# 微积分习题课习题及参考答案

2021年春季学期

# 目录

# 一　第一次习题课

## 1.1　二阶线性微分方程

1. 已知$y_1=\cos x$，$y_2=e^{-x}$是三阶线性齐次方程的解，试建立该方程。
2. 设$y(x)$是$y'''+y'=0$的解且当$x\to 0$时是$x^2$的等价无穷小，求$y(x)$([5], P. 106, 一、1)。
3. 若函数$f(x)$满足$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$及$f''(x)+f(x)=2e^x$求$f(x)$([5], P. 13, 一、4)。
4. 求方程$y''+y=x\cos 2x$满足条件$y(0)=0$及$y'(0)=0$的特解([5], P. 20, 六)。
5. 已知$y_1=xe^{2x}+e^{-x}$，$y_2=e^x+xe^{2x}$，$y_3=xe^{2x}$是某二阶常系数非齐次微分方程的三个解，求此方程（2021年春季先修试题，二、1）。

## 1.2　多元函数的基本概念

1. 讨论函数$f(x,y)=\dfrac{\sin(x^n y)}{x^2+y^2}$，$x\geq 0, y\geq 0$，$n>0$，在$(x,y)=(0,0)$点的极限是否存在。
2. 证明极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$不存在。

## 1.3　偏导数及全微分

1. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{|x|+|y|}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   在点$(0,0)$处连续且偏导数存，但在点$(0,0)$处$f$不可微(2021年春季先修，一、1)。

2. 计算$(\lg 99)^{1.01}$。

## 1.4 复合函数求导法

1. 设$z=f(x-y,xy^2)$，若$f$具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 设函数$u=u(x,y)$满足方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$及条件$u(x,2x)=x$，$u'_x(x,2x)=x^2$。$u$ 有二阶连续偏导，求$u''_{xx}(x,2x)$。

3. 设$f(u)$在$[1,\infty)$上具有二阶连续的导数且$f(1)=-1$，$f'(1)=\dfrac{3}{2}$，且函数$w=(x^2+y^2+z^2)f(x^2+y^2+z^2)$ 满足

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0$$

求$f(u)$在$[1,\infty)$上的最小值(2021年春季先修，三、1)。

4. 设$z=\displaystyle\int_0^1|xy-t|f(t)\mathrm{d}t$，$0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$。假设$f(x)$连续，求$z''_{xx}+z''_{yy}$ (2021年春季先修，二、2)。

## 1.5 补充习题

1. 设$f(x)$在$[0,\infty)$上可导，$f(0)=1$且满足

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$$

(1) 求$f'(x)$，(2) 证明：$e^{-x}\le f(x)\le 1$对于任意$x\ge 0$成立。

2. 设$f(x)$有连续一阶导数，且当$x\ge 0$时满足

$$f(x)=-1+x+2\int_0^x (x-t)f(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

求$f(x)$ (参见[5], P. 117, 四)。

# 1.6 参考答案

## 1.6.1 二阶线性微分方程

1. 解：由题意可知：$\lambda_1 = i$，$\lambda_2 = -i$及$\lambda_3 = -1$是实系数三次多项式的三个根，故该微分方程的特征方程为：

$$(\lambda + i)(\lambda - i)(\lambda + 1) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

即

$$y''' + y'' + y' + y = 0$$

2. 解：该方程的特征方程为：$\lambda^3 + \lambda = 0$，故$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = i$，$\lambda_3 = -i$，其通解为

$$y(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

由当$x \to 0$时$y(x)$是$x^2$的等价无穷小，得$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2$。于是

$$y(x) = 2 - 2\cos x$$

3. 解：由题意：$f(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$，进而$f''(x) = C_1e^x + 4C_2e^{-2x}$。于是

$$2C_1 = 2 \text{ 且} 5C_2 = 0$$

故$f(x) = e^x$。

4. 解：齐方程的通解为：$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$。

为了求非齐方程的特解，考虑$y'' + y = x(\cos 2x + i \sin 2x) = xe^{2ix}$。假设$y^*(x) = e^{2ix}p_1(x)$是该方程的特解，其中$p_1(x) = a_0 + a_1x$为一次多项式。则

$$-4p_1(x) + 4ip_1'(x) + p_1(x) = x$$

故$-3a_1 = 1$且$-3a_0 + 4ia_1 = 0$，即$a_1 = -\dfrac{1}{3}$且$a_0 = -\dfrac{4i}{9}$。于是原方程的特解为：$y^*(x) = -Re(e^{2ix}(\dfrac{4i}{9} + \dfrac{1}{3}x)) = -\dfrac{1}{3}x\cos 2x + \dfrac{4}{9}\sin 2x$。

于是满足条件$y(0) = 0$及$y'(0) = 0$ 的特解为：$y(x) = -\dfrac{5}{9}\sin x - \dfrac{1}{3}x\cos 2x + \dfrac{4}{9}\sin 2x$。

5. 解：由题意可知：$e^x = y_2(x) - y_3(x)$及$e^{-x} = y_1(x) - y_3(x)$是二次常系数齐次方程通解，故特征方程为：

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 1 = 0$$

进而设该方程为：$y'' - y = f(x)$。将$y_3$代入可得

$$f(x) = y_3'' - y_3 = e^{2x}(3x + 4)$$

于是所求方程为：$y'' - y = e^{2x}(3x + 4)$。

### 1.6.2 多元函数的基本概念

1. 解：(i) 显然$f(x,0)\equiv 0$。以下设$x,y\neq 0$，则

$$\left|\frac{\sin(x^ny)}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{\sin(x^ny)}{x^ny}\frac{x^ny}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{\sin(x^ny)}{x^ny}\right|\frac{|x^ny|}{2|xy|}$$

于是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$当$n>1$时。

(ii) 当$0<n\le 1$时，设$y=kx^n$，则

$$\lim_{x\to 0, y=kx^n}\frac{x^ny}{x^2+y^2} = \begin{cases}\dfrac{k}{1+k^2}, & n=1\\ \dfrac{1}{k}, & 0<n<1\end{cases}$$

故$f(x,y)$在$(x,y)=(0,0)$点的极限不存在。

2. 证明：由于当$y=kx^3$时

$$\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\frac{kx^6}{x^6+k^2x^6}\equiv\frac{k}{1+k^2}$$

故对于不同的极限过程其极限值不同，即极限不存在。

### 1.6.3 偏导数及全微分

1. 证明：由$|f(x,y)|\le\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|=0$$

故$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续。

由复合函数求导法则，当$x\neq 0, y\neq 0$时，

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

由偏导数定义知道：$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$。即$f(x,y)$在$(0,0)$处可偏导。

由于

$$\frac{\Delta z-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\frac{1}{|\Delta x|+|\Delta y|}$$

在$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$时极限不存在，即$f$在点$(0,0)$的不可微分。

2. 解：设$f(x,y)=(\lg x)^y$，则$f(100,1)=2$且

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y(\lg x)^{y-1}\frac{\lg e}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(\lg x)^y\ln\lg x$$

于是

$$f(99,1.01)\approx 2-\frac{\lg e}{100}+\frac{2\ln 2}{100}\approx 2.0095$$

### 1.6.4 复合函数求导法

1. 解：由复合函数求导法则可得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(x-y,xy^2)+y^2f_2'(x-y,xy^2)$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=&-f_{11}''(x-y,xy^2)+2xyf_{12}''(x-y,xy^2)+2yf_2'(x-y,xy^2)\\&-y^2f_{21}''(x-y,xy^2)+2xy^3f_{22}''(x-y,xy^2)\\=&2yf_2'(x-y,xy^2)-f_{11}''(x-y,xy^2)+(2xy-y^2)f_{12}''(x-y,xy^2)\\&+2xy^3f_{22}''(x-y,xy^2)\end{aligned}$$

2. 解：由$u(x,2x)=x$求偏导得：

$$u_x'(x,2x)+2u_y'(x,2x)=1$$

及

$$u_{xx}''(x,2x)+4u_{xy}''(x,2x)+4u_{yy}''(x,2x)=0$$

再由$u_x'(x,2x)=x^2$得：

$$u_{xx}''(x,2x)+2u_{xy}''(x,2x)=2x$$

代入已知条件可得：$u_{xx}''(x,2x)=-\dfrac{4}{3}x$。

3. 解：设$w=uf(u)$，其中$u=x^2+y^2+z^2$。由复合函数求导法则得：

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2xf(u)+2xuf'(u)$$

且

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=2f(u)+(10x^2+2y^2+2z^2)f'(u)+4x^2uf''(u)$$

于是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=6f(u)+14uf'(u)+4u^2f''(u)=0$$

即$2u^2f''(u)+7uf'(u)+3f(u)=0$。

设$u=e^t$且$D=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$，那么：

$$[2D(D-1)+7D+3]f=[2D^2+5D+3]f=0$$

于是：$f(e^t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-\frac{3}{2}t}$，即$f(u)=C_1u^{-1}+C_2u^{-\frac{3}{2}}$。

由$f(1)=C_1+C_2=-1$，$f'(1)=-C_1-\dfrac{3}{2}C_2=\dfrac{3}{2}$得$f(u)=-u^{-\frac{3}{2}}$。

以下考察一元函数最值。首先，$f(1)=1$；其次，

$$f'(u)=\frac{3}{2}u^{-\frac{5}{2}}>0$$

于是$f(u)$在$[1,\infty)$上单调递增，且$f(1)=-1$是极小值。

4. 解：由于

$$\begin{aligned}z&=\int_0^{xy}(xy-t)f(t)\mathrm{d}t+\int_{xy}^1(t-xy)f(t)\mathrm{d}t\\&=xy\int_0^{xy}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{xy}tf(t)\mathrm{d}t+\int_{xy}^1tf(t)\mathrm{d}t-xy\int_{xy}^1f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}z'_x&=y\int_0^{xy}f(t)\mathrm{d}t+xy^2f(xy)-xy^2f(xy)-xy^2f(xy)-y\int_{xy}^1f(t)\mathrm{d}t+xy^2f(xy)\\&=y\int_0^{xy}f(t)\mathrm{d}t-y\int_{xy}^1f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

进而

$$z''_{xx}=2y^2f(xy)$$

同理可得$z''_{yy}=2x^2f(xy)$。于是$z''_{xx}+z''_{yy}=2(x^2+y^2)f(xy)$

5. 证明：对任意给定$(x,y,z)$，考虑函数$g(t)=f(tx,ty,tz)$。

(必要性) 由$f$为$k$次齐次函数知$g(t)=t^kg(1)$，故

$$g'(t)|_{t=1}=kg(1)$$

即

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)\bigg|_{t=1}=kf(x,y,z)$$

(充分性) 由题设条件可得：

$$g'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)=\frac{kg(t)}{t}$$

分离变量法解微分方程得到：

$$\ln g(t)-\ln g(1)=k\ln t$$

即

$$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$$

证毕。

### 1.6.5 补充习题

1. (1) 解：由$f(x)$在$[0,\infty)$上可导，知$f'(0)=-f(0)=-1$且

$(1+x)(f''(x)+f'(x))+f'(x)+f(x)-f(x)=(1+x)f''(x)+(2+x)f'(x)=0$

令$z=f'(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\frac{2+x}{1+x}\mathrm{d}x$$

于是$\ln|z|=-x-\ln|1+x|+C$，故$f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{1+x}$。

(2) 证明：由(1)知$f'(x)\le 0$，故$f(x)\le f(0)=1$。令$h(x)=f(x)-e^{-x}$，则

$$h'(x)=-\frac{e^{-x}}{1+x}+e^{-x}=e^{-x}\frac{x}{1+x}\ge 0$$

故$f(x)\ge e^{-x}$。证毕。

2. 解：由$y=f(x)$有连续一阶导数，知$f(0)=-1$且

$$y'=1+2\int_0^x f(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

于是$y'(0)=1$且

$$y''=2yy'$$

令$y'=P(y)$，则$y''=P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，故

$$P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=2yP$$

于是$y'=y^2$，进而$f(x)=-\dfrac{1}{x+1}$。

# 参考文献


[1] 哈尔滨工业大学数学分析教研室，工科数学分析（上册），高等教育出版社，北京，2015.

[2] 哈尔滨工业大学数学分析教研室，工科数学分析（下册），高等教育出版社，北京，2015.

[3] 哈尔滨工业大学数学分析教研室，工科数学分析学习指导与习题解答（上册），高等教育出版社，北京，2015.

[4] 哈尔滨工业大学数学分析教研室，工科数学分析学习指导与习题解答（下册），高等教育出版社，北京，2015.

[5] 张雅卓，白红，哈尔滨工业大学微积分历届期末试题集，哈尔滨工业大学出版社，2018.