sqrt{3}X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2+X_4^2}}$ 所服从的分布.

20. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_{2n})$ 为来自总体 X 的简单样本，$\overline{X}=\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$，

令 $T=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$，求 ET,DT.

21. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_7$ 是总体 $X\sim N(0,4)$ 的简单随机样本，求 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{7}X_i^2\leqslant 64\right)$.

22. 设总体 $X\sim N(\mu,25)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为来自总体的简单随机样本，求样本均值与总体均值之差不超过 1.5 的概率.

七、参数估计

◇ 填空题

1. 设总体 X 的分布律为 $P(X=i)=\dfrac{1}{\theta}(i=1,2,\cdots,\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的简单随机样本，则 θ 的矩估计量为________(其中 θ 为正整数).

2. 设总体 X 的分布律为 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \theta & 1-2\theta & \theta \end{pmatrix}$（$\theta$ 为正参数），$-1,2,-1,1,2$ 为样本观察值，则 θ 的极大似然估计值为________.

3. 设正态总体 X 的方差为 1，根据来自总体 X 的容量为 100 的简单随机样本测得样本的均值为 5，则总体 X 的数学期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为________.

◇ 选择题

4. 总体 $X \sim N(\mu, 5^2)$，则总体参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间的长度（　　）.

(A) 与 α 无关

(B) 随 α 的增加而增加

(C) 随 α 的增大而减少

(D) 与 α 有关但与 α 的增减性无关

5. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 σ^2 未知，$s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，样本容量 n，则参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为（　　）.

(A) $\left(\overline{X} - \dfrac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n), \overline{X} + \dfrac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right)$

(B) $\left(\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n), \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right)$

(C) $\left(\overline{X} - \dfrac{s}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X} + \dfrac{s}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

(D) $\left(\overline{X} - \dfrac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \overline{X} + \dfrac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

◇ 解答题

6. 设总体 X 的分布律为 $P(X=k) = (1-p)^{k-1}p\ (k=1,2,\cdots)$，其中 p 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体的简单随机样本，求参数 p 的矩估计量和极大似然估计量.

7. 设总体 X 的密度函数为 $f(x,\theta) = \dfrac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}}\ (-\infty < x < +\infty)$，求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

8. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$ 其中未知参数 $\theta > 0$，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单样本.

(1) 求 θ 的最大似然估计量；

(2) 该估计量是否是无偏估计量？说明理由.

9. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 $\theta > -1$ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，分别用矩估计法和最大似然估计法求参数 θ 的估计量.

10. 设总体X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{\theta^2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体X的简单随机样本,求参数θ的最大似然估计量.

11. 设总体X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体X的简单随机样本.

(1) 求θ的矩估计量$\hat{\theta}$;

(2) 求$D(\hat{\theta})$.

12. 设某元件的使用寿命X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta,\end{cases}$其中$\theta>0$为未知参数.又设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的观察值,求参数$\theta$的最大似然估计值.

13. 一自动生产包装机包装食盐,每袋重量服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,任取9袋测得其平均重量为$\overline{x}=99.078$,样本方差为$s^2=1.143^2$,求μ的置信度为0.95的置信区间.

八、假设检验

◇ 填空题

1. 某产品废品率为3%,采用新技术后对产品重新进行抽样检验,检查产品次品率是否显著降低,取显著性水平为0.05,则原假设为H_0:________,犯第一类错误的概率为________.

◇ 选择题

2. 在假设检验中,H_0为原假设,下列选项中犯第一类错误(弃真)的是(　　).

(A)H_0为假,接受H_0　　(B)H_0为真,拒绝H_0

(C)H_0为假,拒绝H_0　　(D)H_0为真,接受H_0

◇ 解答题

3. 某厂生产某种产品,正常生产时,该产品的某项指标服从正态分布$N(50,3.8^2)$,在生产过程中为检验机器生产是否正常,随机抽取50件产品,其平均指标为$\overline{x}=51.26$(设生产过程中方差不改变),在显著性水平为$\alpha=0.05$下,检验生产过程是否正常.

4. 某批木材的直径服从正态分布,从中随机抽取20根,测得平均直径为$\overline{x}=32.5$ cm,样本标准差为15.问在显著性水平为0.05下,是否可以认为这批木材的直径为30 cm?

[下篇]

提高篇

高等数学部分

一、函数、极限、连续

◇ 填空题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=$________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin(x-t)^2\,dt}{\sin^2 x\ln(1-x)}=$________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\sin(x^2-t^2)\,dt}{(1-\cos x)\ln(1+2x^2)}=$________.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t\cos t\,dt-x-\dfrac{x^2}{2}}{(x-\tan x)(\sqrt{x+1}-1)}=$________.

5. 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x\cos 2x\sim cx^k$，则 $c=$________，$k=$________.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(\sin t+t^2\cos\dfrac{1}{t}\right)dt}{1-\cos^2 x}=$________.

7. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a} te^t\,dt$，则 $a=$________.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(2x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\dfrac{x+1}{x-1}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$________.

9. 设 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln\cos(x-t)\,dt}{\sqrt{1+f^2(x)}-1}=$________.

10. 设 $f(x)$ 一阶连续可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\,dt}{x^2\int_0^x f(t)\,dt}=$________.

11. 设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan(x-t)^2\,dt}{\int_0^x tf(x-t)\,dt}=$________.

12. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos2x}}{\ln(1+x)(1-\cos\sqrt{x})}=$________.

13. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2f(3-x)-3}{x-1}=-1$,则曲线 $y=f(x)$ 在 $(2,f(2))$ 处的切线方程为________.

14. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1-\cos x)+2\ln(1+bx^2)}{e^x-x-1}, & x>0,\\ 3, & x=0,\\ \dfrac{2bx\sin x+\int_0^{x^2}\cos t\,dt}{x\arctan x}, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________,$b=$________.

◇ 选择题

15. 设当 $x\to0$ 时,有 $ax^3+bx^2+cx\sim\int_0^{\ln(1+2x)}\sin t\,dt$,则(　　).

(A) $a=\dfrac{1}{3},b=1,c=0$　　(B) $a=-\dfrac{1}{3},b=1,c=0$

(C) $a=\dfrac{1}{3},b=-1,c=0$　　(D) $a=0,b=2,c=0$

16. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^2\,dt$,$g(x)=x^3+x^4$,当 $x\to0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　).

(A) 等价无穷小　　(B) 同阶但非等价无穷小

(C) 高阶无穷小　　(D) 低阶无穷小

17. 设 $f(x)=\int_0^x dt\int_0^t t\ln(1+u^2)\,du$,$g(x)=\int_0^{\sin x^2}(1-\cos t)\,dt$,则当 $x\to0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　).

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小　　(D) 同阶但非等价的无穷小

18. 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 为两个数列,下列说法正确的是(　　).

(A) 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都发散,则 $\{a_nb_n\}$ 一定发散

(B) 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都无界,则 $\{a_nb_n\}$ 一定无界

(C) 若 $\{a_n\}$ 无界且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

(D) 若 a_n 为无穷大,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$,则 b_n 一定是无穷小

19. 设 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则(　　).

(A) $a>0,b>0$　　(B) $a<0,b<0$

(C) $a\geqslant0,b<0$　　(D) $a\leqslant0,b>0$

20. 设 $\alpha\sim\beta(x\to a)$,则 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}}$ 等于(　　).

(A)e　　(B)e^2　　(C)1　　(D)$e^{\frac{1}{2}}$

21. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$ 使得(　　).

(A) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$

(B) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)<f(0)$

(C) 当 $x\in(0,\delta)$ 时，$f(x)$ 为单调增函数

(D) 当 $x\in(0,\delta)$ 时，$f(x)$ 是单调减函数

22. 设 $f(x)$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=\sin 2x+2e^x$ 的满足初始条件 $f(0)=f'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+f(x)]}{x^2}$(　　).

(A) 不存在　　(B) 等于 0

(C) 等于 1　　(D) 其他

23. 下列命题正确的是(　　).

(A) 若 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

(B) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续

(C) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 的一个邻域内连续

(D) 若$\lim\limits_{h\to 0}[f(a+h)-f(a-h)]=0$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

◇ 解答题

24. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^4+2x+4)}{\ln(2x^2+4x-1)}$.

25. 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$.

26. 设 $f(x)$ 连续可导，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\cos x+\int_0^x f(x-t)\,dt\right]^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}$.

27. 设 $f(x)$ 可导且 $f''(0)=6$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，求$\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{x^2}}$.

28. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^n}=c(\neq 0)$，求 n,c 的值.

29. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)-e^{bx}+\cos x}{x^2}=-\dfrac{9}{2}$，求 a,b 的值.

30. 确定 a,b，使得 $x-(a+b\cos x)\sin x$ 当 $x\to 0$ 时为阶数尽可能高的无穷小.

31. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{\int_0^{x^2}e^{-t^2}\,dt}=\dfrac{3}{2}$，求 a,b 的值.

32. 确定常数 a,b,c，使得$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)=c$.

33. 设$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，其中 $f(x)$ 连续，求$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

34. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}{\mathrm{e}}\right]^{x}$.

35. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{i}{n}}}{n+\dfrac{1}{i}}$.

36. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\sin x)-\sin(\tan x)}{x^{3}}$.

37. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{0}^{2x}|t-x|\sin t\,\mathrm{d}t}{|x|^{3}}$.

38. 设 $f'(x)$ 连续,$f(0)=0,f'(0)\neq0,F(x)=\int_{0}^{x}tf(t^{2}-x^{2})\mathrm{d}t$,且当 $x\to0$ 时,$F(x)\sim x^{n}$,求 n 及 $f'(0)$.

39. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 内可导,$f'(x)<0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a>0$,令 $a_{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_{1}^{n}f(x)\mathrm{d}x$. 证明:$\{a_{n}\}$ 收敛且 $0\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}a_{n}\leqslant f(1)$.

40. 设 $a>0,x_{1}>0$,且定义 $x_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(3x_{n}+\dfrac{a}{x_{n}^{3}}\right)(n=1,2,\cdots)$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n}$ 存在并求其值.

41. 设 $a_{1}=1$,当 $n\geqslant1$ 时,$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{a_{n}}{1+a_{n}}}$,证明:数列 $\{a_{n}\}$ 收敛并求其极限.

42. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,且 $f(0)=0,f(1)=1$. 证明:

(1) 存在 $c\in(0,1)$,使得 $f(c)=1-2c$;

(2) 存在 $\xi\in[0,2]$,使得 $2f(0)+f(1)+3f(2)=6f(\xi)$.

43. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n}=A$,证明:数列 $\{a_{n}\}$ 有界.

44. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义,且 $\mathrm{e}^{x}f(x)$ 与 $\mathrm{e}^{-f(x)}$ 在 $[0,1]$ 上单调增加. 证明:$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

45. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,$f(a)<0$,而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且大于零. 证明:$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内至少有一个零点.

46. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x+2)}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \dfrac{x}{x^{2}-1}, & x\geqslant0,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的间断点并对其分类.

47. 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{3}-x}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^{2}-1}, & x\geqslant0\end{cases}$ 的间断点并判断其类型.

48. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,求 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

49. 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$ 的反函数.

50.（1）求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{n^2-1^2}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n^2-n^2}}\right)$；

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}}{n+1}+\dfrac{\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

51. 求极限$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^3}$.

52. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n+1)}=1$.

53. 设$f(x)=a_1\ln(1+x)+a_2\ln(1+2x)+\cdots+a_n\ln(1+nx)$，其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$为常数，且对一切$x$有$|f(x)|\leqslant|e^x-1|$. 证明：$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant1$.

54. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$.

55. 设函数$f(x)$可导且$0\leqslant f'(x)\leqslant\dfrac{k}{1+x^2}(k>0)$，对任意的$x_n$，作$x_{n+1}=f(x_n)(n=0,1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在且满足方程$f(x)=x$.

56. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在. 证明：$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

57. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，任取$x_i\in[a,b](i=1,2,\cdots,n)$，任取$k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，证明：存在$\xi\in[a,b]$，使得

$$k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n)=(k_1+k_2+\cdots+k_n)f(\xi).$$

二、一元函数微分学

◇ 填空题

1. 设两曲线$y=x^2+ax+b$与$-2y=-1+xy^3$在点$(-1,1)$处相切，则$a=$________，$b=$________.

2. 设函数$y=f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$满足$f'(x)=\arctan\sqrt{x}$，则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}=$________.

3. 设$f(x)$在$x=1$处一阶连续可导，且$f'(1)=-2$，则$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{d}{dx}f(\cos\sqrt{x})=$________.

4. 设$f(x)=x^2\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t+x}{t-x}\right)^{4t}$，则$f'(x)=$________.

5. 设$f(x)$满足$f(x)=f(x+2)$，$f(0)=0$，又在$(-1,1)$内$f'(x)=|x|$，则$f\left(\dfrac{7}{2}\right)=$________.

6. 若$f(x)=2nx(1-x)^n$，记$M_n=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant1}f(x)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}M_n=$________.

7. 设$f(x)$在$x=a$的邻域内二阶可导且$f'(a)\neq0$，则

$\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{(x-a)f'(a)}-\dfrac{1}{f(x)-f(a)}\right]=$______.

8. 设$\begin{cases}x=\arctan 2t,\\ y+e^{y}=\ln(e+t^{2}),\end{cases}$则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$______.

9. 设$\begin{cases}x=\cos t^{2},\\ y=t\cos t^{2}-\displaystyle\int_{1}^{t^{2}}\dfrac{\cos u}{2\sqrt{u}}du,\end{cases}$则$\left.\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=$______.

10. 设 $y=y(x)$ 由 $ye^{xy}+x\cos x-1=0$ 确定,则 $dy\mid_{x=0}=$______.

11. 设$\int_{0}^{y}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\cos t\,dt=xy$ 确定函数 $y=y(x)$,则$\dfrac{dy}{dx}=$______.

12. 设函数 $y=y(x)$ 由$\begin{cases}x=\ln(1+t^{2}),\\ \displaystyle\int_{0}^{y}e^{u^{2}}du+\int_{t^{2}}^{1}\arcsin u\,du=0\end{cases}$确定,则 $y=y(x)$ 在 $x=\ln 2$ 处的法线方程为______.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{2}, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1\end{cases}$在 $x=1$ 处可微,则 $a=$______,$b=$______.

14. 设 $F(x)=\int_{0}^{x}(x^{2}-t^{2})f'(t)dt$,其中 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且当 $x\to 0$ 时,$F'(x)\sim x^{2}$,则 $f'(0)=$______.

15. 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上可导,$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e^{2}$,又$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$,则 $a=$______.

16. 设 $f(x,y)$ 可微,$f(1,2)=2$,$f'_{x}(1,2)=3$,$f'_{y}(1,2)=4$,$\varphi(x)=f[x,f(x,2x)]$,则 $\varphi'(1)=$______.

17. 曲线 $y=\dfrac{2x^{5}-4x^{4}+1}{x^{4}+1}$ 的斜渐近线为______.

◇ 选择题

18. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导,且 $f(a)\neq 0$,则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处(　　).

(A) 可导　　(B) 不可导

(C) 不一定可导　　(D) 不连续

19. 设 ξ 为 $f(x)=\arctan x$ 在$[0,a]$上使用微分中值定理的中值,则$\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\xi^{2}}{a^{2}}$为(　　).

(A) 1　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{4}$

20. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f(a+x)-f(a)}{x}-f'(a)}{x}$等于(　　).

(A) $-f''(a)$　　(B) $f''(a)$

(C) $2f''(a)$　　(D) $\dfrac{1}{2}f''(a)$

21. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x}=2$，则(　　).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

22. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的左、右导数都存在，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处(　　).

(A) 一定可导　　(B) 一定不可导

(C) 不一定连续　　(D) 连续

23. $f(x)g(x)$ 在 x_0 处可导，则下列说法正确的是(　　).

(A) $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 处都可导

(B) $f(x)$ 在 x_0 处可导，$g(x)$ 在 x_0 处不可导

(C) $f(x)$ 在 x_0 处不可导，$g(x)$ 在 x_0 处可导

(D) $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 处都可能不可导

24. $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处(　　).

(A) 可导　　(B) 不可导

(C) 连续但不一定可导　　(D) 不连续

25. 设 $f(x)$ 为二阶可导的奇函数，且 $x<0$ 时有 $f''(x)>0$，$f'(x)<0$，则当 $x>0$ 时有(　　).

(A) $f''(x)<0$，$f'(x)<0$　　(B) $f''(x)>0$，$f'(x)>0$

(C) $f''(x)>0$，$f'(x)<0$　　(D) $f''(x)<0$，$f'(x)>0$

26. 设 $f(x)$ 为单调可微函数，$g(x)$ 与 $f(x)$ 互为反函数，且 $f(2)=4$，$f'(2)=\sqrt{5}$，$f'(4)=6$，则 $g'(4)$ 等于(　　).

(A) $\dfrac{1}{4}$　　(B) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　　(C) $\dfrac{1}{6}$　　(D) 4

27. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内有定义，且 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(a)$ 都存在，则(　　).

(A) $f(x)$ 在 $x=a$ 处不连续　　(B) $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续

(C) $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导　　(D) $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续可导

28. 下列命题成立的是(　　).

(A) 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $|x-x_0|<\delta$ 内连续

(B) 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $|x-x_0|<\delta$ 内可导

(C) 若 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域内可导，在 x_0 处连续且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$

(D) 若 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域内可导，在 x_0 处连续且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 不存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处不可导

29. $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不连续

(B) 连续不可导

(C) 可导但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

(D) 可导且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

30. 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的充分必要条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$ 存在

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f[1+\ln(1+2h^2)]-f(1)}{e^{h^2}-1}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-\cos h)-f(1)}{h}$ 存在

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(e^h)-f(1)}{h}$ 存在

31. 设 $f(x)$ 连续可导,$g(x)$ 连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$,又 $f'(x)=-2x^2+\int_0^x g(x-t)\mathrm{d}t$,则(　　).

(A)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点

(B)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(C)$(0,f(0))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点

(D)$x=0$ 既不是 $f(x)$ 极值点,$(0,f(0))$ 也不是 $y=f(x)$ 的拐点

32. 下列说法正确的是(　　).

(A)$f(x)$ 在(a,b) 内可导,若 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$,则 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=\infty$

(B)$f(x)$ 在(a,b) 内可导,若 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=\infty$,则 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$

(C)$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内可导,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\infty$

(D)$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内可导,若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\infty$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$

33. 下列说法中正确的是(　　).

(A) 若 $f'(x_0)<0$,则 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内单调减少

(B) 若 $f(x)$ 在 x_0 取极大值,则当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时,$f(x)$ 单调增加,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时,$f(x)$ 单调减少

(C)$f(x)$ 在 x_0 取极值,则 $f(x)$ 在 x_0 连续

(D)$f(x)$ 为偶函数,$f''(0)\neq 0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处一定取到极值

34. 设 $f(x)$ 二阶连续可导,$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{(x-2)^3}=\dfrac{2}{3}$,则(　　).

(A)$f(2)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(B)$f(2)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C)$(2,f(2))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D)$f(2)$ 不是函数 $f(x)$ 的极值,$(2,f(2))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

35. 设 $f(x)$ 连续可导,$g(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内连续,且 $g(0)=1$,$f'(x)=-\sin 2x+\int_0^x g(x-t)\mathrm{d}t$,

则(　　).

(A)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点

(B)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(C)$(0,f(0))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点

(D)$x=0$ 非极值点,$(0,f(0))$ 非 $y=f(x)$ 的拐点

36. 设 $f(x)$ 二阶连续可导,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{x}=-1$,则(　　).

(A)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(B)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C)$(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D)$x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点但不是极值点

37. 设函数 $f(x)$ 满足关系 $f''(x)+f'^2(x)=x$,且 $f'(0)=0$,则(　　).

(A)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(B)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C)$(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点

(D)$(0,f(0))$ 不是 $y=f(x)$ 的拐点

38. 下列说法正确的是(　　).

(A) 设 $f(x)$ 在 x_0 二阶可导,则 $f''(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续

(B)$f(x)$ 在$[a,b]$上的最大值一定是其极大值

(C)$f(x)$ 在(a,b)内的极大值一定是其最大值

(D) 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f(x)$ 在(a,b)内有唯一的极值点,则该极值点一定为最值点

39. 设 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$上二阶可导,$f(a)<0$,$f'(a)=0$,且 $f''(x)\geqslant k\,(k>0)$,则 $f(x)$ 在$(a,+\infty)$内的零点个数为(　　).

(A)0 个　　(B)1 个　　(C)2 个　　(D)3 个

40. 设 $k>0$,则函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 的零点个数为(　　).

(A)0 个　　(B)1 个　　(C)2 个　　(D)3 个

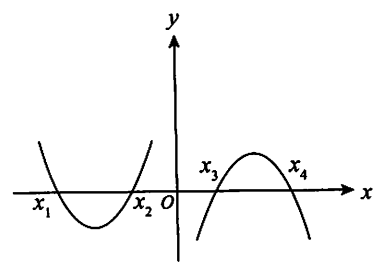
41. 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,其导数的图形如右图,则 $f(x)$ 有(　　).

(A) 两个极大值点,两个极小值点,一个拐点

(B) 两个极大值点,两个极小值点,两个拐点

(C) 三个极大值点,两个极小值点,两个拐点

(D) 两个极大值点,三个极小值点,两个拐点



第 41 题图

◆ 解答题

42. 设 $y=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x, & |x|\leqslant1,\\ |x-1|, & |x|>1,\end{cases}$ 求 y'.

43. 设 $x=x(t)$ 由 $\sin t-\int_1^{x-t}e^{-u^2}du=0$ 确定,求$\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0}$.

44. 求曲线 $x^3-3xy+y^3=3$ 上纵坐标最大和最小的点.

45. 设 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0,\\ xe^x+1, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的极值.

46. 求$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大项.

47. 设 $f(x)$ 连续,$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$,且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$. 求 $\varphi'(x)$,并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

48. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内有定义,且满足 $|f(x)-2e^x|\leqslant(x-1)^2$,研究函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的可导性.

49. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内二阶连续可导,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的曲率.

50. 设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0,\\ ax^2+bx+c, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 且 $f''(0)$ 存在,求 a,b,c.

51. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,$f(0)=0$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,$f(1)=0$. 证明:

(1) 存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $f(\eta)=\eta$;

(2) 对任意的 $k\in(-\infty,+\infty)$,存在 $\xi\in(0,\eta)$,使得 $f'(\xi)-k[f(\xi)-\xi]=1$.

52. 设 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续,在$(0,2)$内二阶可导,且$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln[f(x)+2]}{\cos\frac{\pi}{2}x}=0$,又 $f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)dx$,证明:存在 $\xi\in(0,2)$,使得 $f'(\xi)+f''(\xi)=0$.

53. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导,$f(0)=0$,$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|$. 证明:$f(x)\equiv 0$,$x\in[0,1]$.

54. 设 $f(x)\in C[a,b]$,在(a,b)内可导,$f(a)=f(b)=1$. 证明:存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$2e^{2\xi-\eta}=(e^a+e^b)[f'(\eta)+f(\eta)].$$

55. 设 $f(x)$ 二阶可导,$f(0)=f(1)=0$ 且 $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$. 证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f''(\xi)\geqslant 8$.

56. 一质点从时间 $t=0$ 开始直线运动,移动了单位距离使用了单位时间,且初速度和末速度都为零. 证明:在运动过程中存在某个时刻点,其加速度绝对值不小于4.

57. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导,且 $|f''(x)|\leqslant 1(x\in[0,1])$,又 $f(0)=f(1)$,证明:

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}(x\in[0,1]).$$

58. 设 $f(x)$ 在$(-1,1)$内二阶连续可导,且 $f''(x)\neq 0$. 证明:

(1) 对$(-1,1)$内任一点 $x\neq 0$,存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$,使得

$$f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)x];$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

59. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且 $f'(a)=f'(b)=0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

60. $f(x)$ 在$[-1,1]$上三阶连续可导，且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$. 证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$.

61. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶连续可导. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

62. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant a$，$|f''(x)|\leqslant b$，其中 a,b 都是非负常数，c 为$(0,1)$内任意一点.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $x=c$ 处带拉格朗日型余项的一阶泰勒公式；

(2) 证明：$|f'(c)|\leqslant 2a+\dfrac{b}{2}$.

63. 设 $f(x)$ 在$[-a,a](a>0)$上有四阶连续的导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}$ 存在.

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的麦克劳林公式；

(2) 证明：存在 $\xi_1,\xi_2\in[-a,a]$，使得 $a^5f^{(4)}(\xi_1)=60\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$，$a^4f^{(4)}(\xi_1)=120f(\xi_2)$.

64. 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内四阶可导，且 $|f^{(4)}(x)|\leqslant M(M>0)$. 证明：对此邻域内任一异于 x_0 的点 x，有

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(x)+f(x')-2f(x_0)}{(x-x_0)^2}\right|\leqslant\frac{M}{12}(x-x_0)^2,$$

其中 x' 为 x 关于 x_0 的对称点.

65. 设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，且 $g(x)\neq0(x\in[a,b])$，$g''(x)\neq0(a<x<b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

66. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，且 $f'_+(a)>0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.

67. 设 $f(x)$ 二阶可导，$f(0)=0$，且 $f''(x)>0$. 证明：对任意的 $a>0, b>0$，有

$$f(a+b)>f(a)+f(b).$$

68. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f''(x)>0$，对任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$ 及 $0<\lambda<1$，证明：

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

69. 设 $f(x)$ 二阶可导，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 且 $f''(x)>0$. 证明：当 $x\neq0$ 时，$f(x)>x$.

70. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$内可导且 $f(0)=1$，$f'(x)<f(x)(x>0)$. 证明：$f(x)<\mathrm{e}^x(x>0)$.

71. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导，且 $f''(x)>0$，取 $x_i\in[a,b](i=1,2,\cdots,n)$ 及 $k_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 且满足 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$. 证明：

$$f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)\leqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n).$$

72. 证明：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

73. 当 $x>0$ 时,证明:$\dfrac{\arctan x}{\ln(1+x)}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

74. 设 $0<a<b$,证明:$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

75. 求由方程 $x^2+y^3-xy=0$ 确定的函数在 $x>0$ 内的极值,并指出是极大值还是极小值.

76. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导,且 $f(0)=f'(0)=f(1)=f'(1)=0$.

证明:方程 $f''(x)-f(x)=0$ 在$(0,1)$内有根.

77. 设 $f(x)=3x^2+Ax^{-3}(x>0)$,A 为正常数,问:A 至少为多少时,$f(x)\geqslant 20$?

78. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$内二阶可导,$f(0)=-2,f'(0)=1,f''(x)\geqslant 0$. 证明:$f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个根.

79. 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n(n\geqslant 2)$.

(1) 证明:方程 $f_n(x)=1$ 有唯一的正根 x_n;

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

80. 设 $a>0$,讨论方程 $a\mathrm{e}^x=x^2$ 根的个数.

81. 就 k 的不同取值情况,确定方程 $x^3-3x+k=0$ 根的个数.

82. 设 k 为常数,方程 $kx-\dfrac{1}{x}+1=0$ 在$(0,+\infty)$内恰有一根,求 k 的取值范围.

83. 设 $f(x)$ 在$[-1,1]$上可导,$f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导,且 $f'(0)=0,f''(0)=4$.

求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}$.

84. 设 $f(x)$ 二阶连续可导且 $f(0)=f'(0)=0,f''(x)>0$. 过曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $(x,f(x))(x\neq 0)$ 处作切线,此切线在 x 轴上的截距为 u,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}$.

85. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 二阶连续可导,且 $g(0)=1$.

(1) 确定常数 a,使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

(2) 求 $f'(x)$;

(3) 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

86. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,且$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=0$,证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得

$$f(\xi)=\int_0^{\xi}f(t)\mathrm{d}t.$$

87. 设 $f(x)$ 在$[0,2]$上二阶连续可导,且 $f(0)=1,f'(1)=0,f(2)=\dfrac{5}{3}$. 证明:存在 $\xi\in(0,2)$,使得 $f'''(\xi)=2$.

88. 设 $f(x)$ 是在$[a,b]$上连续且严格单调的函数,在(a,b)内可导,且 $f(a)=a<b=f(b)$.

证明:存在 $\xi_i\in(a,b)(i=1,2,\cdots,n)$,使得$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f'(\xi_i)}=1$.

89. 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导,$f'(x)\neq 0$,且与 $x=\varphi(y)$ 互为反函数,求 $\varphi''(y)$.

90. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域内连续，在 $x=x_0$ 的去心邻域内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=M$. 证明：

$$f'(x_0)=M.$$

91. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

92. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=0,f(1)=1$，证明：对任意的 $a>0$，$b>0$，存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

93. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内存在二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0,\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

证明：

(1) 存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$；

(2) 存在 $\xi_i\in(a,b)(i=1,2)$，且 $\xi_1\neq\xi_2$，使得 $f'(\xi_i)+f(\xi_i)=0(i=1,2)$；

(3) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=f(\xi)$；

(4) 存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f''(\eta)-3f'(\eta)+2f(\eta)=0$.

94. 设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，且函数 $f(x)$ 在$[a_1,a_n]$上 n 阶可导，$c\in[a_1,a_n]$ 且 $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$. 证明：存在 $\xi\in(a_1,a_n)$，使得

$$f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi).$$

95. 设 $f(x)$ 二阶连续可导，且 $f''(x)\neq0$，又 $f(x+h)=f(x)+f'(x+\theta h)h(0<\theta<1)$.

证明：$\lim\limits_{h\to0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

96. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$连续可导，且 $f(0)=0$. 证明：存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

三、一元函数积分学

◇ 填空题

1. 设 $f(\sin^2x)=\dfrac{x}{\sin x}$，则$\displaystyle\int\frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=$________.

2. 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，则$\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=$________.

3. 设$\displaystyle\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=$________.

4. 设 $f(x)$ 为连续函数，且满足$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t=f(x)+x\sin x$，则 $f(x)=$________.

5. $\displaystyle\int\frac{1+x}{x^2\mathrm{e}^x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x=$________.

6. $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x=$________.

7. $\int \dfrac{1}{3\sin^2 x + 2\cos^2 x}\mathrm{d}x =$________.

8. $\int \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x =$________.

9. $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x =$________.

10. $\int \max\{x+2, x^2\}\mathrm{d}x =$________.

11. $\int \dfrac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}\mathrm{d}x =$________

12. $\int_0^2 \left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x+x^{2n+1}}{1+x^{2n-1}}\right)\mathrm{d}x =$________.

13. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x =$________.

14. 设 $f(x)$ 满足等式 $xf'(x)-f(x)=\sqrt{2x-x^2}$,且 $f(1)=4$,则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x =$________.

15. 设函数 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$,且 $y(1)=1$,则$\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=$________.

16. 设$\int_a^{2\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}=\dfrac{\pi}{6}$,则 $a=$________.

17. $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\,\mathrm{d}x =$________.

18. 设连续非负函数 $f(x)$ 满足 $f(x)f(-x)=1$,则$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+f(x)}=$________.

19. $I(x)=\int_0^x \dfrac{2u-1}{u^2-u+1}\mathrm{d}u$ 在区间$[-1,1]$上的最大值为________.

20. 设 $f(x)$ 的一个原函数为$\dfrac{\sin x}{x}$,则$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x =$________.

21. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值为________.

◇ 选择题

22. 设$f(x)$,$g(x)$是连续函数,当$x\to 0$时,$f(x)$与$g(x)$是等价无穷小,令$F(x)=\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t$,$G(x)=\int_0^1 xg(xt)\mathrm{d}t$,则当 $x\to 0$ 时,$F(x)$ 是 $G(x)$ 的(　　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶但非等价无穷小　　(D) 等价无穷小

23. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$,则 $F(x)$(　　).

(A) 为正常数　　(B) 为负常数

(C) 为零　　(D) 取值与 x 有关

24. 设 $\alpha=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，两个无穷小的关系是(　　).

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶非等价无穷小　　(D) 等价无穷小

25. 设 $g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，其中 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1), 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{1}{3}(x-1),\ 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 内(　　).

(A) 单调减少　　(B) 无界

(C) 连续　　(D) 有第一类间断点

26. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是以 T 为周期的连续奇函数，则下列函数中不是周期函数的是(　　).

(A) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$　　(B) $\int_{-x}^a f(t)\mathrm{d}t$

(C) $\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t-\int_x^0 f(t)\mathrm{d}t$　　(D) $\int_{-x}^x tf(t)\mathrm{d}t$

27. 设函数 $f(x)$ 连续，下列变上限积分函数中，必为偶函数的是(　　).

(A) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$　　(B) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$

(C) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$　　(D) $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

28. $\int_0^{\sqrt{2\pi}}\sin x^2\mathrm{d}x$ 为(　　).

(A) 等于 0　　(B) 大于 0

(C) 小于 0　　(D) 不能确定

29. 若由曲线 $y=2\sqrt{x}$，曲线上某点处的切线以及 $x=1$，$x=3$ 围成的平面区域的面积最小，则该切线是(　　).

(A) $y=\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$　　(B) $y=\frac{x}{2}+2$

(C) $y=x+1$　　(D) $y=\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}$

◇ 解答题

30. 设 $f(x)=\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$，求 $\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x$.

31. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(x)=2\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^x$，求 $f(x)$.

32. 求 $\int_0^{\sqrt{2}}x(4-x^4)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x$.

33. 计算 $\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$.

34. $\int\frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})+5}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

35. $\int \frac{1+2\ln x}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

36. $\int \frac{x+2}{x(1+x^2\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$.

37. $\int_0^1 x^4\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x$.

38. 设 $f(x)$ 连续,且$\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$,$f(1)=1$,求$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

39. 计算$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}\mathrm{d}x\ (a>1)$.

40. 计算$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

41. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数,且当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)F(x)=\frac{x\mathrm{e}^x}{2(1+x)^2}$,又 $F(0)=1$,$F(x)>0$,求 $f(x)$.

42. 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, 0<x\leqslant 1,\\ x, x>1,\end{cases}$ 求 $f(x)$.

43. 计算$\int_{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}^{\mathrm{e}^{\frac{3}{4}}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}}$.

44. 设 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{\cos t}\mathrm{d}t$,求$\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,\mathrm{d}x$.

45. $\int_0^2 \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$

46. 设 $f(x)$ 连续,$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=1-\cos x$,求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

47. 设 $S(x)=\int_0^x |\cos t|\,\mathrm{d}t$.

(1) 证明:当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$.

48. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续、非负,且以 T 为周期,证明:$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\frac{\int_0^T f(x)\mathrm{d}x}{T}$.

49. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,$f(0)=0$,$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$. 证明:存在 $\xi\in(0,1)$,使得

$$\int_0^{\xi}f(x)\mathrm{d}x=\xi f(\xi).$$

50. 设 $f(x)$ 在$(-a,a)(a>0)$内连续,且 $f'(0)=2$.

(1) 证明:对$0<x<a$,存在$0<\theta<1$,使得$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

51. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x\,(n\geqslant 2)$，证明：$\dfrac{1}{2(n+1)}<a_n<\dfrac{1}{2(n-1)}$.

52. 设 $f(x)$ 有界，且 $f'(x)$ 连续，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)+f'(x)|\leqslant 1$. 证明：

$$|f(x)|\leqslant 1.$$

53. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任意的 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$. 证明：$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(a)\right|\leqslant\dfrac{1}{2}(b-a)^2$.

54. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$，对任意的 $x\in[0,1]$，证明：

$$\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right)\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

55. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

56. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续且单调减少. 证明：

$$\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)\leqslant f(1)+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$

57. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调减少. 证明：当 $0<k<1$ 时，$\int_0^k f(x)\mathrm{d}x\geqslant k\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

58. 设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且 $|f'(x)|\leqslant M$. 证明：$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right|\leqslant\dfrac{M}{2n}$.

59. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上一阶连续可导，$f(0)=0$，令 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|=M$. 证明：$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{a^2}{2}M$.

60. 设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(1)-f(0)=1$. 证明：$\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 1$.

61. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，且 $f(a)=0$. 证明：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

62. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明：

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x\,(a<x<b).$$

63. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，证明：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

64. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$. 证明：$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x\leqslant f\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

65. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导且 $f''(x)\geqslant 0$. 证明：

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

66. 设 $f(x)\in C[0,1]$，$f(x)>0$. 证明积分不等式：$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x$.

67. 设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2，且 $a<1$.

(1) 确定 a,使 S_1+S_2 达到最小,并求出最小值;

(2) 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

68. 求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的封闭区域绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体的体积.

69. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 所围成的公共部分的面积.

70. 设点 $A(1,0,0)$,$B(0,1,1)$,线段 AB 绕 z 轴一周所得旋转曲面为 S.

(1) 求旋转曲面的方程;

(2) 求曲面 S 界于平面 $z=0$ 与 $z=1$ 之间围成立体的体积.

71. 求由 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 与 x 轴所围成的区域绕 $y=2$ 旋转一周而成的几何体的体积.

72. 计算 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

73. 计算定积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

74. 证明:$\int_0^{\pi}xa^{\sin x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi^3}{4}$,其中 $a>0$ 为常数.

75. 证明:当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$ 的最大值不超过 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

76. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且对任意的 $t\in[0,1]$ 及任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$ 满足:

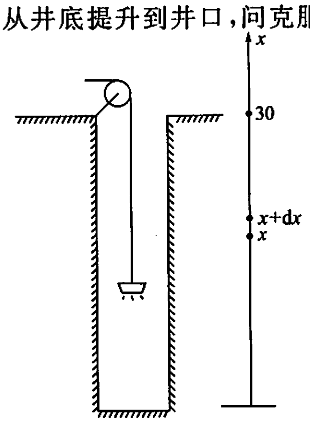
$$f[tx_1+(1-t)x_2]\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2).$$

证明:$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

77. 设 $f(x)\in C[a,b]$,在 (a,b) 内二阶可导,且 $f''(x)\geqslant 0$,$\varphi(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数,且 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=1$. 证明:$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\geqslant f\left[\int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x\right]$.

78. 令 $f(x)=x-[x]$,求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$.

79. 为清除井底污泥,用缆绳将抓斗放入井底,抓起污泥提出井口. 设井深 30 m,抓斗自重 400 N,缆绳每米重 50 N,抓斗盛污泥 2 000 N,提升速度为 3 m/s,在提升过程中,污泥以 20 N/s 的速度从抓斗中漏掉. 现将抓斗从井底提升到井口,问克服重力做功多少?



第 79 题图

四、向量代数与空间解析几何

◇ 填空题

1. 设直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$，$L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，则过直线 L_1 且平行于 L_2 的平面方程为________.

2. 点 $M(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0,\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离为________.

3. 两异面直线 $L_1:\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ 与 $L_2:\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$ 之间的距离为________.

4. 设点 $M_1(1,-1,-2)$，$M_2(1,0,3)$，$M_3(2,1,2)$，则点 M_3 到向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的距离为________.

5. 直线 $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程为________.

6. 设直线 l 过点 $M(1,-2,0)$ 且与两条直线 $l_1:\begin{cases}2x+z=1,\\x-y+3z=5\end{cases}$ 和 $l_2:\begin{cases}x=-2+t,\\y=1-4t,\\z=3\end{cases}$ 垂直，则 l 的参数方程为________.

7. 设直线 $\begin{cases}x+2y-z=2,\\2x-y+z=3\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影为直线 L，则点 $(1,2,1)$ 到直线 L 的距离等于________.

8. 曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\z^2=2x\end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线为________.

9. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 的某邻域内可微，且 $f(x,y+1)=1+2x+3y+o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，则曲面 $\Sigma:z=f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 的切平面方程为________.

◇ 选择题

10. 平面 π 与 $\pi_1:x-2y+z-2=0$ 和 $\pi_2:x-2y+z-6=0$ 的距离之比为 $1:3$，则平面 π 的方程为(　　).

(A) $x-2y+z=0$

(B) $x-2y+z-3=0$

(C) $x-2y+z=0$ 或 $x-2y+z-3=0$

(D) $x-2y+z-4=0$

11. 设 $L_1:\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+4}{-5}=\dfrac{z}{3}$；$L_2:\begin{cases}x=3t,\\y=-1+3t,\\z=2+7t;\end{cases}$ $L_3:\begin{cases}x+3y-z+1=0,\\2x+y-z=0,\end{cases}$ 则有(　　).

(A) $L_1\parallel L_3$　　(B) $L_1\parallel L_2$　　(C) $L_2\perp L_3$　　(D) $L_1\perp L_2$

◇ 解答题

12. 设曲面 $\Sigma:\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 及平面 $\pi:2x+2y+z+5=0$.

(1) 求曲面 Σ 上与 π 平行的切平面方程;

(2) 求曲面 Σ 与平面 π 之间的最短和最长距离.

13. 设直线 $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 及 $\pi:x-y+2z-1=0$.

(1) 求直线 L 在平面 π 上的投影直线 L_0;

(2) 求 L 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

14. 设直线 $L_1:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$, $L_2:\frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-2}$.

(1) 证明:直线 L_1,L_2 为异面直线;

(2) 求平行于 L_1,L_2 且与它们等距离的平面.

15. 求过直线 $\begin{cases}3x-2y+2=0,\\x-2y-z+6=0\end{cases}$ 且与点 $(1,2,1)$ 的距离为 1 的平面方程.

16. 设直线 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$.

(1) 求直线 L 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面;

(2) 求(1) 中所得旋转曲面界于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的几何体的体积.

17. 已知点 $P(1,0,-1)$ 与点 $Q(3,1,2)$,在平面 $x-2y+z=12$ 上求一点 M,使得 $|PM|+|MQ|$ 最小.

18. 设 $A(-1,0,4)$, $\pi:3x-4y+z+10=0$, $L:\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$,求一条过点 A 与平面 π 平行,且与直线 L 相交的直线方程.

五、多元函数微分学

◇ 填空题

1. 设 $z=xf(x+y)+g(x^y,x^2+y^2)$,其中 f,g 分别二阶连续可导和二阶连续可偏导,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

2. 设 $f(u,v)$ 一阶连续可偏导, $f(tx,ty)=t^3f(x,y)$,且 $f'_1(1,2)=1, f'_2(1,2)=4$,则 $f(1,2)=$________.

3. 设 $z=f(x,y)$ 二阶可偏导, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$,且 $f(x,0)=1$, $f'_y(x,0)=x$,则 $f(x,y)=$________.

4. 设 $(ay-2xy^2)\mathrm{d}x+(bx^2y+4x+3)\mathrm{d}y$ 为二元函数 $u(x,y)$ 的全微分,其中 $u(x,y)$ 二阶连续可偏导,则 $a=$________, $b=$________.

5. 函数 $u=x^2-2yz$ 在点 $(1,-2,2)$ 处的方向导数的最大值为________.

◇ 选择题

6. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处(　　).

(A) 连续但不可偏导

(B) 可偏导但不连续

(C) 可微

(D) 一阶连续可偏导

7. 对二元函数 $z=f(x,y)$，下列结论正确的是(　　).

(A) $z=f(x,y)$ 可微的充分必要条件是 $z=f(x,y)$ 有一阶连续的偏导数

(B) 若 $z=f(x,y)$ 可微，则 $z=f(x,y)$ 的偏导数连续

(C) 若 $z=f(x,y)$ 偏导数连续，则 $z=f(x,y)$ 一定可微

(D) 若 $z=f(x,y)$ 的偏导数不连续，则 $z=f(x,y)$ 一定不可微

8. 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上二阶连续可偏导，且在区域 D 内恒有条件 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}>0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，则(　　).

(A) $f(x,y)$ 的最大值点和最小值点都在 D 内

(B) $f(x,y)$ 的最大值点和最小值点都在 D 的边界上

(C) $f(x,y)$ 的最小值点在 D 内，最大值点在 D 的边界上

(D) $f(x,y)$ 的最大值点在 D 内，最小值点在 D 的边界上

◇ 解答题

9. 设 $u=f(x,y,xyz)$，函数 $z=z(x,y)$ 由 $e^{xyz}=\int_{xy}^{z}h(xy+z-t)\mathrm{d}t$ 确定，其中 f 连续可偏导，h 连续，求 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

10. 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性与可微性.

11. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

(1) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

(2) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？

12. 设 $z=(x^2+y^2)^{\sec^2(x+y)}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

13. 设 $u=u(x,y,z)$ 连续可偏导，令 $\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$.

(1) 若 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$，证明：$u$ 仅为 θ 与 φ 的函数.

(2) 若 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial u}{\partial z}$，证明：$u$ 仅为 r 的函数.

14. 设函数 $f(x,y,z)$ 一阶连续可偏导且满足 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$. 证明：

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z).$$

15. 设 $z=\int_0^{x^2+y^2}e^t\,dt$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

16. 设 $u=u(x,y)$ 由方程组 $u=f(x,y,z,t)$，$g(y,z,t)=0$，$h(z,t)=0$ 确定，其中 f,g,h 连续可偏导且 $\dfrac{\partial g}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial h}{\partial t}-\dfrac{\partial g}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial h}{\partial z}\neq 0$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

17. 设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\,dt$ 确定 u 为 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微，$P(t),\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $P(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+P(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

18. 设 $z=z(x,y)$ 满足 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$，令 $\begin{cases} u=x, \\ v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}, \end{cases}$ $\varphi(u,v)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$.

证明：$\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}=0$.

19. 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由 x 轴、y 轴及 $x+y=6$ 所围成的闭区域 D 上的最小值和最大值.

20. 求函数 $u=x+y+z$ 在沿球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的点 (x_0,y_0,z_0) 的外法线方向上的方向导数，在球面上怎样的点使得上述方向导数取最大值与最小值？

21. 设二元函数 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的某邻域内连续. 证明：函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分必要条件是 $\varphi(0,0)=0$.

22. 设 $\Gamma: x=x(t), y=y(t)\ (\alpha<t<\beta)$ 是区域 D 内的光滑曲线，即 $x(t),y(t)$ 在 (α,β) 内有连续的导数且 $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$，$f(x,y)$ 在 D 内有连续的偏导数. 若 $P_0\in\Gamma$ 是函数 $f(x,y)$ 在 Γ 上的极值点，证明：$f(x,y)$ 在点 P_0 沿 Γ 的切线方向的方向导数为零.

23. 已知二元函数 $f(x,y)$ 满足 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，作变换 $\begin{cases} x=uv, \\ y=\dfrac{1}{2}(u^2-v^2), \end{cases}$ 且 $f(x,y)=g(u,v)$，若 $a\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$，求 a,b.

六、重积分

◇ 填空题

1. 设 $f(u)$ 连续，则 $\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_0^x du\int_u^1 vf(u^2-v^2)dv=$________.

2. 设 $f(x,y)$ 在区域 $D:x^2+y^2\leqslant t^2$ 上连续且 $f(0,0)=4$，则 $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{t-\ln(1+t)}=$________.

3. 设 $f(x)$ 连续，则 $\displaystyle\lim_{r\to0}\frac{\int_0^r tf(r^2-t^2)dt}{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}\cos(x+y)d\sigma}=$________.

4. 设 $a>0$，$f(x)=g(x)=\begin{cases}a,0\leqslant x\leqslant1,\\0,\text{其他},\end{cases}$ 而 D 表示整个平面，则

$I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)dxdy=$________.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x,0\leqslant x\leqslant1,\\0,\text{其他},\end{cases}$ D 为 xOy 面，则 $\iint\limits_D f(y)f(x+y)dxdy=$________.

6. 设连续函数 $f(x)$，$f(0)=0$，$F(t)=\iiint\limits_{\Omega_t}[z^2+f(x^2+y^2)]dxdydz$，$\Omega_t:x^2+y^2\leqslant t^2$，

$0\leqslant z\leqslant1$，则 $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}=$________.

◇ 选择题

7. 累次积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}rf(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$ 等于(　　).

(A) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)dx$　　(B) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

(C) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　　(D) $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$

8. 设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，则 $\iint\limits_D \sin x\sin y\cdot\max\{x,y\}d\sigma$ 等于(　　).

(A) π　　(B) $\dfrac{5\pi}{2}$　　(C) $\dfrac{5\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{5\pi}{4}$

9. 设 $\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy=\dfrac{16}{3}\pi$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant a^2$，则 a 为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) $\sqrt2$　　(D) $\sqrt3$

◇ 解答题

10. 设 $f(x)$ 连续,且 $f(0)=1$,令 $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (t\geqslant 0)$,求 $F''(0)$.

11. 计算二重积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}-1}\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

12. 计算$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y$.

13. 已知 $f(x,y)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\0,\text{其他},\end{cases}$ 设 D 为由 $x=0$、$y=0$ 及 $x+y=t$ 所围成的区域,求 $F(t)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

14. 计算$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

15. 计算 $I=\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

16. 计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{3}{16}}\min\left\{\sqrt{\dfrac{3}{16}-x^2-y^2},2(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

17. 计算 $I=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由 $y=-x$,$y=\sqrt{1-x^2}$ 及 $y=\sqrt{x-x^2}$ 围成.

18. 计算 $I=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y+\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$.

19. 计算$\iint\limits_D\sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为单位圆 $x^2+y^2=1$ 所围成的位于第一象限的部分.

20. 计算二重积分$\iint\limits_D(x^2+4x+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是曲线$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 围成的区域.

21. 设半径为 R 的球面 S 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ 上,问 R 取何值时,球面 S 在定球面内的面积最大?

22. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,证明:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_x^b f(y)\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

23. 设 $f(x,y)$,$g(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上连续,且 $g(x,y)\geqslant 0$. 证明:存在$(\xi,\eta)\in D$,使得

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

24. 设 $f(x)$ 在$[0,a]\ (a>0)$ 上非负、二阶可导,且 $f(0)=0$,$f''(x)>0$,$(\bar{x},\bar{y})$ 为 $y=f(x)$,$y=0$,$x=a$ 围成区域的形心,证明:$\bar{x}>\dfrac{2a}{3}$.

25. 设函数 $f(x)\in C[a,b]$,且 $f(x)>0$,D 为区域 $a\leqslant x\leqslant b$,$a\leqslant y\leqslant b$.

证明:$\iint\limits_D\dfrac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant(b-a)^2$.

26. 设 $f(x)$ 连续，$F(t)=\iiint\limits_{V}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}v$，

其中 $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant t^2,0\leqslant z\leqslant h\}(t>0)$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

27. 设 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，证明：$\dfrac{4\sqrt[3]{2}\pi}{3}\leqslant\iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{x+2y-2z+5}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\leqslant\dfrac{8\pi}{3}$.

28. 设 $f(x)$ 为连续函数，计算 $\iint\limits_{D}x[\sqrt{1-x^2}+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x^3,y=1$，$x=-1$ 围成的区域.

29. 交换积分次序并计算 $\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{f'(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}y(a>0)$.

30. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调减少，且 $f(x)>0$. 证明：$\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\dfrac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$.

31. 证明：用二重积分证明 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

七、曲线积分与曲面积分

◇ 填空题

1. 设 L 为从点 $A(0,-1,1)$ 到点 $B(1,0,2)$ 的直线段，则 $\int_L(x+y+z)\mathrm{d}s=$________.

2. 设曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\x+y+z=0,\end{cases}$ 则 $\oint_L(x^2+2y^2+z)\mathrm{d}s=$________.

3. $\int_L|y|\mathrm{d}s=$________，其中 $L:(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)(a>0)$.

4. 设向量场 $\boldsymbol{A}=2x^3yz\boldsymbol{i}-x^2y^2z\boldsymbol{j}-x^2yz^2\boldsymbol{k}$，则其散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ 在点 $M(1,1,2)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}=\{2,2,-1\}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{l}}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})\Big|_M=$________.

5. 设 L 是从点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$ 的有向弧段 $y=x(2-x)$，则

$\int_L(y\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-y}+y)\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^{-y}+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y=$________.

6. 设 $f(u)$ 连续可导，且 $\int_0^4 f(u)\mathrm{d}u=2$，$L$ 为半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$，起点为原点，终点为 $B(2,0)$，则 $I=\int_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=$________.

◇ 选择题

7. 设场 $\boldsymbol{A}=\{x^3+2y,y^3+2z,z^3+2x\}$，曲面 $S:x^2+y^2+z^2=2z$ 内侧，则场 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面指定侧的通量为(　　).

(A) 32π　　(B) -32π　　(C) $\dfrac{32\pi}{5}$　　(D) $-\dfrac{32\pi}{5}$

◇ 解答题

8. 设 $f(x,y,z)$ 连续，Σ 为曲面 $2z=x^2+y^2$ 位于 $z=2$ 与 $z=8$ 之间部分的上侧，计算

$$\iint\limits_{\Sigma}[yf(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[xf(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[2xyf(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

9. 设 $\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x,y)\mathrm{d}x+x\cos y\mathrm{d}y=t^2$，$f(x,y)$ 有一阶连续偏导数，求 $f(x,y)$.

10. 设 L 为曲线 $|x|+|y|=1$ 的逆时针方向，计算 $\oint_L \dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$.

11. 位于点$(0,1)$的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\dfrac{k}{r^2}$（其中常数 $k>0$，且 $r=|AM|$），质点 M 沿曲线 $L:y=\sqrt{2x-x^2}$ 自点 $B(2,0)$ 到点$(0,0)$，求质点 A 对质点 M 所做的功.

12. 在变力 $\boldsymbol{F}=\{yz,xz,xy\}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$，问 ξ,η,ζ 取何值时，$\boldsymbol{F}$ 所做的功最大？求最大的功.

13. 设 $f(x)$ 二阶连续可导，且曲线积分 $\int[3f'(x)-2f(x)+xe^{2x}]y\mathrm{d}x+f'(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，求 $f(x)$.

14. 计算 $\iint\limits_S \dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 S 为圆柱 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 位于 $z=-a$ 与 $z=a$ 之间的部分.

15. 设 $S:x^2+y^2+z^2=a^2$，计算 $\iint\limits_S(x^2+4y^2+9z^2)\mathrm{d}S$.

16. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲线 $\begin{cases}z=1-x^2,\\ y=0\end{cases}(|x|\leqslant 1)$ 绕 z 轴旋转一周所得到的曲面，取上侧.

17. 计算曲线积分 $\oint_C xyz\mathrm{d}z$，其中 $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ y=z,\end{cases}$ 从 z 轴正向看，C 为逆时针方向.

18. 计算 $\oint_L yz\mathrm{d}x+3xz\mathrm{d}y-xy\mathrm{d}z$，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2=4y,\\ 3y-z+1=0,\end{cases}$ 从 z 轴正向看，L 是逆时针方向.

19. 设空间曲线 C 由立体 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 所截而成，计算 $\left|\oint_C(z^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z\right|$.

20. 计算 $I=\oint_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 是绕原点旋转一周的正向光滑闭曲线.

21. 设函数 $f(x,y)$ 在 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 有连续的偏导数，且在 $L:x^2+y^2=1$ 上有 $f(x,y)\equiv 0$.

证明：$f(0,0)=-\dfrac{1}{2\pi}\lim\limits_{r\to 0^+}\iint\limits_{D_r}\dfrac{x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D_r:r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$.

22. 设 L 是不经过点 $(2,0)$，$(-2,0)$ 的分段光滑简单正向闭曲线，就 L 的不同情形计算

$$I=\oint_L\left[\frac{y}{(2-x)^2+y^2}+\frac{y}{(2+x)^2+y^2}\right]dx+\left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}\right]dy.$$

23. 设函数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 上一阶连续可偏导，又

$$f(x,y)=v(x,y)\boldsymbol{i}+u(x,y)\boldsymbol{j},\quad g(x,y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j},$$

且在区域 D 的边界上有 $u(x,y)\equiv 1$，$v(x,y)\equiv y$，求 $\iint\limits_D f\cdot g\,d\sigma$.

24. 设曲线 L 的长度为 l，且 $\max\limits_{(x,y)\in L}\sqrt{P^2+Q^2}=M$. 证明：$\left|\int_L P\,dx+Q\,dy\right|\leqslant Ml$.

八、无穷级数

◇ 填空题

1. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，则 $f^{(n)}(3)=$________.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n!}=$________.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)2^n}=$________.

4. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 条件收敛，则 p 的取值范围是________.

◇ 选择题

5. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=r$，则(　　).

(A) $|r|<1$　　(B) $|r|>1$

(C) $r=-1$　　(D) $r=1$

6. 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$，则(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都绝对收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛

7. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=6$ 处条件收敛，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}(x-2)^{2n}$ 的收敛半径为(　　).

(A) 2　　(B) 4

(C) $\sqrt{2}$　　(D) 无法确定

8. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2} \\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1 \end{cases}$, $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x\,(n=0,1,2\cdots;-\infty<x<+\infty)$,

其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx$，则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ 为(　　).

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{3}{4}$　　(D) $-\dfrac{3}{4}$

◇ 解答题

9. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{1+x^2}dx$ 的敛散性.

10. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,举例说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 不一定收敛;若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项收敛级数,证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 一定收敛.

11. 设 $0\leqslant a_n<\dfrac{1}{n}$,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$ 中,哪个级数一定收敛?

12. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1-\dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n}\right]$ 收敛.

13. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$.

(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值;

(2) 证明:对任意常数 $\lambda>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

14. 设 $a_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n dx$,讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性,若收敛求其和.

15. 设 $\{na_n\}$ 收敛,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛,证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

16. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调减少,又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 的敛散性.

17. 证明:(1) 设 $a_n>0$,且 $\{na_n\}$ 有界,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 收敛;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2 a_n=k>0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

18. 设 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\dfrac{b_{n+1}}{b_n}(n=1,2,\cdots;a_n>0,b_n>0)$,证明:

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

19. 设 $\{u_n\}$, $\{c_n\}$ 为正项数列,证明:

(1) 若对一切正整数 n 满足 $c_n u_n - c_{n+1} u_{n+1} \leqslant 0$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散；

(2) 若对一切正整数 n 满足 $c_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant a(a > 0)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

20. 对常数 p，讨论幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^p \ln n}$ 的收敛域.

21. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足 $a \leqslant f(x) \leqslant b$，且有 $|f'(x)| \leqslant q < 1$，令 $u_n = f(u_{n-1})$ $(n=1,2,\cdots)$，$u_0 \in [a,b]$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 绝对收敛.

22. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一阶连续可导，且 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 发散.

23. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶连续可导，且 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

24. 设 $y=y(x)$ 满足 $y'=x+y$，且满足 $y(0)=1$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[y\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n}\right]$ 的敛散性.

25. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$ 的收敛域.

26. 求函数 $f(x) = \ln(1-x-2x^2)$ 的幂级数，并求出该幂级数的收敛域.

27. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$ 的和函数.

28. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和函数.

29. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!} x^n$ 的和函数.

30. 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

31. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$，且 $F(x)$ 为方程 $xy'+y=e^x$ 的满足 $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 1$ 的解.

(1) 求 $F(x)$ 关于 x 的幂级数；

(2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 的和.

32. 将函数 $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数.

33. 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$，且 $a_0 = 1$，$a_{n+1} = a_n + n(n=0,1,2,\cdots)$.

(1) 求 $f(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$.

34. 证明：$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足微分方程 $y^{(4)} - y = 0$ 并求和函数 $S(x)$.

35. 将函数 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

36. 将函数 $f(x)=x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数.

37. 设 $u_n>0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=q$ 存在. 证明:当 $q>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,当 $q<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

38. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 收敛,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛. 证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

39. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$,对任意的参数 λ,讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^{\lambda}}$ 的敛散性,并证明你的结论.

40. 设函数 $f_0(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt(n=1,2,\cdots)$.

(1) 证明:$f_n(x)=\dfrac{1}{(n-1)!}\int_0^x f_0(t)(x-t)^{n-1}dt(n=1,2,\cdots)$;

(2) 证明:$\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 绝对收敛.

41. 设 $a_0=1,a_1=-2,a_2=\dfrac{7}{2},a_{n+1}=-\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)a_n(n\geqslant 2)$. 证明:当 $|x|<1$ 时,幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛,并求其和函数 $S(x)$.

九、常微分方程

◇ 填空题

1. 设 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$,且有 $y(1)=1$,则 $\int_0^2 y(x)dx=$________.

2. 微分方程 $y'-xe^{-y}+\dfrac{1}{x}=0$ 的通解为________.

3. 微分方程 $yy''-2(y')^2=0$ 的通解为________.

4. 微分方程 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y(x>0)$ 的通解为________.

5. 以 $y=C_1e^x+e^x(C_2\cos x+C_3\sin x)$ 为通解的三阶常系数齐次线性微分方程为________.

6. 设 $y(x)$ 为微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 满足初始条件 $y(0)=1,y'(0)=2$ 的特解,则 $\int_0^1 y(x)dx=$________.

◇ 选择题

7. 设 $y(x)$ 是微分方程 $y''+(x-1)y'+x^2y=e^x$ 满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=1$ 的解,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}$(   ).

(A) 等于 1　　(B) 等于 2　　(C) 等于 0　　(D) 不存在

8. 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-2y'-3y=(2x+1)e^{-x}$ 的特解形式为(　　).

(A)$(ax+b)e^{-x}$　　(B)x^2e^{-x}

(C)$x^2(ax+b)e^{-x}$　　(D)$x(ax+b)e^{-x}$

9. 设 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)$ 为二阶非齐次线性方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ 的三个线性无关解，则该方程的通解为(　　).

(A)$C_1[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]+C_2\varphi_3(x)$

(B)$C_1[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+C_2\varphi_3(x)$

(C)$C_1[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]+C_2[\varphi_1(x)-\varphi_3(x)]$

(D)$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+C_3\varphi_3(x)$，其中 $C_1+C_2+C_3=1$

◇ 解答题

10. 设 $f(x)$ 是连续函数.

(1) 求初值问题 $\begin{cases}y'+ay=f(x)\\y(0)=0\end{cases}$ 的解，其中 $a>0$；

(2) 若 $|f(x)|\leqslant k$，证明：当 $x\geqslant 0$ 时，有 $|y(x)|\leqslant \dfrac{k}{a}(e^{ax}-1)$.

11. 设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}2,x<1,\\0,x>1,\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上求连续函数 $y(x)$，使其在 $(-\infty,1)$ 及 $(1,+\infty)$ 内都满足所给的方程，且满足条件 $y(0)=0$.

12. 设 $f(x)$ 二阶连续可导，$f(0)=0,f'(0)=1$，且 $[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$ 为全微分方程，求 $f(x)$ 及该全微分方程的通解.

13. 利用变换 $x=\arctan t$ 将方程 $\cos^4x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\cos^2x(2-\sin2x)\dfrac{dy}{dx}+y=\tan x$ 化为 y 关于 t 的方程，并求原方程的通解.

14. 设 $f(x)$ 为偶函数，且满足 $f'(x)+2f(x)-3\int_0^x f(t-x)dt=-3x+2$，求 $f(x)$.

15. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 有特解 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$，确定常数 a,b,c，并求该方程的通解.

16. 设 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 且二阶连续可导，又 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$ 且 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$，求 $f(x)$.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导，$f(0)=1$，且 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$.

(1) 求 $f'(x)$；

(2) 证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

18. 设 $y=y(x)$ 二阶可导，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 所满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

19. 设函数 $f(x,y)$ 可微，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，$f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，且 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(0,y+h)}{f(0,y)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\cot y}$，求 $f(x,y)$.

20. 设函数 $f(x)(x\geqslant 0)$ 可微，且 $f(x)>0$. 将曲线 $y=f(x)$，$x=1$，$x=a(a>1)$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周得旋转体体积为 $\dfrac{\pi}{3}[a^2f(a)-f(1)]$. 若 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，求：(1) $f(x)$；(2) $f(x)$ 的极值.

21. 设函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x)-2f(x)=-x$，且由曲线 $y=f(x)$，$x=1$ 及 x 轴$(x\geqslant 0)$ 所围成的平面图形为 D. 若 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小，求：

(1) 曲线 $y=f(x)$；

(2) 曲线在原点处的切线与曲线及直线 $x=1$ 所围成的平面图形的面积.

22. 位于上半平面的上凹曲线 $y=y(x)$ 过点 $(0,2)$，在该点处的切线水平，曲线上任一点 (x,y) 处的曲率与 $\sqrt{y}$ 及 $1+y'^2$ 之积成反比，比例系数为 $k=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，求 $y=y(x)$.

23. 设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，又此曲线上的点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线方程，并求函数 $y(x)$ 的极值.

24. 飞机以匀速 v 沿 y 轴正向飞行，当飞机行至 O 时被发现，随即从 x 轴上 $(x_0,0)$ 处发射一枚导弹向飞机飞去 $(x_0>0)$，若导弹方向始终指向飞机，且速度大小为 $2v$.

(1) 求导弹运行的轨迹满足的微分方程及初始条件；

(2) 导弹运行方程.

25. 细菌的增长率与总数成正比. 如果培养的细菌总数在24小时内由100增长到400，求前12小时后的细菌总数.

26. 某湖泊水量为 V，每年排入湖泊中内含污染物 A 的污水量为 $\dfrac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为 $\dfrac{V}{6}$，流出湖的水量为 $\dfrac{V}{3}$. 设1999年底湖中 A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定指标. 为了治理污染，从2000年初开始，限定排入湖中含 A 污水的浓度不超过 $\dfrac{m_0}{V}$. 问至多经过多少年，湖中污染物 A 的含量降到 m_0 以内(设湖中 A 的浓度是均匀的)？

27. 在 $t=0$ 时，两只桶内各装 10 L 的盐水，盐的浓度为 15 g/L，用管子以 2 L/min 的速度将净水输入到第一只桶内，搅拌均匀后的混合液又由管子以 2 L/min 的速度被输送到第二只桶内，再将混合液搅拌均匀，然后用 1 L/min 的速度输出. 求在任意时刻 $t>0$，从第二只桶内流出的水中含盐所满足的微分方程.

28. 某人的食量是 2 500 卡 / 天，其中 1 200 卡 / 天用于基本的新陈代谢. 在健身运动中，他所消耗的为 16 卡 / 千克 / 天乘以他的体重. 假设以脂肪形式储存的热量百分之百有效，而一千克脂肪含热量 10 000 卡，求该人体重怎样随时间变化.

29. 一条均匀链条挂在一个无摩擦的钉子上，链条长 18 m，运动开始时链条一边下垂 8 m，另一边下垂 10 m，问整个链条滑过钉子需要多长时间？

30. 质量为 1 g 的质点受外力作用作直线运动，外力和时间成正比，和质点的运动速度成反比，在 $t=10$ s 时，速度等于 50 cm/s. 外力为 39.2 cm/s^2，问运动开始 1 min 后的速度是多少？

31. 设非负函数 $f(x)$ 当 $x\geqslant 0$ 时连续可微，且 $f(0)=1$. 由 $y=f(x)$，x 轴，y 轴及过点 $(x,0)$ 且垂直于 x 轴的直线围成的图形的面积与 $y=f(x)$ 在 $[0,x]$ 上弧的长度相等，求 $f(x)$.

32. 设函数 $f(x)$ 二阶连续可导，$f(0)=1$ 且有 $f'(x)+3\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+2x\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}=0$，求 $f(x)$.

33. 早晨开始下雪，整天不停，中午一辆扫雪车开始扫雪，每小时扫雪体积为常数，到下午 2 点扫雪 2 km，到下午 4 点又扫雪 1 km，问降雪是什么时候开始的？

34. 设 A 从原点出发，以固定速度 v_0 沿 y 轴正向行驶，B 从 $(x_0,0)$ 出发 $(x_0<0)$，以始终指向点 A 的固定速度 v_1 朝 A 追去，求 B 的轨迹方程.

35. 飞机在机场开始滑行着陆，在着陆时刻已失去垂直速度，水平速度为 v_0(m/s)，飞机与地面的摩擦系数为 μ，且飞机运动时所受空气的阻力与速度的平方成正比，在水平方向的比例系数为 k_x(kg·s^2/m^2)，在垂直方向的比例系数为 k_y(kg·s^2/m^2). 设飞机的质量为 m(kg)，求飞机从着陆到停止所需要的时间.

线性代数部分

一、行列式

◇ 填空题

1. 设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\7&7&7&3&3\\3&2&4&5&2\\3&3&3&2&2\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}$，则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$________.

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是三阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，且 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-3\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}|=$ ________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|<0$，$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=-4$，则 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=$________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$，则 $|(k\boldsymbol{A})^*|=$________.

◇ 选择题

5. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶矩阵，下列结论正确的是(　　).

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

(B) 若 $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(C) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|$

(D) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量，且 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$ 为(　　).

(A) $m+n$　　(B) $m-n$　　(C) $-(m+n)$　　(D) $n-m$

◇ 解答题

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|<0$. 证明：$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$.

8. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是非零矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|$ 中每个元素 a_{ij} 与其代数余子式 A_{ij} 相等. 证明：$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

9. 计算 $D_{2n}=\begin{vmatrix}a&&&&&b\\&\ddots&&&\iddots&\\&&a&b&&\\&&b&a&&\\&\iddots&&&\ddots&\\b&&&&&a\end{vmatrix}$.

10. 计算$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$(a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n)$.

11. 设 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$,求 $A_{k1}+A_{k2}+\cdots+A_{kn}$.

12. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵,且 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$,且 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值,$|\boldsymbol{B}|=2$,求$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & (2\boldsymbol{B})^* \end{vmatrix}$.

二、矩阵

◇ 填空题

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是三阶矩阵,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,且满足 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{ABA}+2\boldsymbol{A}^2$,则 $\boldsymbol{B}=$________.

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{21}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{20}=$________.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & t & 9 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵,$r(\boldsymbol{B}^*)=1$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $t=$________.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & -1 \\ 4 & 2 & a \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$ 为三阶矩阵,且 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$,则 $r(\boldsymbol{B})=$________.

◇ 选择题

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 阶矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 阶矩阵,则(　　).

(A) 当 $m>n$ 时,必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(B) 当 $m>n$ 时,必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$

(C) 当 $n>m$ 时,必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(D) 当 $n>m$ 时,必有 $|\boldsymbol{AB}|=0$

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 皆为可逆矩阵,则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}$ 等于(　　).

(A)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$　　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

(C)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$　　(D)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵,则( ).

(A)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$　　(B)$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

(C)$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{B}^*$　　(D)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^*$ 一定可逆

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,k 为常数,则 $(k\boldsymbol{A})^*$ 等于( ).

(A)$k\boldsymbol{A}^*$　　(B)$k^n\boldsymbol{A}^*$

(C)$k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$　　(D)$k^{n(n-1)}\boldsymbol{A}^*$

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,则下列结论成立的是( ).

(A)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　(B)$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$　　(D) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵,且 $r(\boldsymbol{A})=m<n$,则( ).

(A)$\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量都线性无关

(B)$\boldsymbol{A}$ 的任意 m 阶子式都不等于零

(C) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多个解

(D) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换一定可以化为 $(\boldsymbol{E}_m \vdots \boldsymbol{O})$

11. 设 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$,若 $\boldsymbol{P}_1^m\boldsymbol{AP}_2^n=\begin{pmatrix}a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{pmatrix}$,

则 m,n 可取( ).

(A)$m=3,n=2$　　(B)$m=3,n=5$

(C)$m=2,n=3$　　(D)$m=2,n=2$

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_4&a_3&a_2&a_1\\b_4&b_3&b_2&b_1\\c_4&c_3&c_2&c_1\\d_4&d_3&d_2&d_1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 为( ).

(A)$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　(B)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$

(C)$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$　　(D)$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$

13. 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Q}$ 为三阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$,则( ).

(A) 当 $t=6$ 时,$r(\boldsymbol{Q})=1$　　(B) 当 $t=6$ 时,$r(\boldsymbol{Q})=2$

(C) 当 $t\neq 6$ 时,$r(\boldsymbol{Q})=1$　　(D) 当 $t\neq 6$ 时,$r(\boldsymbol{Q})=2$

◇ 解答题

14. 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零列向量. 证明:

(1)$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位向量;

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}$ 是单位向量时 $\boldsymbol{A}$ 为不可逆矩阵.

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异矩阵,$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量,b 为常数,$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^* & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & b \end{pmatrix}$.

(1) 计算 $\boldsymbol{PQ}$;

(2) 证明:$\boldsymbol{PQ}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\neq b$.

16. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$,且 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

17. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维非零列向量,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$. 证明:$r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$.

18. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维单位列向量,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$. 证明:$r(\boldsymbol{A})<n$.

19. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,证明:$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, r(\boldsymbol{A})=n, \\ 1, r(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0, r(\boldsymbol{A})<n-1, \end{cases}$ 其中 $n\geqslant 2$.

20. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,证明:$r(\boldsymbol{A})=1$ 的充分必要条件是存在 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

21. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵且 $r(\boldsymbol{A})=n-1$. 证明:存在常数 k,使得 $(\boldsymbol{A}^*)^2=k\boldsymbol{A}^*$.

22. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geqslant 3)$ 阶矩阵,证明:$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

23. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $m\times n$ 及 $n\times s$ 阶矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 证明:$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

三、向量

◇ 填空题

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组为________,其余的向量用极大线性无关组表示为________.

◇ 选择题

2. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,且向量 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则下列结论正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 经初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,则(　　).

(A)$\boldsymbol{\beta}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示

(B)$\boldsymbol{\beta}_4$ 能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示,但表示法不唯一

(C)$\boldsymbol{\beta}_4$ 能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示,且表示法唯一

(D)$\boldsymbol{\beta}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示不能确定

4. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是 n 维列向量,若对于任意不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,皆有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\boldsymbol{0}$,则(　　).

(A)$m>n$

(B)$m=n$

(C) 存在 m 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

(D) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

5. 下列命题正确的是(　　).

(A) 若向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_n$ 线性无关

(B) 若向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中任一向量都可由其余向量线性表示

(C) 若向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\alpha}_1$ 一定线性无关

(D) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 个 n 维向量且线性无关,$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_n$ 线性无关,则 $\boldsymbol{A}$ 一定可逆

6. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充分必要条件是(　　).

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中任意两个向量不成比例

(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是两两正交的非零向量组

(C) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$,方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中向量的个数小于向量的维数

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,且 $m>n$,下列命题正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组一定线性无关

(B) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多组解

(C)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 一定可逆

(D)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=n$

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵,则必有(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

(B)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

(C)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

(D)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 为两个 n 维向量组,且 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=r$,则(　　).

(A) 两个向量组等价

(B)$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=r$

(C) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则两向量组等价

(D) 两向量组构成的矩阵等价

◇ 解答题

10. 设向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；（Ⅱ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；（Ⅲ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$，若向量组（Ⅰ）与向量组（Ⅱ）的秩为 3，而向量组（Ⅲ）的秩为 4. 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

11. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个 n 维线性无关的向量，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵. 证明：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

12. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个 n 维列向量，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm T}\boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}$ 不是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，证明：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_t$ 线性无关.

14. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 个 n 维向量，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是任一 n 维向量总可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

15. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，而 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

16. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为三维列向量组，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都线性无关.

（1）证明：至少存在一个非零向量可同时由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示；

（2）设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，求出可由两组向量同时线性表示的向量.

四、线性方程组

◇ 填空题

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\1 & 1 & b\\0 & a & -2\\1 & 4 & -2\end{pmatrix}$，且存在三阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $a=$________，$b=$________.

2. 设 $\boldsymbol{\eta}$ 为非零向量，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\2 & 4 & 1\\3 & 3a+2 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}$ 为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $a=$________，方程组的通解为________.

◇ 选择题

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times s$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 阶矩阵，则方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 同解的充分条件是（　　）.

(A)$r(\boldsymbol{A})=s$　　(B)$r(\boldsymbol{A})=m$

(C)$r(\boldsymbol{B})=s$　　(D)$r(\boldsymbol{B})=n$

4. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$,且非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同解 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$,则下列命题正确的是(　　).

(A)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$

(B)$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的解

(C) 方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)$

(D)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)$

5. 设有方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$,其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 阶矩阵,下列四个命题:

(1) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$

(2) 若 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解都是 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的解

(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解,则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$

(4) 若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$,则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 同解

以上命题正确的是(　　).

(A)(1)(2)　　(B)(1)(3)

(C)(2)(4)　　(D)(3)(4)

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 阶矩阵,则(　　).

(A) 当 $m>n$ 时,线性齐次方程组 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

(B) 当 $m>n$ 时,线性齐次方程组 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

(C) 当 $n>m$ 时,线性齐次方程组 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

(D) 当 $n>m$ 时,线性齐次方程组 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

7. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵,则方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是(　　).

(A)$r(\boldsymbol{A})=m$

(B)$r(\boldsymbol{A})=n$

(C)$\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵

(D)$r(\boldsymbol{A})=n$ 且 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示

◇ 解答题

8. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 为 n 维线性无关的列向量组,且与 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 正交.证明:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

9. 设齐次线性方程组 $\begin{cases}ax_1+bx_2+\cdots+bx_n=0,\\bx_1+ax_2+\cdots+bx_n=0,\\\qquad\vdots\\bx_1+bx_2+\cdots+ax_n=0,\end{cases}$ 其中 $ab\neq0,n\geqslant2$.讨论 a,b 取何值时,方程组只有零解、有无穷多个解?在有无穷多个解时求出其通解.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的第一行元素为 a,b,c 且不全为零,又 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,

求方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

11. a,b 取何值时,方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$ 有解?

12. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵且 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$. 证明:方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 有公共的非零解.

13. 设(Ⅰ) $\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_4=0, \end{cases}$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{b}$ 的四个解,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\5\\8\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\4\\5\\5\end{pmatrix}$, $r(\boldsymbol{B})=2$.

(1) 求方程组(Ⅰ)的基础解系;

(2) 求方程组(Ⅱ) $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系;

(3)(Ⅰ)与(Ⅱ)是否有公共的非零解?若有公共解求出其公共解.

14. 设(Ⅰ) $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$,(Ⅱ) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$.

(1) 求(Ⅰ),(Ⅱ)的基础解系;

(2) 求(Ⅰ),(Ⅱ)的公共解.

15. (Ⅰ) $\begin{cases} -2x_1+x_2+ax_3-5x_4=1, \\ x_1+x_2-x_3+bx_4=4, \\ 3x_1+x_2+x_3+2x_4=c, \end{cases}$ (Ⅱ) $\begin{cases} x_1+x_4=1, \\ x_2-2x_4=2, \\ x_3+x_4=-1, \end{cases}$ 问 a,b,c 取何值时,(Ⅰ),(Ⅱ)为同解方程组?

16. 证明:线性方程组(Ⅰ) $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ 有解的充分必要条件是方程组

(Ⅱ) $\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m=0, \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m=0, \\ \quad\vdots \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m=0 \end{cases}$ 与(Ⅲ) $\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m=0, \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m=0, \\ \quad\vdots \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m=0, \\ b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m=0 \end{cases}$ 是同解方程组.

17. 设(Ⅰ) $\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0, \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$ 的一个基础解系为 $\begin{pmatrix}b_{11}\\b_{12}\\\vdots\\b_{1,2n}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}b_{21}\\b_{22}\\\vdots\\b_{2,2n}\end{pmatrix}$, $\cdots$, $\begin{pmatrix}b_{n1}\\b_{n2}\\\vdots\\b_{n,2n}\end{pmatrix}$,

写出(Ⅱ)$\begin{cases} b_{11}y_1+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0, \\ b_{21}y_1+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0, \\ \quad\vdots \\ b_{n1}y_1+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0 \end{cases}$的通解并说明理由.

18. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times s$ 阶矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $s\times n$ 阶矩阵,且 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{AB})$. 证明:方程组 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组.

19. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 n 阶矩阵,$r(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{DB})=n$.

(1) 证明:$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=n$;

(2) 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 分别为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,证明:$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r,\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 线性无关.

20. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$A_{11}\neq 0$. 证明:非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

21. 证明:$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

22. 证明:$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

23. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵,且非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 满足 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=r<n$. 证明:方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的线性无关的解向量的个数最多是 $n-r+1$ 个.

24. 讨论方程组$\begin{cases} ax_1+x_2-x_3=1, \\ x_1-x_2+x_3=b, \\ 2x_1+2x_2+bx_3=2 \end{cases}$的解的情况,在方程组有解时求出其解,其中 a,b 为常数.

25. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a&4&0\\-1&0&c\\1&b&1\end{pmatrix}$,问 a,b,c 为何值时,矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解? 有解时求出全部解.

26. 当 a,b 取何值时,方程组$\begin{cases} x_1+2x_3+2x_4=6, \\ 2x_1+x_2+3x_3+ax_4=0, \\ 3x_1+ax_3+6x_4=18, \\ 4x_1-x_2+9x_3+13x_4=b \end{cases}$无解、有唯一解、有无数个解? 在有无数个解时求出其通解.

五、矩阵的特征值和特征向量

◇ 填空题

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$,$|\boldsymbol{A}|>0$ 且 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $-1,-2,2$,则 $a_{11}+a_{22}+a_{33}=$________.

2. 设三阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-\frac{1}{2},\lambda_3=\frac{1}{2}$，其对应的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $P=(2\alpha_3,-3\alpha_1,-\alpha_2)$，则 $P^{-1}(A^{-1}+2E)P=$________.

3. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是三阶矩阵 A 的三个不同特征值，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别是属于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，若 $\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2),A^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ 线性无关，则 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 满足________.

4. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维线性无关的列向量，A 是三阶方阵，且 $A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2,A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_3=\alpha_3+\alpha_1$，则 $|A|=$________.

5. 设 A 为三阶实对称矩阵，$\alpha_1=(a,-a,1)^T$ 是方程组 $AX=0$ 的解，$\alpha_2=(a,1,1-a)^T$ 是方程组 $(A+E)X=0$ 的解，则 $a=$________.

6. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&-2&a-3\\0&0&1\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，则 $a=$________.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，则 $a=$________.

◇ 选择题

8. 设三阶矩阵 A 的特征值为 $-1,1,2$，其对应的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $P=(3\alpha_2,-\alpha_3,2\alpha_1)$，则 $P^{-1}AP$ 等于(　　).

(A) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$

9. 设 A,B 为 n 阶矩阵，且 A,B 的特征值相同，则(　　).

(A) A,B 相似于同一个对角矩阵

(B) 存在正交阵 Q，使得 $Q^TAQ=B$

(C) $r(A)=r(B)$

(D) 以上都不对

10. 设 A 是 n 阶矩阵，下列命题错误的是(　　).

(A) 若 $A^2=E$，则 -1 一定是矩阵 A 的特征值

(B) 若 $r(E+A)<n$，则 -1 一定是矩阵 A 的特征值

(C) 若矩阵 A 的各行元素之和为 -1，则 -1 一定是矩阵 A 的特征值

(D) 若 A 是正交矩阵，且 A 的特征值之积小于零，则 -1 一定是 A 的特征值

11. 与矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的矩阵为(　　).

(A)$\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\0 & 2 & 3\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$　　(B)$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\-1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

(C)$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　　(D)$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,下列结论正确的是(　　).

(A) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的个数相等

(B) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似于同一对角阵

(C) 若 $r(\boldsymbol{A})=r<n$,则 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换可化为$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

(D) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,则 $\boldsymbol{A}$ 的秩与其非零特征值的个数相等

13. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵,则(　　).

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$

(B) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$

(C)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 与同一个对角矩阵相似

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

◇ 解答题

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,$r(\boldsymbol{A})=r(0<r<n)$. 求 $|5\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|$.

15. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\a & 1 & 2\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 相似于对角阵.

求:(1)a 及可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$,其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵;　(2)$\boldsymbol{A}^{100}$.

16. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\x & 4 & y\\-3 & -3 & 5\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量,且 $\lambda=2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

17. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & 0 & 2\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & -1 & b\\0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ 有四个线性无关的特征向量,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量,并求 $\boldsymbol{A}^{2010}$.

18. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\1 & a & 1\\a & 1 & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$,方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 有解但不唯一.

(1) 求 a;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵;

(3) 求正交阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为对角阵.

19. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&a&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$.

(1) 若 A 有一个特征值为 3,求 a;

(2) 求可逆矩阵 P,使得 P^TA^2P 为对角矩阵.

20. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\3&a&-1\\4&-2&b\end{pmatrix}$ 可逆,$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 A^* 对应的特征向量.

(1) 求 a,b 及 α 对应的 A^* 的特征值;

(2) 判断 A 可否对角化.

21. 设 A 为三阶矩阵,ξ_1,ξ_2,ξ_3 是三维线性无关的列向量,且

$$A\xi_1=-\xi_1+2\xi_2+2\xi_3,\quad A\xi_2=2\xi_1-\xi_2-2\xi_3,\quad A\xi_3=2\xi_1-2\xi_2-\xi_3.$$

(1) 求矩阵 A 的全部特征值;

(2) 求 $|A^*+2E|$.

22. 设 A 为三阶矩阵,且有三个互异的正的特征值,设矩阵 $B=(A^*)^2-4E$ 的特征值为 0,5,32. 求 A^{-1} 的特征值并判断 A^{-1} 是否可对角化.

23. 设 $A=\begin{pmatrix}a&1&c\\0&b&0\\-4&c&1-a\end{pmatrix}$ 的一个特征值为 $\lambda_1=2$,其对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$.

(1) 求常数 a,b,c;

(2) 判断 A 是否可对角化,若可对角化,求可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵. 若不可对角化,说明理由.

24. 设二维非零向量 α 不是二阶方阵 A 的特征向量.

(1) 证明:$\alpha,A\alpha$ 线性无关;

(2) 若 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$,求 A 的特征值,讨论 A 可否对角化;

25. 设 A 是三阶矩阵,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三个三维线性无关的列向量,且满足

$$A\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3,A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3,A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2.$$

(1) 求矩阵 A 的特征值;

(2) 判断矩阵 A 可否对角化.

26. (1) 若 A 可逆且 $A\sim B$,证明:$A^*\sim B^*$;

(2) 若 $A\sim B$,证明:存在可逆矩阵 P,使得 $AP\sim BP$.

27. 设 $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\a&1&a-2\\-3&0&4\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量,求 a 及 A^n.

28. 设方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\2x_1+(a+2)x_2+(a+1)x_3=a+3,\\x_1+2x_2+ax_3=3\end{cases}$ 有无穷多个解,$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}$,$\alpha_2=\begin{pmatrix}-a\\1\\0\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$为矩阵$\boldsymbol{A}$的分别属于特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1$的特征向量.

(1) 求$\boldsymbol{A}$;

(2) 求$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{E}|$.

29. 设$\boldsymbol{A}$为三阶实对称矩阵,$\boldsymbol{A}$的每行元素之和为5,$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$有非零解且$\lambda_1=2$是$\boldsymbol{A}$的特征值,对应特征向量为$(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求$\boldsymbol{A}$的其他特征值与特征向量;

(2) 求$\boldsymbol{A}$.

30. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&5&-2\\0&-2&a\end{pmatrix}\sim\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&b&0\\0&0&6\end{pmatrix}$,求$a,b$及正交矩阵$\boldsymbol{P}$,使得$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

31. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵,且$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$.证明:$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$有公共的特征向量.

32. 设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$n$维列向量,且$\boldsymbol{\alpha}_n\neq\mathbf{0}$,若

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{A\alpha}_n=\mathbf{0}.$$

(1) 证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关;

(2) 求$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量.

33. 设$\boldsymbol{A}$为三阶方阵,$\boldsymbol{A}$的每行元素之和为5,$\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$的通解为$k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$,设$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}$,求$\boldsymbol{A\beta}$.

34. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&2\\-1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&4&-1\end{pmatrix}$,求$a,b$及可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

35. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-a\\2&a&-2\\-a&-1&1\end{pmatrix}$,求$\boldsymbol{A}$的特征值与特征向量,判断矩阵$\boldsymbol{A}$是否可对角化,若可对角化,求出可逆矩阵$\boldsymbol{P}$及对角阵.

36. (1) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵,$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$,且$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都可相似对角化,证明:$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

(2) 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是否相似?若$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$相似,求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$,使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

六、二次型

◇ 填空题

1. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的正惯性指数是 2，且 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，该二次型的规范形为________.

◇ 选择题

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&5&-4\\0&-4&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　).

(A) 合同且相似　　(B) 相似但不合同

(C) 合同但不相似　　(D) 既不相似又不合同

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶实对称矩阵，若对任意的三维列向量 $\boldsymbol{X}$，有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$，则(　　).

(A) $|\boldsymbol{A}|=0$　　(B) $|\boldsymbol{A}|>0$

(C) $|\boldsymbol{A}|<0$　　(D) 以上都不对

◇ 解答题

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶实矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})=n$. 证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵. 证明：对任意的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为正定矩阵.

6. 设 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

7. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正定矩阵. 证明：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

8. 三元二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 经过正交变换化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$，且 $\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}$ 的非零特征值对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，求此二次型.

9. 设二次型 $f=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2bx_1x_3+2x_2x_3$ 经过正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$ 化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2+4y_3^2$，求参数 a，b 及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

10. 设齐次线性方程组 $\begin{cases}(a+3)x_1+x_2+2x_3=0\\2ax_1+(a-1)x_2+x_3=0\\(a-3)x_1-3x_2+ax_3=0\end{cases}$ 有非零解，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&a&-2\\2&-2&9\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，求 a，并求当 $\|\boldsymbol{X}\|=\sqrt{2}$ 时 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 的最大值.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值都大于零. 证明：$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 阶实矩阵. 证明：$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 正定的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{B})=n$.

概率统计部分

一、随机事件与概率

◇ 填空题

1. 设 A,B 是两个随机事件，且 $P(A)+P(B)=0.8, P(A+B)=0.6$，则 $P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})$ $=$________.

2. 设 A,B 是两个随机事件，$P(A\mid B)=0.4, P(B\mid A)=0.4, P(\overline{A}\mid\overline{B})=0.7$，则 $P(A+B)$ $=$________.

3. 设 A,B 是两个随机事件，且 $P(A)=0.4, P(B)=0.5, P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B})$，则 $P(A\overline{B})$ $=$________.

4. 设 $P(A)=0.6, P(A\overline{B})=0.2, P(\overline{A}B)=0.3$，则 $P(A+\overline{B}\mid\overline{A})=$________.

5. 独立投骰子两次，X,Y 表示投出的点数，令 $A=\{X+Y=10\}, B=\{X>Y\}$，则 $P(A+B)$ $=$________.

6. 设 A,B 相互独立，只有 A 发生和只有 B 发生的概率都是 $\frac{1}{4}$，则 $P(A)=$________.

7. 随机向区域 $D:0<y<\sqrt{2ax-x^2}\ (a>0)$ 内扔一点，该点落在半圆内任何区域的概率与该区域的面积成正比，则落点与原点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为________.

8. 一批产品中一等品、二等品、三等品的比例分别为 $60\%, 30\%, 10\%$，从中任取一件结果不是三等品，则取到一等品的概率为________.

9. 三次独立试验中 A 发生的概率不变，若 A 至少发生一次的概率为 $\frac{19}{27}$，则一次试验中 A 发生的概率为________.

10. 设 10 件产品中有 4 件不合格，从中任取两件，已知两件中有一件不合格，则另一件产品也不合格的概率为________.

◇ 选择题

11. 设事件 A,B 互不相容，且 $0<P(A)<1$，则有（　　）.

(A) $P(B\mid\overline{A})+P(A)P(B\mid\overline{A})=P(B)$

(B) $P(B\mid\overline{A})-P(A)P(B\mid\overline{A})=P(B)$

(C) $P(B\mid\overline{A})+P(A)P(B\mid\overline{A})=P(\overline{B})$

(D) $P(B\mid\overline{A})-P(A)P(B\mid\overline{A})=P(\overline{B})$

12. 设 $0 < P(C) < 1$,且 $P(A+B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C)$,则下列正确的是(　　).

(A)$P(A+B \mid \overline{C}) = P(A \mid \overline{C}) + P(B \mid \overline{C})$

(B)$P(AC+BC) = P(AC) + P(BC)$

(C)$P(A+B) = P(A \mid C) + P(B \mid C)$

(D)$P(C) = P(A)P(C \mid A) + P(B)P(C \mid A)$

13. 以下命题正确的是(　　).

(A) 若事件 A,B,C 两两独立,则三个事件一定相互独立

(B) 设 $P(A) > 0, P(B) > 0$,若 A,B 独立,则 A,B 一定互斥

(C) 设 $P(A) > 0, P(B) > 0$,若 A,B 互斥,则 A,B 一定独立

(D)A,B 既互斥又相互独立,则 $P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$

14. 设事件 A,C 独立,B,C 也独立,且 A,B 不相容,则(　　).

(A)$A+B$ 与 $\overline{C}$ 独立　　(B)$A+B$ 与 C 不相容

(C)$A+B$ 与 $\overline{C}$ 不独立　　(D)$A+B$ 与 $\overline{C}$ 对立

15. 若事件 A_1, A_2, A_3 两两独立,则下列结论成立的是(　　).

(A)A_1, A_2, A_3 相互独立

(B)$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ 两两独立

(C)$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

(D)$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ 相互独立

16. 下列命题不正确的是(　　).

(A) 若 $P(A) = 0$,则事件 A 与任意事件 B 独立

(B) 常数与任何随机变量独立

(C) 若 $P(A) = 1$,则事件 A 与任意事件 B 独立

(D) 若 $P(A+B) = P(A) + P(B)$,则事件 A,B 互不相容

17. 设 A,B 是任两个随机事件,下列事件中与 $A+B=B$ 不等价的是(　　).

(A)$A \subset B$　　(B)$\overline{B} \subset \overline{A}$

(C)$A\overline{B} = \varnothing$　　(D)$\overline{A}B = \varnothing$

18. 设事件 A,B,C 两两独立,则事件 A,B,C 相互独立的充要条件是(　　).

(A)A 与 BC 相互独立　　(B)AB 与 $A+C$ 相互独立

(C)AB 与 AC 相互独立　　(D)$A+B$ 与 $A+C$ 相互独立.

19. 连续独立地投两次硬币,令 $A_1 = \{$第一次出现正面$\}$,$A_2 = \{$第二次出现正面$\}$,$A_3 = \{$两次中一次正面一次反面$\}$,$A_4 = \{$两次都出现正面$\}$,则(　　).

(A)A_1, A_2, A_3 相互独立　　(B)A_1, A_2, A_3 两两独立

(C)A_2, A_3, A_4 相互独立　　(D)A_2, A_3, A_4 两两独立

◇ 解答题

20. 将编号为 1,2,3 的三本书随意排列在书架上,求至少有一本书从左到右排列的序号与它的编号相同的概率.

21. 袋中有 a 个黑球和 b 个白球,一个一个地取球,求第 k 次取到黑球的概率($1 \leqslant k \leqslant a+b$).

22. 甲、乙两船驶向不能同时停靠两条船的码头，它们一天到达时间是等可能的，如果甲停靠，则停靠的时间为1小时，若乙停靠，则停靠的时间为2小时，求它们不需要等候的概率.

23. 某人打电话忘记对方号码最后一位，因而对最后一位数随机拨号，设拨完某地区规定的位数才完成一次拨号，且假设对方不占线，求到第k次才拨通对方电话的概率.

24. 甲、乙两人依次无放回从1,2,…,15中各取一个数，设甲取到的数是5的倍数，求甲数大于乙数的概率.

25. 甲、乙两人独立对同一目标进行射击，命中目标概率分别为60%和50%.

(1) 甲、乙两人同时向目标射击，求目标被命中的概率；

(2) 甲、乙两人任选一人，由此人射击，目标被击中，求是甲击中的概率.

26. 设事件A,B独立. 证明：事件A,$\overline{B}$、$\overline{A}$,B及$\overline{A}$,$\overline{B}$都是独立的事件组.

27. 设A,B同时发生，则C发生. 证明：$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

28. 设有来自三个地区的各10名、15名和25名考生的报名表，其中女生的报名表分别为3份、7份和5份. 随机取出一个地区，再从中抽取两份报名表.

(1) 求先抽到的一份报名表是女生表的概率p；

(2) 设后抽到的一份报名表为男生的报名表，求先抽到的报名表为女生报名表的概率q.

二、随机变量及其分布

◇ 填空题

1. 设一次试验成功的概率为p，进行100次独立重复试验，当$p=$________时，成功次数的标准差最大，其最大值为________.

2. 设每次试验成功的概率为$p=\dfrac{3}{4}$，X表示首次成功需要试验的次数，则X取偶数的概率为________.

3. 设随机变量X的概率密度为$f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}(-\infty<x<+\infty)$，$Y=X^2$的概率密度为________.

◇ 选择题

4. 设随机变量X的密度函数为$f(x)$，且$f(x)$为偶函数，X的分布函数为$F(x)$，则对任意实数a，有(　　).

(A)$F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　(B)$F(-a)=\dfrac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

(C)$F(-a)=F(a)$　　(D)$F(-a)=2F(a)-1$

5. 设随机变量X,Y的分布函数分别为$F_1(x)$,$F_2(x)$，为使得$F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$为某一随机变量的分布函数，则有(　　).

(A)$a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{1}{2}$　　(B)$a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{3}{2}$

(C)$a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$　　(D)$a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$

6. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，则下列函数中可作为某随机变量的分布函数的是(　　).

(A)$F(x^2)$　　(B)$F(-x)$

(C)$1-F(x)$　　(D)$F(2x-1)$

7. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则随机变量 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数(　　).

(A) 是阶梯函数　　(B) 恰有一个间断点

(C) 至少有两个间断点　　(D) 是连续函数

◇ 解答题

8. 有甲、乙两个口袋，两袋中都有 3 个白球 2 个黑球，现从甲袋中任取一球放入乙袋，再从乙袋中任取 4 个球，设 4 个球中的黑球数用 X 表示，求 X 的分布律.

9. 设一设备在时间长度为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)\sim P(\lambda t)$.

(1) 求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布；

(2) 求设备在无故障工作 8 小时下，再无故障工作 8 小时的概率.

10. 设随机变量 X 满足 $|X|\leqslant 1$，且 $P(X=-1)=\frac{1}{8}$，$P(X=1)=\frac{1}{4}$，在$\{-1<X<1\}$ 发生的情况下，X 在$(-1,1)$ 内任一子区间上的条件概率与该子区间长度成正比.

(1) 求 X 的分布函数；

(2) 求 $P(X<0)$.

11. 设 X 的密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}(-\infty<x<+\infty)$，求 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的密度 $f_Y(y)$.

12. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

13. 设 $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & Y\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的概率.

14. 设随机变量 $X\sim E(\lambda)$，令 $Y=\begin{cases}X, & |X|\leqslant 1,\\ -X, & |X|>1,\end{cases}$ 求 $P(X+Y=0)$ 及 $F_Y(y)$.

三、多维随机变量及其分布

◇ 填空题

1. 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,4)$，Y 的分布律为 $Y\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$，

则 $P(X+2Y\leqslant 4)=$________.

2. 设(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-2x}-e^{-3y}+e^{-(2x+3y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

则$P(\max\{X,Y\}>1)=$________.

3. 设X,Y相互独立且都服从$(0,2)$上的均匀分布，令$Z=\min\{X,Y\}$，则$P(0<Z<1)$ $=$________.

4. 设随机变量X和Y相互独立，且分布函数为$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{3}{4}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{y+1}{2}, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$ 令$U=X+Y$，则U的分布函数为________.

5. 设随机变量(X,Y)的联合密度为$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 则$P(X>5\mid Y\leqslant 3)$ $=$________.

6. 设X,Y为两个随机变量，且$P(X\geqslant 0,Y\geqslant 0)=\dfrac{3}{7}$，$P(X\geqslant 0)=P(Y\geqslant 0)=\dfrac{4}{7}$，则$P(\max\{X,Y\}\geqslant 0)=$________.

◇ 选择题

7. 设随机变量X,Y相互独立，它们的分布函数为$F_X(x),F_Y(y)$，则$Z=\min\{X,Y\}$的分布函数为(　　).

(A)$F_Z(z)=\max\{F_X(z),F_Y(z)\}$

(B)$F_Z(z)=\min\{F_X(z),F_Y(z)\}$

(C)$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

(D)$F_Z(z)=F_Y(z)$

8. 设随机变量X,Y相互独立，它们的分布函数为$F_X(x),F_Y(y)$，则$Z=\max\{X,Y\}$的分布函数为(　　).

(A)$F_Z(z)=\max\{F_X(z),F_Y(z)\}$

(B)$F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$

(C)$F_Z(z)=\max\{F_X(z),F_Y(z)\}$

(D)$F_Z(z)=F_Y(z)$

9. 设随机变量X与Y相互独立且都服从参数为λ的指数分布，则下列随机变量中服从参数为2λ的指数分布的是(　　).

(A)$X+Y$　　(B)$X-Y$

(C)$\max\{X,Y\}$　　(D)$\min\{X,Y\}$

10. 设随机变量X和Y都服从正态分布，则(　　).

(A) $X+Y$一定服从正态分布

(B) (X,Y) 一定服从二维正态分布

(C) X 与 Y 不相关，则 X,Y 相互独立

(D) 若 X 与 Y 相互独立,则 $X-Y$ 服从正态分布

11. 若(X,Y)服从二维正态分布，则 ①X,Y 一定相互独立；② 若 $\rho_{XY}=0$，则 X,Y 一定相互独立；③X 和 Y 都服从一维正态分布；④X,Y 的任一线性组合服从一维正态分布. 上述几种说法中正确的是(　　).

(A)① ② ③　　(B) ② ③ ④

(C)① ③ ④　　(D) ① ② ④

12. 设随机变量 X,Y 都是正态变量,且 X,Y 不相关,则(　　).

(A)X,Y 一定相互独立　　(B)(X,Y) 一定服从二维正态分布

(C)X,Y 不一定相互独立　　(D)$X+Y$ 服从一维正态分布

13. 设随机变量 X,Y 相互独立,且 $X\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$Y\sim N\left(1,\frac{1}{2}\right)$,则与 $Z=Y-X$ 同分布的随机变量是(　　).

(A)$X-Y$　　(B)$X+Y$

(C)$X-2Y$　　(D)$Y-2X$

◇ 解答题

14. 设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 独立同分布,且 $X_i\sim\begin{pmatrix}0&1\\0.6&0.4\end{pmatrix}(i=1,2,3,4)$,求 $X=\begin{vmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{vmatrix}$的概率分布.

15. 设随机变量 X,Y 独立同分布,且 $P(X=i)=\frac{1}{3},i=1,2,3.$

设随机变量 $U=\max\{X,Y\},V=\min\{X,Y\}$.

(1) 求二维随机变量(U,V) 的联合分布；

(2) 求 $Z=UV$ 的分布；

(3) 判断 U,V 是否相互独立?

(4) 求 $P(U=V)$.

16. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,下表列出二维随机变量(X,Y) 的联合分布律及关于 X 和 Y 的边缘分布律的部分数值,试将其余的数值填入表中空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)=p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

17. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(1) 求随机变量X,Y的边缘密度函数;

(2) 判断随机变量X,Y是否相互独立;

(3) 求随机变量$Z=X+2Y$的分布函数和密度函数.

18. 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(1) 求$P(X>2Y)$;

(2) 设$Z=X+Y$,求Z的概率密度函数.

19. 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$Y\sim U[-\pi,\pi]$,X,Y相互独立,令$Z=X+Y$,求$f_Z(z)$.

20. 设随机变量$X\sim U(0,1)$,在$X=x(0<x<1)$下,$Y\sim U(0,x)$.

(1) 求X,Y的联合密度函数;

(2) 求Y的边缘密度函数.

21. 设随机变量X,Y相互独立,且$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$,$Y\sim\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$,又设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,求$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+X\boldsymbol{\alpha}_3,Y\boldsymbol{\alpha}_1$线性相关的概率.

22. 设随机变量X,Y相互独立,且$X\sim P(1)$,$Y\sim P(2)$,求$P(\max\{X,Y\}\neq 0)$及$P(\min\{X,Y\}\neq 0)$.

23. 设随机变量X,Y相互独立,且$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$,$Y\sim E(4)$,令$U=X+2Y$,求$U$的概率密度.

24. 设$D=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$,且变量$(X,Y)$在区域$D$上服从均匀分布,令$Z=\begin{cases}0, X<Y,\\ 1, X\geqslant Y.\end{cases}$

(1) 令$U=X+Z$,求U的分布函数.

(2) 判断X,Z是否独立.

四、随机变量的数字特征

◇ 填空题

1. 设随机变量X与Y的相关系数为$\frac{1}{3}$,且$E(X)=0$,$E(Y)=1$,$E(X^2)=4$,$E(Y^2)=10$,则$E(X+Y)^2=$______.

2. 设随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$则$P\{|X-E(X)|<2D(X)\}=$______.

3. 设 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ 0.3, & -2\leqslant x<1,\\ 0.8, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2,\end{cases}$ 且 $Y=X^2-1$，则 $E(XY)=$________.

4. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 $E(X)=$________，$D(X)=$________.

5. 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$，且 $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $\lambda=$________.

6. 设每次试验成功的概率为 0.2，失败的概率为 0.8，设独立重复试验直到成功为止的试验次数为 X，则 $E(X)=$________.

◇ 选择题

7. 设 X 和 Y 分别表示扔 n 次硬币出现正面和反面的次数，则 X,Y 的相关系数为（　　）.

(A) -1　　(B) 0　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

8. 设随机变量 $X\sim U[-1,1]$，则随机变量 $U=\arcsin X$，$V=\arccos X$ 的相关系数为（　　）.

(A) -1　　(B) 0　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

9. 对于随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，下列说法不正确的是（　　）.

(A) 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 两两不相关，则 $D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)$

(B) 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则 $D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)$

(C) 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立同分布，服从 $N(0, \sigma^2)$，则 $\overline{X}\sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

(D) 若 $D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)$，则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 两两不相关

10. 设 (X,Y) 服从二维正态分布，其边缘分布为 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(2,4)$，X,Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=-0.5$，且 $P(aX+bY\leqslant 1)=0.5$，则（　　）.

(A) $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{4}$　　(B) $a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{2}$

(C) $a=-\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2}$　　(D) $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{4}$

◇ 解答题

11. n 把钥匙中只有一把可以把门打开，现从中任取一把开门，直到打开门为止，下列两种情况分别求开门次数的数学期望和方差：

(1) 试开过的钥匙除去；

(2) 试开过的钥匙重新放回.

12. 设一部机器一天内发生故障的概率为 $\frac{1}{5}$，机器发生故障时全天停止工作. 若一周 5 个工作日无故障，则可获利 10 万元；发生一次故障获利 5 万元；发生两次故障获利 0 元；发生三次及以上的故障亏损 2 万元，求一周内利润的期望值.

13. 设由自动生产线加工的某种零件的内径 X(毫米)服从正态分布 $N(\mu,1)$,内径小于10或大于12为不合格品,其余为合格产品. 销售合格品获利,销售不合格产品亏损,已知销售利润 T(单位:元)与销售零件的内径 X 有如下关系:

$$T=\begin{cases}-1, X<10,\\ 20,\ 10\leqslant X\leqslant 12,\\ -5, X>12.\end{cases}$$

问平均内径 μ 取何值时,销售一个零件的平均利润最大?

14. 设随机变量 X,Y 相互独立,且 $X\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$Y\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$Z=|X-Y|$,求 $E(Z)$,$D(Z)$.

15. 设随机变量 X 服从参数为2的指数分布,令 $U=\begin{cases}0, & X\leqslant 1,\\ 1, & X>1,\end{cases}$ $V=\begin{cases}0, & X\leqslant 2,\\ 1, & X>2,\end{cases}$ 求:

(1)(U,V) 的分布;

(2)U,V 的相关系数.

16. 设有20人在某11层楼的底层乘电梯上楼,电梯在途中只下不上,每个乘客在哪一层下等可能,且乘客之间相互独立,求电梯停的次数的数学期望.

17. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

(1) 求 $E(X)$,$D(X)$;

(2) 求 $\mathrm{Cov}(X,|X|)$,问 X,$|X|$ 是否不相关?

(3) 问 X,$|X|$ 是否相互独立?

18. 设二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布,且 $X\sim N(1,3^2)$,$Y\sim N(0,4^2)$,且 X,Y 的相关系数为 $-\frac{1}{2}$,又设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

(1) 求 $E(Z)$,$D(Z)$;

(2) 求 ρ_{XZ};

(3)X,Z 是否相互独立? 为什么?

19. 设随机变量(X,Y)在区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\}$上服从均匀分布,令

$$U=\begin{cases}0, X\leqslant Y,\\ 1, X>Y,\end{cases}\quad V=\begin{cases}0, X\leqslant 2Y,\\ 1, X>2Y.\end{cases}$$

(1) 求(U,V)的联合分布;

(2) 求 ρ_{UV}.

20. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{m+n}$ $(m<n)$ 独立同分布,其方差为 σ^2,令 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,$Z=\sum\limits_{k=1}^{n}X_{m+k}$. 求:(1)$D(Y)$,$D(Z)$; (2)$\rho_{YZ}$.

21. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ $(n>2)$ 相互独立且都服从 $N(0,1)$,$Y_i=X_i-\overline{X}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 求:

(1)$D(Y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$;

(2)$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$;

(3)$P(Y_1+Y_n\leqslant 0)$.

22. 设随机变量 X，Y 相互独立且都服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布，令 $Z=\max\{X, Y\}$，求 $E(Z)$.

23. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且在 $[0,a]$ 上服从均匀分布，令 $U=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$，求 U 的数学期望与方差.

24. 电信公司将 n 个人的电话资费单寄给 n 个人，但信封上各收信人的地址随机填写，用随机变量 X 表示收到自己电话资费单的人的个数，求 $E(X)$ 及 $D(X)$.

五、大数定律和中心极限定理

◇ 填空题

1. 设随机变量 X，Y 不相关，$X \sim U(-3,3)$，Y 的密度为 $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{3y^2}{16}, & -2<y<2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ 根据切比雪夫不等式，有 $P\{|X-Y|<3\} \geqslant$ ________.

2. (1) 将一均匀的骰子连续扔六次，所出现的点数之和为 X，用切比雪夫不等式估计 $P(14<X<28)$ ________.

(2) 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 相互独立且 $X_i \sim P(i)(i=1,2,\cdots,10)$，$Y=\dfrac{1}{10}\sum\limits_{i=1}^{10} X_i$，根据切比雪夫不等式，$P\{4<Y<7\} \geqslant$ ________.

3. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 相互独立且在区间 $[-1, 1]$ 上同服从均匀分布，则由中心极限定理 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{100} X_i \leqslant \dfrac{10}{\sqrt{3}}\right) \approx$ ________.

◇ 解答题

4. 设 X，Y 为随机变量，且 $E(X)=1$，$E(Y)=2$，$D(X)=4$，$D(Y)=9$，$\rho_{XY}=-\dfrac{1}{2}$，用切比雪夫不等式估计 $P\{|X+Y-3| \geqslant 10\}$.

5. 一电路使用某种电阻一只，另外 35 只备用，若一只损坏，立即使用另一只更换，直到用完所有备用电阻为止. 设电阻使用寿命服从参数为 $\lambda=0.01$ 的指数分布，用 X 表示 36 只电阻的使用总寿命，用中心极限定理估计 $P(X>4\ 200)$ $(\Phi(1)=0.841\ 3, \Phi(2)=0.977\ 2)$.

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，已知 $E(X^k)=\alpha_k(k=1,2,3,4)$.

证明：当 n 充分大时，随机变量 $Z_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ 近似服从正态分布，并指出其分布参数.

7. 电话公司有 300 台分机，每台分机有 6% 的时间处于与外线通话状态，设每台分机是否处于通话状态相互独立，用中心极限定理估计至少安装多少条外线才能保证每台分机使用外线不必等候的概率不低于 0.95?

六、数理统计的基本概念

◇ 填空题

1. 设总体 X,Y 相互独立且服从 $N(0,9)$ 分布，$(X_1,\cdots,X_9)$ 与 $(Y_1,\cdots,Y_9)$ 分别为来自总体 X,Y 的简单随机样本，则 $U=\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}\sim$ ________.

2. 设总体 $X\sim N(0,8)$，$Y\sim N(0,2^2)$，且 X_1 及 (Y_1,Y_2) 分别为来自上述两个总体的样本，则 $\dfrac{X_1^2}{Y_1^2+Y_2^2}\sim$ ________.

3. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则 $D(S^2)=$ ________.

4. 设 $X\sim N(1,\sigma^2)$，$Y\sim N(2,\sigma^2)$ 为两个相互独立的总体，$X_1,X_2,\cdots,X_m$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 分别为来自两个总体的简单样本，$S_1^2=\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2$，$S_2^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$，则 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ 服从________分布.

◇ 选择题

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\qquad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$
$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\qquad S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2.$$

则服从 $t(n-1)$ 分布的随机变量是(　　).

(A) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$　　(B) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

(C) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$　　(D) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$

6. 设 $X\sim t(n)$，则下列结论正确的是(　　).

(A) $X^2\sim F(1,n)$　　(B) $\dfrac{1}{X^2}\sim F(1,n)$

(C) $X^2\sim \chi^2(n)$　　(D) $X^2\sim \chi^2(n-1)$

7. 设总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差，则(　　).

(A) $\dfrac{n\overline{X}^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$　　(B) $\dfrac{(n+1)\overline{X}^2}{S^2}\sim F(1,n-1)$

(C) $\frac{\overline{X}^2}{S^2} \sim F(1,n-1)$　　　　(D) $\frac{(n-1)\overline{X}^2}{S^2} \sim F(1,n-1)$

◇ 解答题

8. 设 $X_1,\cdots,X_9$ 为来自正态总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，令

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+\cdots+X_6),Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9),S^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2,Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}.$$

证明：$Z \sim t(2)$.

9. 设总体 $X \sim N(0,1)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_m,X_{m+1},\cdots,X_{m+n})$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求统计量 $\frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{m}X_i)^2+\frac{1}{n}(\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i)^2$ 所服从的分布.

10. 设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，求 $\frac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{S}$ 所服从的分布.

11. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 是来自总体 $X \sim N(0,1)$ 的简单随机样本，记 $Y_i=X_i-\overline{X}(i=1,2,\cdots,n)$. 求：(1)$D(Y_i)$；(2)$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$.

12. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，令 $T=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，求 $E(X_1T)$.

13. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$，求 Y 的数学期望与方差.

14. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$. 从该总体中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{2n}(n>2)$. 令 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量 $U=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2$ 的数学期望.

15. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu,\sigma_2^2)$，且 X,Y 相互独立，来自总体 X,Y 的样本均值为 $\overline{X}_1,\overline{X}_2$，样本方差为 S_1^2,S_2^2. 记 $a=\frac{S_1^2}{S_1^2+S_2^2}$，$b=\frac{S_2^2}{S_1^2+S_2^2}$，求统计量 $U=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$ 的数学期望.

16. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n+1}$ 为总体 X 的简单随机样本，记

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，求统计量 $\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}$ 服从的分布.

七、参数估计

◇ 填空题

1. 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 已知，μ 为未知参数. 从总体 X 中抽取容量为 16 的简单随机样本，且 μ 的置信度为 0.95 的置信区间中的最小长度为 0.588，则 $\sigma^2=$________.

◆ 选择题

2. 从正态总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$ 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,则可作为参数 σ^2 的无偏估计量的是(　　).

(A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$　　(B) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

(C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　　(D) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i$

◆ 解答题

3. 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

$\theta\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$ 是未知参数. 用样本值 3,1,3,0,3,1,2,3 求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

4. 设总体 $X \sim F(x,\theta)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \theta, & 1\leqslant x<2,\\ 2\theta, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}\left(0<\theta<\frac{1}{2}\right)$,样本值为 1,1,3,2,1,2,3,3,求 θ 的矩估计和最大似然估计.

5. 设总体 $X \sim U[0,\theta]$,其中 $\theta>0$,求 θ 的极大似然估计量,判断其是否是 θ 的无偏估计量.

6. 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\theta a x^{a-1}\mathrm{e}^{-\theta x^a}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $\theta>0$ 为未知参数,$a>0$ 为已知参数,求 θ 的极大似然估计量.

7. 设总体 $X \sim U(\theta_1,\theta_2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本,求 θ_1,θ_2 的矩估计和最大似然估计.

8. 设总体 X 在区间 $(0,\theta)$ 内服从均匀分布,X_1,X_2,X_3 是来自总体的简单随机样本. 证明:$\hat{\theta}_1=\frac{4}{3}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$ 与 $\hat{\theta}_2=4\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\{X_i\}$ 都是参数 θ 的无偏估计量,试比较其有效性.

9. 设总体 X,Y 相互独立且都服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布,$(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 与 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ 分别为来自总体 X,Y 的简单随机样本. 证明:$S^2=\frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right]$ 为参数 σ^2 的无偏估计量.

八、假设检验

◆ 填空题

1. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单样本,其中参数 μ,σ 未知,令 $\overline{X}=$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, Q^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则假设 $H_0:\mu=0$ 的 t 检验使用统计量________.

◇ 选择题

2. 在假设检验中，显著性水平 α 的含义是(　　).

(A) 原假设 H_0 成立，经过检验 H_0 被拒绝的概率

(B) 原假设 H_0 成立，经过检验 H_0 被接受的概率

(C) 原假设 H_0 不成立，经过检验 H_0 被拒绝的概率

(D) 原假设 H_0 不成立，经过检验 H_0 被接受的概率

◇ 解答题

3. 设 100 件产品中有 10 件不合格，现从中任取 5 件进行检验，如果其中没有不合格产品，则这批产品被接受，否则被拒绝. 求：

(1) 在任取 5 件产品中不合格产品件数 X 的数学期望和方差；

(2) 这批产品被拒绝的概率.

4. 某种元件使用寿命 $X\sim N(\mu,10^2)$. 按照客户要求该元件使用寿命不能低于 1 000h，现从该批产品中随机抽取 25 件，其平均使用寿命为 $\overline{x}=995$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下确定该批产品是否合格？

5. 某种食品防腐剂含量 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 分布，从总体中任取 20 件产品，测得其防腐剂平均含量为 $\overline{x}=10.2$，标准差为 $s=0.509\ 9$，问可否认为该厂生产的产品防腐剂含量显著大于 10(其中显著性水平为 $\alpha=0.05$)？

6. 某生产线生产白糖，设白糖重量 $X\sim N(\mu,15^2)$，现从生产线上任取 10 袋，$s=30.23$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，问机器生产是否正常？

文都教育®

542001107

汤家凤精品图书系列

搜索一下

1.2022《考研数学复习大全》（数学一至三）

2.2022《考研数学高等数学辅导讲义》

3.2022《考研数学线性代数辅导讲义》

4.2022《概率论与数理统计辅导教程》

5.2022《考研数学接力题典1800》（数学一至三）

6.2022《考研数学历年真题全解析》（数学一至三）

7.2022《考研数学强化测试10套卷》（数学一至三）

8.2022《考研数学绝对考场最后八套题》（数学一至三）

文都图书　名师精品

新浪微博：@文都图书

图书答疑QQ群：742230365

扫码获取海量免费资料

文都书馆微信公众号

上架指导：考研类图书

ISBN 978-7-5022-7484-9

01>

9 787502 274849

定价：78.00元