一 微分方程

1.1 二阶线性微分方程

1. 已知$y_1=\cos x$，$y_2=e^{-x}$是三阶线性齐次方程的解，试建立该方程。

2. 设$y_1=e^{-x}$，$y_2=2x$是$y'''+ay''+by'+cy=0$的解，求a,b,c (参见[5], P. 108, 一、1，P. 116, 一、2)。

3. 设$y(x)$是$y'''+y'=0$的解且当$x\to 0$时是x^2的等价无穷小，求$y(x)$([5], P. 106, 一、1)。

4. 已知$y''+p(x)y'+q(x)=f(x)$的三个特解为$y_1=x$，$y_2=e^x$，$y_3=e^{2x}$。试求$y(0)=1$，$y'(0)=3$的特解(参见[5], P. 114, 三)。

5. 若函数$f(x)$满足$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$及$f''(x)+f(x)=2e^x$求$f(x)$([5], P. 13, 一、4)。

6. 求方程$y''+y=x\cos 2x$满足条件$y(0)=0$及$y'(0)=0$的特解([5], P. 20, 六)。

7. 求微分方程$y''-4y'+4y=e^{2x}+\sin 2x$的通解([5], P. 113, 三)。

8. 已知$y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$是某二阶常系数非齐次微分方程的三个解，求此方程。

1.2 补充习题

1. 求方程$x^3y''-x^2y'+xy=x^2+1$的通解。

2. 设$f(x)$在$[0,\infty)$上可导，$f(0)=1$且满足
$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$$
(1) 求$f'(x)$，(2) 证明：$e^{-x}\le f(x)\le 1$对于任意$x\ge 0$成立。

3. 设$f(x)$有连续一阶导数，且当$x\ge 0$时满足
$$f(x)=-1+x+2\int_0^x(x-t)f(t)f'(t)\mathrm{d}t$$
求$f(x)$ (参见[5], P. 117, 四)。

4. 求方程$y''+y'-2y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$的通解。