工科数学分析双周习题课习题及参考答案

2021年春季学期QQ2842305604

目录

一　微分方程

1.1　二阶线性微分方程

1. 已知$y_1=\cos x$，$y_2=e^{-x}$是三阶线性齐次方程的解，试建立该方程。

2. 设$y_1=e^{-x}$，$y_2=2x$是$y'''+ay''+by'+cy=0$的解，求a,b,c (参见[5], P. 108, 一、1，P. 116, 一、2)。

3. 设$y(x)$是$y'''+y'=0$的解且当$x\to 0$时是x^2的等价无穷小，求$y(x)$([5], P. 106, 一、1)。

4. 已知$y''+p(x)y'+q(x)=f(x)$的三个特解为$y_1=x$，$y_2=e^x$，$y_3=e^{2x}$。试求$y(0)=1$，$y'(0)=3$的特解(参见[5], P. 114, 三)。

5. 若函数$f(x)$满足$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$及$f''(x)+f(x)=2e^x$求$f(x)$([5], P. 13, 一、4)。

6. 求方程$y''+y=x\cos 2x$满足条件$y(0)=0$及$y'(0)=0$的特解([5], P. 20, 六)。

7. 求微分方程$y''-4y'+4y=e^{2x}+\sin 2x$的通解([5], P. 113, 三)。

8. 已知$y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$是某二阶常系数非齐次微分方程的三个解，求此方程。

1.2　补充习题

1. 求方程$x^3y''-x^2y'+xy=x^2+1$的通解。

2. 设$f(x)$在$[0,\infty)$上可导，$f(0)=1$且满足

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$$

(1) 求$f'(x)$，(2) 证明：$e^{-x}\le f(x)\le 1$对于任意$x\ge 0$成立。

3. 设$f(x)$有连续一阶导数，且当$x\ge 0$时满足

$$f(x)=-1+x+2\int_0^x(x-t)f(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

求$f(x)$ (参见[5], P. 117, 四)。

4. 求方程$y''+y'-2y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$的通解。

1.3 参考答案

1.3.1 二阶线性微分方程

1. 解：由题意可知：$\lambda_1 = i$，$\lambda_2 = -i$及$\lambda_3 = -1$是实系数三次多项式的三个根，故该微分方程的特征方程为：

$$(\lambda + i)(\lambda - i)(\lambda + 1) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

即

$$y''' + y'' + y' + y = 0$$

2. 解：由题意可知：$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 0$及$\lambda_3 = -1$是实系数三次多项式的三个根，故该微分方程特征方程为：

$$\lambda^2(\lambda + 1) = 0$$

即$a = 1, b = 0, c = 0$。

3. 解：该方程的特征方程为：$\lambda^3 + \lambda = 0$，故$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = i$，$\lambda_3 = -i$，其通解为

$$y(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

由当$x \to 0$时$y(x)$是x^2的等价无穷小，得$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2$。于是

$$y(x) = 2 - 2\cos x$$

4. 解：由题意可知线性齐次方程的通解为：

$$y(x) = x + C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - e^x)$$

进而由$y(0) = 1$及$y'(0) = 3$得：$y(x) = 2e^{2x} - e^x$。

5. 解：由题意：$f(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x}$，进而$f''(x) = C_1e^x + 4C_2e^{-2x}$。于是

$$2C_1 = 2 \text{ 且} 5C_2 = 0$$

故$f(x) = e^x$。

6. 解：齐方程的通解为：$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$。

为了求非齐方程的特解，考虑$y'' + y = x(\cos 2x + i \sin 2x) = xe^{2ix}$。假设$y^*(x) = e^{2ix}p_1(x)$是该方程的特解，其中$p_1(x) = a_0 + a_1x$为一次多项式。则

$$-4p_1(x) + 4ip_1'(x) + p_1(x) = x$$

故$-3a_1 = 1$且$-3a_0 + 4ia_1 = 0$，即$a_1 = -\dfrac{1}{3}$且$a_0 = -\dfrac{4i}{9}$。于是原方程的特解为：$y^*(x) = -Re(e^{2ix}(\dfrac{4i}{9} + \dfrac{1}{3}x)) = -\dfrac{1}{3}x\cos 2x + \dfrac{4}{9}\sin 2x$。

于是满足条件$y(0) = 0$及$y'(0) = 0$ 的特解为：$y(x) = -\dfrac{5}{9}\sin x - \dfrac{1}{3}x\cos 2x + \dfrac{4}{9}\sin 2x$。

7. 解：齐方程的通解为：$y(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}$。
为了求非齐方程的特解，考虑$y_1''-4y_1'+4y_1=e^{2x}$及$y_2''-4y_2'+4y_2=e^{2ix}$。
容易得到$y_1^*(x)=\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}$且$y_2^*(x)=\dfrac{i}{8}e^{2ix}$是上述方程的特解。
于是原方程的通解为：$y^*(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}+\dfrac{1}{8}\cos 2x$。

8. 解：由题意可知：e^{2x}及e^{-x}是二次常系数齐次方程通解，故特征方程为：

$$(\lambda-2)(\lambda+1)=\lambda^2-\lambda-2=0$$

进而设该方程为：$y''-y'-2y=f(x)$。将y_1代入可得

$$f(x)=y_1''-y_1'-2y_1=e^x(x+2)-e^x(x+1)-2xe^x=(1-2x)e^x$$

于是所求方程为：$y''-y'-2y=(1-2x)e^x$。

1.3.2 补充习题

1. 解：令$x=e^t$，$D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则

$$x^2y''=D(D-1)y, xy'=Dy$$

于是原方程化为：

$$(D^2-2D+1)y=e^t+e^{-t}$$

故其通解为：

$$y(t)=(C_1+C_2t)e^t+\frac{1}{2}t^2e^t+\frac{1}{4}e^{-t}$$

于是

$$y(x)=(C_1+C_2\ln x)x+\frac{1}{2}x\ln^2 x+\frac{1}{4x}$$

2. (1) 解：由$f(x)$在$[0,\infty)$上可导，知$f'(0)=-f(0)=-1$且

$$(1+x)(f''(x)+f'(x))+f'(x)+f(x)-f(x)=(1+x)f''(x)+(2+x)f'(x)=0$$

令$z=f'(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\frac{2+x}{1+x}\mathrm{d}x$$

于是$\ln|z|=-x-\ln|1+x|+C$，故$f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{1+x}$。

(2) 证明：由(1)知$f'(x)\le 0$，故$f(x)\le f(0)=1$。令$h(x)=f(x)-e^{-x}$，则

$$h'(x)=-\frac{e^{-x}}{1+x}+e^{-x}=e^{-x}\frac{x}{1+x}\ge 0$$

故$f(x)\ge e^{-x}$。证毕。

3. 解：由$y=f(x)$有连续一阶导数，知$f(0)=-1$且

$$y' = 1 + 2\int_0^x f(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

于是$y'(0)=1$且

$$y'' = 2yy'$$

令$y'=P(y)$，则$y''=P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}$，故

$$P\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = 2yP$$

于是$y'=y^2$，进而$f(x)=-\dfrac{1}{x+1}$。

4. 解：考察如下两个微分方程：

$$y' = y + y_2$$

及

$$y_2' = -2y_2 + \frac{e^x}{e^x+1}$$

由常数变异法得到：

$$y_2(x) = 3C_2e^{-2x} + e^{-2x}\int \frac{e^{3t}}{e^t+1}\mathrm{d}t = -3C_2e^{-2x} + \frac{1}{2} - e^{-x} + e^{-2x}\ln(e^x+1)$$

进而得到：

$$\begin{aligned}
y(x) &= C_1e^x + e^x\int -3C_2e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t}\ln(e^t+1)\mathrm{d}t \\
&= C_1e^x + e^x\left(C_2e^{-3x} - \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-2x} - \frac{1}{3}\ln(e^{-x}+1) - \frac{1}{3}(e^{-3x}\ln(e^x+1))\right) \\
&= C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}e^x\ln(e^{-x}+1) - \frac{1}{3}e^{-2x}\ln(e^x+1)
\end{aligned}$$

二　多元函数微分学

2.1　多元函数的基本概念

1. 求极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$。

2. 讨论函数$f(x,y)=\dfrac{\sin(x^n y)}{x^2+y^2}$，$x\geq 0, y\geq 0$，$n>0$，在$(x,y)=(0,0)$点的极限是否存在。

3. 证明极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$不存在。

2.2　偏导数及全微分

1. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   在点$(0,0)$处连续，偏导数存在但在点$(0,0)$处不连续，而f在点$(0,0)$可微。

2. 计算$(\lg 99)^{1.01}$。

2.3　复合函数求导法

1. 设$z=f(x-y,xy^2)$，若f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 设函数$u=u(x,y)$满足方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$及条件$u(x,2x)=x$，$u'_x(x,2x)=x^2$。$u$有二阶连续偏导，求$u''_{xx}(x,2x)$。

3. 设$u=f(r)$，$r=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其中f具有二阶连续的导数，且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(x^2+y^2+z^2)=0$$

   求$f(r)$。

4. 设$f(r)$在$[1,\infty)$上具有二阶连续的导数且$f(1)=0$，$f'(1)=1$，且二元函数$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

求$f(r)$在$[1,\infty)$上的最大值([5], P. 24, 六，P. 115, 四)。

5. 设$z=f(x,y)$在点$(1,1)$处全微分存在，$f(1,1)=1$，$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$。又设$\psi(x)=f(x,f(x,x))$，求$\left.\frac{\mathrm{d}\psi^3(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$。

6. 设$f(x,y,z)$是可微函数。证明：f为k次齐次函数，即

$$f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$$

当且仅当

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=kf(x,y,z)$$

7. 证明：函数$z=f(x,y)$只是$ax+by$的函数当且仅当

$$b\frac{\partial z}{\partial x}=a\frac{\partial z}{\partial y}$$

2.4 参考答案

2.4.1 多元函数的基本概念

1. 解：令$r=x^2+y^2$，则$(2xy)^2\le r^2$，故

$$\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\frac{1-\cos r}{r^2}\frac{r}{x^2y^2}\ge\frac{1-\cos r}{r^2}\frac{4r}{r^2}$$

于是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\infty$。

2. 解：(i) 显然$f(x,0)\equiv 0$。以下设$y\neq 0$，则

$$\left|\frac{\sin(x^ny)}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{\sin(x^ny)}{x^ny}\frac{x^ny}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{\sin(x^ny)}{x^ny}\right|\frac{|x^ny|}{2|xy|}$$

于是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$当$n>1$时。

(ii) 当$0<n\le 1$时，设$y=kx^n$，则

$$\lim_{x\to 0,y=kx^n}\frac{x^ny}{x^2+y^2}=\begin{cases}\dfrac{k}{1+k^2}, & n=1\\ \dfrac{1}{k}, & 0<n<1\end{cases}$$

故$f(x,y)$在$(x,y)=(0,0)$点的极限不存在。

3. 证明：由于当$y=kx^3$时

$$\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\frac{kx^6}{x^6+k^2x^6}\equiv\frac{k}{1+k^2}$$

故对于不同的极限过程其极限值不同，即极限不存在。

2.4.2 偏导数及全微分

1. 证明：由$|f(x,y)|\le|xy|$知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$$

故$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续。

由复合函数求导法则，当$x\ne0,y\ne0$时，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-x^2y(x^2+y^2)^{-3/2}\cos(x^2+y^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-xy^2(x^2+y^2)^{-3/2}\cos(x^2+y^2)^{-1/2}$$

由偏导数定义知道：$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$。故偏导数存在但在点$(0,0)$处不连续。

由于

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

可得

$$f(x,y)=f(0,0)+o(\sqrt{x^2+y^2})$$

即f在点$(0,0)$的全微分为$0\mathrm{d}x+0\mathrm{d}y$。

2. 解：设$f(x,y)=(\lg x)^y$，则$f(100,1)=2$且

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y(\lg x)^{y-1}\frac{\lg e}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(\lg x)^y\ln\lg x$$

于是

$$f(99,1.01)\approx2-\frac{\lg e}{100}+\frac{2\ln2}{100}\approx2.0095$$

2.4.3 复合函数求导法

1. 解：由复合函数求导法则可得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(x-y,xy^2)+y^2f_2'(x-y,xy^2)$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=&-f_{11}''(x-y,xy^2)+2xyf_{12}''(x-y,xy^2)+2yf_2'(x-y,xy^2)\\&-y^2f_{21}''(x-y,xy^2)+2xy^3f_{22}''(x-y,xy^2)\\=&2yf_2'(x-y,xy^2)-f_{11}''(x-y,xy^2)+(2xy-y^2)f_{12}''(x-y,xy^2)\\&+2xy^3f_{22}''(x-y,xy^2)\end{aligned}$$

2. 解：由$u(x,2x)=x$求偏导得：

$$u_x'(x,2x)+2u_y'(x,2x)=1$$

及

$$u_{xx}''(x,2x)+4u_{xy}''(x,2x)+4u_{yy}''(x,2x)=0$$

再由$u_x'(x,2x)=x^2$得：

$$u_{xx}''(x,2x)+2u_{xy}''(x,2x)=2x$$

代入已知条件可得：$u_{xx}''(x,2x)=-\dfrac{4}{3}x$。

3. 解：由$\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(x^2+y^2+z^2)\\=&f''(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+(x^2+y^2+z^2)=0\end{aligned}$$

即$f''(r)+f'(r)=-e^{4r}$，进而$f(r)=C_1+C_2e^{-r}-\dfrac{1}{20}e^{-4r}$。

4. 解：由复合函数求导法则得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xf(x^2+y^2)+2x(x^2+y^2)f'(x^2+y^2)$$

且

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f(x^2+y^2)+(10x^2+2y^2)f'(x^2+y^2)+4x^2(x^2+y^2)f''(x^2+y^2)$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\=&4f(x^2+y^2)+12(x^2+y^2)f'(x^2+y^2)+4(x^2+y^2)^2f''(x^2+y^2)=0\end{aligned}$$

即$r^2f''(r)+3rf'(r)+f(r)=0$。

设$r=e^t$且$D=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$，那么：

$$[D(D-1)+3D+1]f=[D^2+2D+1]f=0$$

于是：$f(e^t)=(C_1+C_2t)e^{-t}$且$f(r)=\dfrac{C_1+C_2\ln r}{r}$。由$f(1)=0$得$C_1=0$，进而由$f'(1)=1$得$C_2=1$，即$f(r)=\dfrac{\ln r}{r}$。

以下考察一元函数最值。首先，$f(1)=0$，$\lim\limits_{r\to\infty}f(r)=0$。其次，

$$f'(r)=\frac{1}{r^2}(1-\ln r)=0$$

解得：$r=e$且$f(e)=\dfrac{1}{e}$。最后由于$f''(e)<0$知$f(e)$是极大值。

综上所述：f在$[1,\infty)$上的最大值为$\dfrac{1}{e}$。

5. 解：由复合函数求导法则：

$$\frac{\mathrm{d}\psi^3(x)}{\mathrm{d}x}=3\psi^2(x)\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$$

由题意得：$\psi(1)=1$，于是

$$\frac{\mathrm{d}\psi^3(x)}{\mathrm{d}x}=3\left(2+3\left(2+3\right)\right)=51$$

6. 证明：对任意给定(x,y,z)，考虑函数$g(t)=f(tx,ty,tz)$。

(必要性) 由f为k次齐次函数知$g(t)=t^kg(1)$，故

$$g'(t)|_{t=1}=kg(1)$$

即

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)\bigg|_{t=1}=kf(x,y,z)$$

(充分性) 由题设条件可得：

$$g'(t)=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)=\frac{kg(t)}{t}$$

分离变量法解微分方程得到：

$$\ln g(t) - \ln g(1) = k \ln t$$

即

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$$

证毕。

7. 证明：不妨设$a \neq 0$。设$r = ax + by$，则$x = \dfrac{r - by}{a}$且$z = f\left(\dfrac{r - by}{a}, y\right)$。
由题意可知

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{b}{a} f'_x + f'_y = 0$$

即z与y无关。
反之，若$z = f(x, y) = g(ax + by)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ag' \text{ 且} \frac{\partial z}{\partial y} = bg'$$

于是

$$b\frac{\partial z}{\partial x} = abg' = a\frac{\partial z}{\partial y}$$

证毕。

三　多元函数微分学II

3.1　隐函数求导法

1. 设$z = z(x, y)$由方程$z = f(x^2 - z, z - y)$确定，其中f具有连续偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$。

2. 设$f = e^x yz^2$，其中z由$x + y + z + xyz^2 = 0$确定，求$f'_x(0, 1, -1)$。

3. 设$\begin{cases} u = f(x-u, y-u, z-u) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ ([5], P. 109, 三)。

4. 函数$z = f(x, y)$由方程$z^3 + 3z = 3xy^2 + 1$定义，求$\mathrm{d}z$及$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

5. 设函数$u = u(x, y)$及$v = v(x, u)$满足方程组$\begin{cases} x = f(2u, v) \\ y = g(u + v) \end{cases}$，其中$f, g$均可微且$g' \neq 0$，$2f'_1 - f'_2 \neq 0$。求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ ([5], P. 19, 三)。

3.2　偏导数的几何应用

1. 求曲线$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x + y^2 + z^3 = 8 \end{cases}$在$(3, 2, 1)$处的切线和法平面方程，三种解法：

   (a) 切平面的交线，

   (b) 切向量垂直于两个切平面的法向量，

   (c) 矩阵形式计算。

2. 求曲面$x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3 = 0$上同时垂直于平面$z = 0$及$x + y - 1 = 0$的切平面方程([5], P. 15, 一、1)。

3. 设$f(x, y)$是可微的二次齐函数，又设$P_0(1, -2, 2)$在曲面$z = f(x, y)$上且$f'_x(1, -2) = 4$。求曲面在P_0点处的切平面方程。

4. 已知椭球面$x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = a^2 (a > 0)$与平面$3x - 2y + z = 34$相切，求$a$ ([5], P. 106, 一、4)。

3.3 多元函数的一阶泰勒公式与极值

1. 求曲面$\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$与平面$2x+2y+z+5=0$之间的最短距离([5], P. 109, 五)。

2. 在第一卦限内作椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$的切平面，使切平面与三坐标面所围成的四面体体积最小，求切点坐标([5], P. 107, 四)。

3.4 参考答案

3.4.1 隐函数求导法

1. 解：将原方程写成如下形式

$$f(x,y)=e^x yz(x,y)^2 \text{ 及} x+y+z(x,y)+xyz(x,y)^2=0$$

后，关于x求偏导可得：

$$f'_x=e^x yz^2+2e^x yzz'_x$$

及

$$1+z'_x+yz^2+2xyzz'_x=0$$

于是$z'_x(0,1,-1)=-2$且$f'_x(0,1,-1)=5$。

2. 解：将原方程写成如下形式

$$u(x,y)=f(x-u(x,y),y-u(x,y),z(x,y)-u(x,y)) \text{ 及} g(x,y,z(x,y))=0$$

后，关于x求偏导可得：

$$u'_x=f'_1(1-u'_x)+f'_2(-u'_x)+f'_3(z'_x-u'_x)$$

及

$$g'_1+g'_3z'_x=0$$

于是

$$z'_x=-\frac{g'_1}{g'_3} \text{ 且} u'_x=\frac{f'_1g'_3-f'_3g'_1}{g'_3(1+f'_1+f'_2+f'_3)}$$

同理

$$z'_y=-\frac{g'_2}{g'_3} \text{ 且} u'_y=\frac{f'_2g'_3-f'_3g'_2}{g'_3(1+f'_1+f'_2+f'_3)}$$

3. 解：对方程两边求全微分得到：

$$(3z^2+1)\mathrm{d}z=3y^2\mathrm{d}x+6xy\mathrm{d}y$$

于是

$$\mathrm{d}z=\frac{3y^2}{3z^2+1}\mathrm{d}x+\frac{6xy}{3z^2+1}\mathrm{d}y$$

且

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6xy}{3z^2+1}$$

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{6x(3z^2+1)-36xyz\frac{6xy}{3z^2+1}}{(3z^2+1)^2}=\frac{6x(3z^2+1)^2-216x^2y^2z}{(3z^2+1)^3}$$

4. 解：原方程组分别对x,y求偏导，得到：

$$\begin{array}{lllll}2f_1'u_x' & & +f_2'v_x' & & =1\\ & 2f_1'u_y' & & +f_2'v_y' & =0\\ g'u_x' & & +g'v_x' & & =0\\ & g'u_y' & & +g'v_y' & =1\end{array}$$

由于$g'\neq 0$，$v_x'=-u_x'$且$u_y'=(g')^{-1}-v_y'$。于是由$2f_1'-f_2'\neq 0$得：

$$u_x'=\frac{1}{2f_1'-f_2'}\text{ 且}v_y'=\frac{2f_1'}{g'(2f_1'-f_2')}$$

5. 解：对方程两边求全微分得：

$$yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z+\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

于是在$(1,0,-1)$处$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$。

3.4.2 偏导数的几何应用

1. 解：

(a) 切平面交线：曲面$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14=0$在$(3,2,1)$处的法向量为：

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)^T\bigg|_{(3,2,1)}=(6,4,2)$$

故切平面方程为：$3x+2y+z=14$。同理曲面$G(x,y,z)=x+y^2+z^3-8=0$在$(3,2,1)$处的法向量为：

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y},\frac{\partial G}{\partial z}\right)^T\bigg|_{(3,2,1)}=(1,4,3)$$

故切平面方程为：$x+4y+3z=14$。于是切线方程为：$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-1}{5}$，法平面为：$x-4y+5z=0$。

(b) 切向量垂直于两个法向量：曲面$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14=0$在$(3,2,1)$处的法向量为：

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)^T\bigg|_{(3,2,1)}=2(3,2,1)$$

同理曲面$G(x,y,z)=x+y^2+z^3-8=0$在$(3,2,1)$处的法向量为：

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y},\frac{\partial G}{\partial z}\right)^T\Bigg|_{(3,2,1)}=(1,4,3)$$

故切平面方程的法向量为

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{j}\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=2\vec{i}-8\vec{j}+10\vec{k}=2(\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})$$

故法平面为：$x-4y+5z=0$，切线方程为：$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-1}{5}$。

(c) 矩阵形式计算：曲线在点$(3,2,1)$处的切向量为：

$$\left.\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{j}\\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}\right|_{(3,2,1)}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{j}\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=2\vec{i}-8\vec{j}+10\vec{k}=2(\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})$$

故曲线的切线方程为：$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-1}{5}$，法平面为：$x-4y+5z=0$。

2. 解：设曲面上满足条件的切点为(x,y,z)，则有：$x^2+y^2+z^2-xy-3=0$，且法方向$(2x-y,2y-x,2z)$与

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}$$

平行。故$z=0$且$x=y$。于是所求切平面方程为：$x-y=\pm 2$。

3. 解：由f是二次齐次函数，可得：

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2)=f(1,-2)=2$$

故在点$P_0(1,-2,2)$处$\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-2)=2-4=-2$。于是切平面方程为：$4(x-1)-2(y+2)-(z-2)=0$，即$4x-2y-z=6$。

4. 解：设点(x,y,z)在椭球上，则该点切平面的法方向为：$\left(2x,\dfrac{y}{2},\dfrac{2}{9}z\right)$。于是：

$$\frac{2x}{3}=\frac{\frac{y}{2}}{-2}=\frac{\frac{2}{9}z}{1}=k\ 且 3x-2y+z=34$$

解得：$k=2$，$x=3,y=-8,z=9$。于是$a=\sqrt{34}$。

3.4.3 多元函数的一阶泰勒公式与极值

1. 解法一(拉格朗日乘子法)：曲面上的点(x,y,z)到平面的距离为$d=\dfrac{|2x+2y+z+5|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}$。为求其最小值，引入如下函数：

$$F(x,y,z,\lambda)=2x+2y+z+5+\lambda\left(\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}-1\right)$$

于是

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2+\lambda x=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2+2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=1+\dfrac{1}{2}\lambda z=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x=-1\\ y=-\dfrac{1}{2}\\ z=-1\end{array}\right. \text{或}\left\{\begin{array}{c}x=1\\ y=\dfrac{1}{2}\\ z=1\end{array}\right.$$

于是最短距离为$d=\dfrac{1}{3}$。

解法二(达到最短距离的点的法方向与平面垂直)：设曲面上的法方向为：$\left(x,2y,\dfrac{1}{2}z\right)$。于是达到最短距离的点满足：

$$\frac{x}{2}=\frac{2y}{2}=\frac{\frac{1}{2}z}{1}=k\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}x=2k\\ y=k\\ z=2k\end{array}\right.$$

故由点在曲面上可得：$k=\pm1$，进而最短距离为：$d=\dfrac{|2x+2y+z+5|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\dfrac{1}{3}$。

2. 解：椭球面上点(x_0,y_0,z_0)的法方向为：$\left(\dfrac{2x_0}{a^2},\dfrac{2y_0}{b^2},\dfrac{2z_0}{c^2}\right)$。故该点的切平面为：

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

即

$$\frac{2x_0}{a^2}x+\frac{2y_0}{b^2}y+\frac{2z_0}{c^2}z=2$$

于是与坐标轴的三个交点为：$\left(\dfrac{a^2}{x_0},0,0\right)$，$\left(0,\dfrac{b^2}{y_0}\right)$，$\left(0,0,\dfrac{c^2}{z_0}\right)$，所求四面体体积为：

$$V=\frac{1}{6}a^2b^2c^2\frac{1}{x_0y_0z_0}$$

应用拉格朗日乘子法，设

$$G(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

则

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x} &= yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \\
\frac{\partial G}{\partial y} &= xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \\
\frac{\partial G}{\partial y} &= xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \\
\frac{\partial G}{\partial \lambda} &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{b}{\sqrt{3}} \\ z = \dfrac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

四　二重积分

4.1　导数的几何意义与极值

1. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14 \\ x+y^2+z^3=8 \end{cases}$ 在$(3,2,1)$处的切线和法平面方程，三种解法：

   (a) 切平面的交线，

   (b) 切向量垂直于两个切平面的法向量，

   (c) 矩阵形式计算。

2. 求曲面$\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$与平面$2x+2y+z+5=0$之间的最短距离([5], P. 109, 五)。

4.2　二重积分计算

1. 计算下列二重积分值

   (a) 设区域D由曲线$y=-x^3$，直线$x=1$与$y=1$围成，计算二重积分$\iint\limits_D \left[2+xy\cos\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

   (b) 计算$I=\iint\limits_D \left(x^3+y^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y):x^2+y^2\le 2x-2y\}$。

2. 计算$\iint\limits_D \left|x^2-y\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y):-1\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$

3. 计算$\iint\limits_D \dfrac{\cos y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\left\{(x,y):0\le x\le\dfrac{\pi}{3}, x\le y\le\dfrac{\pi}{3}\right\}$。

4. 交换累次积分的顺序

   (a) $\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$

   (b) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

5. 设有界闭区域σ是由曲线$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$，$(0\le t\le 2\pi)$，及$y=0$ 围成。计算二重积分$\iint\limits_\sigma y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

6. 已知平面区域$D=\left\{(r,\theta):2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

7. 计算$\iint_D \arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\left\{(x,y):1\le x^2+y^2\le 9,\dfrac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}x\right\}$。

8. 设$f(x)=x^2+x\displaystyle\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t+\iint_D f(xy)\mathrm{d}\sigma$满足$f(1)=0$，其中$D$由$(-1,1)$，$(1,1)$，$(1,-1)$为顶点三角形围成。求$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。

9. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，并设$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，求$\displaystyle\int_0^1\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$。

10. 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续且$f(x)=x+\displaystyle\int_x^1 f(y)f(y-x)\mathrm{d}y$，求$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。

4.3 参考答案

4.3.1 导数的几何意义与极值

1. 解：

(a) 切平面交线：曲面$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14=0$在$(3,2,1)$处的法向量为：

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)^T\Bigg|_{(3,2,1)}=(6,4,2)$$

故切平面方程为：$3x+2y+z=14$。同理曲面$G(x,y,z)=x+y^2+z^3-8=0$ 在$(3,2,1)$ 处的法向量为：

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y},\frac{\partial G}{\partial z}\right)^T\Bigg|_{(3,2,1)}=(1,4,3)$$

故切平面方程为：$x+4y+3z=14$。于是切线方程为：$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-1}{5}$，法平面为：$x-4y+5z=0$。

(b) 切向量垂直于两个法向量：曲面$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14=0$在$(3,2,1)$处的法向量为：

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)^T\Bigg|_{(3,2,1)}=2(3,2,1)$$

同理曲面$G(x,y,z)=x+y^2+z^3-8=0$在$(3,2,1)$处的法向量为：

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x},\frac{\partial G}{\partial y},\frac{\partial G}{\partial z}\right)^T\Bigg|_{(3,2,1)}=(1,4,3)$$

故切平面方程的法向量为

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{j} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 8\vec{j} + 10\vec{k} = 2(\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k})$$

故法平面为：$x-4y+5z=0$，切线方程为：$\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-1}{5}$。

(c) 矩阵形式计算：曲线在点$(3,2,1)$处的切向量为：

$$\left.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{j} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}\right|_{(3,2,1)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{j} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 8\vec{j} + 10\vec{k} = 2(\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k})$$

故曲线的切线方程为：$\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-1}{5}$，法平面为：$x-4y+5z=0$。

2. 解法一(拉格朗日乘子法)：曲面上的点(x,y,z)到平面的距离为$d = \dfrac{|2x+2y+z+5|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}$。为求其最小值，引入如下函数：

$$F(x,y,z,\lambda) = 2x+2y+z+5+\lambda\left(\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}-1\right)$$

于是

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} = 2+\lambda x = 0 \\ &\frac{\partial F}{\partial y} = 2+2\lambda y = 0 \\ &\frac{\partial F}{\partial y} = 1+\frac{1}{2}\lambda z = 0 \\ &\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \\ z=-1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=1 \end{cases}$$

于是最短距离为$d=\dfrac{1}{3}$。

解法二(达到最短距离的点的法方向与平面垂直)：设曲面上的法方向为：$\left(x, 2y, \dfrac{1}{2}z\right)$。于是达到最短距离的点满足：

$$\frac{x}{2} = \frac{2y}{2} = \frac{\frac{1}{2}z}{1} = k \Rightarrow \begin{cases} x=2k \\ y=k \\ z=2k \end{cases}$$

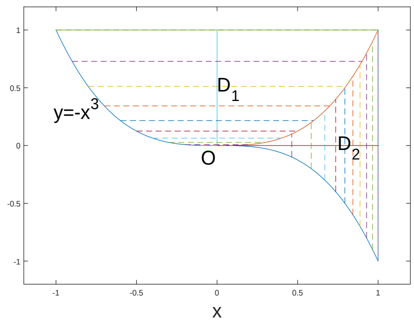
故由点在曲面上可得：$k=\pm1$，进而最短距离为：$d=\dfrac{|2x+2y+z+5|}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = \dfrac{1}{3}$。

4.3.2 二重积分计算

1. 计算下列二重积分值

(a) 解：由题意得将积分区域为：$D=D_1\cup D_2$，则

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D\left[2+xy\cos\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1}xy\cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}xy\cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1,x\geq0}xy\cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1,x\leq0}xy\cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\iint\limits_{D_2,y\geq0}xy\cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2,y\leq0}xy\cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&2\times2\times1+0+0=4\end{aligned}$$



(b) 解：

i. (方法一)：由于$D=\{(x,y):(x-1)^2+(y+1)^2\leq2\}$，进行坐标变换：$u=x-1$，$v=y+1$。于是

$$\begin{aligned}I=&\iint\limits_{u^2+v^2\leq2}\left((u+1)^3+(v-1)^3\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\=&\iint\limits_{u^2+v^2\leq2}\left(u^3+3u^2+3u+1+v^3-3v^2+3v-1\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\=&\iint\limits_{u^2+v^2\leq2}\left(3u^2-3v^2\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v &&\text{奇函数的性质}\\=&0 &&\text{积分区域的对称性}\end{aligned}$$

ii. (方法二)：设$(x,y)\in D$，则$(-y)^2+(-x)^2\leq2(-y)-2(-x)$即$(-y,-x)\in D$。于是

$$I=\iint_D(-y)^3+(-x)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D x^3+y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-I$$

于是$I=0$。

2. 解:

$$\begin{aligned}
I=&\iint\limits_{D}\left|x^{2}-y\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&2\left(\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^{2}}(x^{2}-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\int_{x^{2}}^{1}(y-x^{2})\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right)\\
=&2\left(\int_{0}^{1}\frac{x^{4}}{2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}-x^{2}+\frac{x^{4}}{2}\right)\mathrm{d}x\right)\\
=&2\int_{0}^{1}\left(x^{4}-x^{2}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+1=\frac{11}{15}
\end{aligned}$$

3. 解：

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}x\int_{x}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos y}{y}\mathrm{d}y=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}y\int_{0}^{y}\frac{\cos y}{y}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos y\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. 交换累次积分的顺序

(a) 解：

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{2}\mathrm{d}x\int_{x}^{x^{2}}f(x,y)\mathrm{d}y=&\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{x^{2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{x}^{x^{2}}f(x,y)\mathrm{d}y\\
=&\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x\\
&+\int_{2}^{4}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\\
=&\int_{0}^{2}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{2}^{4}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(b) 解：

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^{2}}}^{-\sqrt{1-y^{2}}}f(x,y)\mathrm{d}x=&\iint_{0\le y\le 1,x^{2}+y^{2}\le 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&-\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^{2}}}f(x,y)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

5. 解：

(a) (方法一)：设曲线的直角坐标方程为$y=y(x)$，则

$$\begin{aligned}
I=&\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{0}^{y(x)}y^{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_{0}^{2\pi}y^{3}(x)\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{3}\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^{3}\mathrm{d}(t-\sin t)=\frac{1}{3}\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^{4}\mathrm{d}t\\
=&\frac{16}{3}\int_{0}^{2\pi}\sin^{8}\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{32}{3}\int_{0}^{\pi}\sin^{8}u\mathrm{d}u=\frac{32}{3}\times\frac{7}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\pi=\frac{35}{12}\pi
\end{aligned}$$

(b) (方法二)：以(t,y)为曲线的参数坐标，则$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(1-\cos t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y$且

$$
\begin{aligned}
I=&\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos t}y^2(1-\cos t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t\\
=&\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\mathrm{d}t\int_0^{1-\cos t}y^2\mathrm{d}y\\
=&\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\times\frac{1}{3}y^3\bigg|_0^{1-\cos t}\mathrm{d}t\\
=&\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\mathrm{d}t=\frac{35}{12}\pi
\end{aligned}
$$

6. 解：

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta\mathrm{d}r\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}r^2\mathrm{d}r\\
&=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}((1+\cos\theta)^3-1)\cos\theta\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{16}{3}\left(3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+3\cdot\frac{2}{3}\cdot1+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=5\pi+\frac{32}{3}
\end{aligned}
$$

7. 解：利用极坐标变换可得：

$$
\begin{aligned}
I&=\int_1^3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\arctan\tan\theta\times r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\
&=\int_1^3 r\mathrm{d}r\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\theta\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2}(3^2-1^2)\times\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^2-\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\right)=\frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

8. 解：首先设$A=\iint_D f(xy)\mathrm{d}\sigma$。利用变量替换可得：

$$
\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t=\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u=F(x^2)
$$

只是积分上限x^2的函数。进而由$f(1)=0$可得：

$$
0=1+\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u+A
$$

及

$$\begin{aligned} A &= \iint_D f(xy)\mathrm{d}\sigma \\ &= \iint_D x^2y^2\mathrm{d}\sigma + \iint_D xyF(x^2y^2)\mathrm{d}\sigma + A\iint_D \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-x}^{1} x^2y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x + 0 + 2A \\ &= \frac{2}{9} + 2A \end{aligned}$$

故$A = -\frac{2}{9}$且$\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = -\frac{7}{9}$。

9. 解：

(a) (方法一)：设$F(x) = \int_x^1 f(y)\mathrm{d}y$，则$F(0) = A$，$F(1) = 0$。由$f(x)$在$[0,1]$上连续，故$F(x)$在$[0,1]$上可微，且$F'(x) = -f(x)$。于是

$$\int_0^1\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_0^1 F(x)\mathrm{d}F(x) = -\frac{1}{2}(F(x))^2\Big|_{x=0}^{1} = \frac{1}{2}A^2$$

(b) (方法二)：

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^1\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1\int_0^x f(y)f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\int_0^1\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ =&\frac{1}{2}\left(\int_0^1\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_0^1\int_0^x f(y)f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \\ =&\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}A^2 \end{aligned}$$

10. 解：设$A = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。则

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_0^1\int_x^1 f(y)f(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1\int_0^y f(y)f(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(y-x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

于是由上一题讨论可知：$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}A^2$，故$A = 1$。

五　曲线积分

5.1　第一型曲线积分

1. 计算$\oint\limits_L (x+y^3)\mathrm{d}s$，其中$L$是圆周$x^2+y^2=R^2$。

2. 计算$\int\limits_L |y|\mathrm{d}s$，其中$L$是右半圆周，即$x^2+y^2=R^2(x\geq 0)$ (参见[5]，P. 21，一、3)。

3. 计算$\int\limits_L x^2\mathrm{d}s$，其中$L$为圆周$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ (参见[5]，P. 17，一、4)。

4. 求椭圆柱面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$介于$xoy$平面与空间曲面$z=\dfrac{xy}{c}$之间的面积。

5.2　第二型曲线积分

1. 设L为正向圆周$x^2+y^2=2$在第一象限中的部分，则$\displaystyle\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ (见[5]，P. 25，一、4)。

2. 求$\displaystyle\int_L \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中曲线$L$是$\dfrac{(x-1)^2}{9}+y^2=1$位于上半平面，从点$(-2,0)$到$(4,0)$的部分(见[5]，P. 26，五)。

3. 设$f(x)$具有一阶连续导数，$f(0)=0$且曲线积分
$$\int_C (f(x)-e^x)\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$$
与积分路径无关，求$f(x)$ (参见[5]，P. 27，一、3)。

4. 设函数$f(u)$有连续的一阶导数，L是以$A(1,1)B(3,3)$为直径的左上半圆弧从A到B的部分，求
$$\int_L \left(\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})+y\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})+x\right)\mathrm{d}y$$
(见[5]，P. 18，六)。

5. 在过起点$O(0,0)$和终点$A(\pi,0)$的曲线族$\Gamma_a: y=a\sin x(a>0)$中，求a的值使得第二型曲线积分

$$\int_{\Gamma_a}(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+e^{y^2})\mathrm{d}y$$

的值最小(见[5]，P. 27，六)。

6. 设$z=f(x,y)$在$D: x^2+y^2\le 1$具有连续二阶偏导且$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=(x+y^2)e^{x^2+y^2}$，计算

$$\iint_D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

7. 设$z=f(x,y)$具有连续一阶偏导，$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{-x^2-y^2}$，计算$\displaystyle\int_C(x+y)f(x,y)\mathrm{d}s$，$C: x^2+y^2=1$。

5.3 补充习题

1. 设函数$f(x,y)$在全平面具有二阶连续的偏导数且$f(0,0)=0$及两个偏导数满足

$$\max\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|,\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\right\}\le 2|x-y|，对于任意(x,y)\in R^2$$

求证：$|f(5,4)|\le 1$。

2. 设$\mathrm{d}u=\dfrac{(x+y-z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y+z)\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$，求$u(x,y,z)$。

5.4 参考答案

5.4.1 第一型曲线积分

1. 计算$\oint\limits_L(x+y^3)\mathrm{d}s$，其中$L$是圆周$x^2+y^2=R^2$。

解：对于曲线L上任意一点(x,y)，有$(-x,-y)$亦在曲线上。于是

$$\begin{aligned}I&=\oint_L(x+y^3)\mathrm{d}s\\&=\oint_L((-x)+(-y)^3)\mathrm{d}s\\&=-\oint_L(x+y^3)\mathrm{d}s=-I\end{aligned}$$

故$I=0$。

2. 计算$\int\limits_L |y|\mathrm{d}s$，其中$L$是右半圆周，即$x^2+y^2=R^2(x\geq 0)$ (参见[5]，P. 21，一、3)。

解：由曲线关于x轴对称，可得：

$$\begin{aligned}I=&\int\limits_L |y|\mathrm{d}s = 2\int\limits_{L,y\geq 0} y\mathrm{d}s\\ =&2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} R\sin\theta R\mathrm{d}\theta = 2R^2\end{aligned}$$

3. 计算$\int\limits_L x^2\mathrm{d}s$，其中$L$为圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$ (参见[5]，P. 17，一、4)。

解：(轮换对称性)

$$\begin{aligned}I=&\int\limits_L x^2\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\int\limits_L x^2+y^2+z^2\mathrm{d}s\\ =&\frac{1}{3}\int\limits_L a^2\mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\times \text{大圆周长} = \frac{2}{3}a^3\pi\end{aligned}$$

4. 求椭圆柱面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$介于$xoy$平面与空间曲面$z=\dfrac{xy}{c}$之间的面积。

解：由曲顶柱面面积公式可得：

$$A=\int_L \frac{xy}{c}\mathrm{d}s$$

以下两种方法均可得到面积A的值。

方法一、

$$\begin{aligned}A=&\int_0^{2\pi}\frac{ab\cos\theta\sin\theta}{c}\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{ab}{c}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{ab}{c}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}+\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{ab}{c}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\ &+\frac{ab}{c}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos\theta\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\ =&0\end{aligned}$$

方法二、对于曲线L上任意一点(x,y)，有$(-x,y)$亦在曲线上。于是

$$A=\int_L\frac{xy}{c}\mathrm{d}s=\int_L\frac{-xy}{c}\mathrm{d}s=-A$$

故$A=0$。

5.4.2 第二型曲线积分

1. 设L为正向圆周$x^2+y^2=2$在第一象限中的部分，则$\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ (见[5]，P. 25，一、4)。

解：直接参数化。

$$
\begin{aligned}
I=&\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{2}\cos\theta\mathrm{d}\sqrt{2}\sin\theta-2\sqrt{2}\sin\theta\mathrm{d}\sqrt{2}\cos\theta\\
=&\int_0^{\frac{1}{2}\pi}2\cos^2\theta+4\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\\
=&\pi+\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi
\end{aligned}
$$

本课题亦可以通过补充x,y轴的两个半径，形成封闭区域之后用格林公式。由于补充的两个第二型曲线积分为0，故答案为四分之一圆的面积的三倍。

2. 求$\int_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中曲线$L$是$\frac{(x-1)^2}{9}+y^2=1$位于上半平面，从点$(-2,0)$到$(4,0)$的部分(见[5]，P. 26，五)。

解：设$P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{-x}{x^2+y^2}$。由于$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，故改积分对于任意一条连接$A(-2,0)B(4,0)$且不经过原点$(0,0)$的路径均相等。

为此考虑L_1为$x^2+y^2=4$的上半圆周及$C=\{(x,y):2\le x\le 4,y=0\}$。于是

$$
\begin{aligned}
I=&\int_{L_1}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_C\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\
=&\frac{1}{4}\int_{L_1}y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+\int_2^4\frac{0\mathrm{d}x-x\mathrm{d}0}{x^2+0^2}\\
=&\frac{1}{4}\int_\pi^0\sin\theta\mathrm{d}\cos\theta-\cos\theta\mathrm{d}\sin\theta=-\frac{1}{4}\pi
\end{aligned}
$$

3. 设$f(x)$具有一阶连续导数，$f(0)=0$且曲线积分

$$\int_C(f(x)-e^x)\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$$

与积分路径无关，求$f(x)$ (参见[5]，P. 27，一、3)。

解：由于改积分与路径无关可得：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(f(x)-e^x)\cos y=\frac{\partial Q}{\partial x}=-f'(x)\cos y$$

于是

$$f'(x)+f(x)=e^x$$

由$f(0)=0$可得：$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$。

4. 设函数$f(u)$有连续的一阶导数，L是以$A(1,1)B(3,3)$为直径的左上半圆弧从A到B的部分，求

$$\int_L \left(\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})+y\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})+x\right)\mathrm{d}y$$

(见[5]，P. 18，六)。

解：设D为以L及线段$\overline{BA}$为边界的半圆形区域，

$$P(x,y)=\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})+y$$
$$Q(x,y)=-\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})-x$$

则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$$

于是

$$\begin{aligned}
I=&\int_L \left(\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})+y\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})+x\right)\mathrm{d}y\\
=&\int_{L+\overline{BA}} \left(\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})+y\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})+x\right)\mathrm{d}y-\int_3^1 \left(\frac{1}{x}f(1)+x\right)-\left(\frac{1}{x}f(1)+x\right)\mathrm{d}x\\
=&-2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi
\end{aligned}$$

5. 在过起点$O(0,0)$和终点$A(\pi,0)$的曲线族$\Gamma_a: y=a\sin x(a>0)$中，求a的值使得第二型曲线积分

$$\int_{\Gamma_a}(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+e^{y^2})\mathrm{d}y$$

的值最小(见[5]，P. 27，六)。

解：

$$\begin{aligned}
I(a)=&\int_{\Gamma_a}(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+e^{y^2})\mathrm{d}y\\
=&\int_{\Gamma_a+\overline{OA}}(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+e^{y^2})\mathrm{d}y-\int_\pi^0(1+0^3)\mathrm{d}x+(2x+e^{0^2})\mathrm{d}0\\
=&-\iint_D(2-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\pi\\
=&-\int_0^\pi\int_0^{a\sin x}(2-3y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\pi=-\int_0^\pi 2a\sin x-a^3\sin^3 x\mathrm{d}x+\pi\\
=&\int_0^\pi 2a-a^3\sin^2 x\mathrm{d}\cos x+\pi=\frac{4}{3}a^3-4a+\pi
\end{aligned}$$

其中D为Γ_a与$\overline{OA}$围成的闭区域。

于是$I'(a)=4a^2-4=0$知$a=1$，且$I''(1)>0$。故$a=1$时$I(a)$最小。

6. 设$z=f(x,y)$在$D: x^2+y^2\le 1$具有连续二阶偏导且$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=(x+y^2)e^{x^2+y^2}$，计算

$$\iint_D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解：二重积分化成第二型曲线积分，然后直接参数化即可。

$$\begin{aligned}&\iint_D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_C\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}x\\ =&\int_0^{2\pi}\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}(\cos\theta,\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\ =&\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin^2\theta)e^{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=e\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\pi e\end{aligned}$$

7. 设$z=f(x,y)$具有连续一阶偏导，$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^{-x^2-y^2}$，计算$\displaystyle\int_C(x+y)f(x,y)\mathrm{d}s$，$C: x^2+y^2=1$。

解：将曲线积分参数化，然后利用第二型曲线积分的格林公式计算。

$$\begin{aligned}I=&\int_C(x+y)f(x,y)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\ =&\int_0^{2\pi}-f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\cos\theta+f(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\sin\theta\\ =&\int_C-z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y=\iint_D\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =&\iint_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 e^{-r^2}r\mathrm{d}r=(1-e^{-1})\pi\end{aligned}$$

5.4.3 补充习题

1. 设函数$f(x,y)$在全平面具有二阶连续的偏导数且$f(0,0)=0$及两个偏导数满足

$$\max\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|,\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\right\}\le 2|x-y|\text{，对于任意}(x,y)\in R^2$$

求证：$|f(5,4)|\le 1$。

证明：容易验证第二型曲线积分

$$\int_L\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

的积分值与路径无关。故

$$f(4,4)=f(0,0)+\int_{x=y,0\le x\le 4}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y=0$$

进而

$$\begin{aligned}|f(5,4)| &= \left|f(4,4)+\int_4^5 \frac{\partial f}{\partial x}(x,4)\mathrm{d}x\right| \\ &\le \int_4^5 \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,4)\right|\mathrm{d}x \le \int_4^5 2(x-4)\mathrm{d}x = 1\end{aligned}$$

证毕。

2. 设$\mathrm{d}u=\dfrac{(x+y-z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y+z)\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$，求$u(x,y,z)$。

解：设

$$P=\frac{x+y-z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$$
$$Q=\frac{x+y-z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$$
$$R=\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$$

由于

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故原函数存在且第二型曲线积分与路径无关。对于任意$x_0>0,y_0>0,z_0>0$有

$$\begin{aligned}u(x_0,y_0,z_0)=&u(1,0,1)+\int_{1\le x\le x_0,y=0,z=x}\frac{(x+y-z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y+z)\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}\\ &+\int_{x=x_0,0\le y\le y_0,z=x_0}\frac{(x+y-z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y+z)\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}\\ &+\int_{x=x_0,y=y_0,x_0\le z\le z_0}\frac{(x+y-z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y+z)\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}\\ =&u(1,0,1)+\ln(x_0)\\ &+\frac{1}{2}\ln(2x_0^2+2x_0y_0+y_0^2)-\frac{1}{2}\ln 2-\ln(x_0)-\arctan\frac{x_0+y_0}{x_0}+\frac{\pi}{4}\\ &+\frac{1}{2}\ln(x_0^2+2x_0y_0+y_0^2+z_0^2)-\frac{1}{2}\ln(2x_0^2+2x_0y_0+y_0^2)\\ &+\arctan\frac{z_0}{x_0+y_0}-\arctan\frac{x_0}{x_0+y_0}\\ =&C+\frac{1}{2}\ln(x_0^2+2x_0y_0+y_0^2+z_0^2)+\arctan\frac{z_0}{x_0+y_0}\end{aligned}$$

故

$$u(x,y,z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+2xy+y^2+z^2)+\arctan\frac{z}{x+y}+C$$

六 曲面积分

6.1 第一型曲面积分

1. 设Σ为$(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=R^2$，计算$\iint\limits_{\Sigma} 2x+3y+z\mathrm{d}S$ (见[5]，P. 17，一、2)。
2. 设曲面Σ为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$，计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+|z|)^2\mathrm{d}S$ (见[5]，P. 21，一、4，参见[5]，P. 25，一、5)。
3. 求密度为1的均匀圆柱体$x^2+y^2\leq 1, |z|\leq 1$对直线$L: x=y=z$ 的转动惯量(见[5]，P. 26，六)。
4. 设曲面$\Sigma: |x|+|y|+|z|=1$，计算$\iint\limits_{\Sigma}(\tan(xy)+|y|+|z|)\mathrm{d}S$。

6.2 第二型曲面积分

1. 计算$\iint\limits_{\Sigma} x(1+x^2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y(1-x^2z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(1-x^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leq z\leq 1)$的下侧(见[5]，P. 20，五)。
2. 计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是曲面$z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$的上侧(见[5]，P. 22，五)。
3. 计算$I=\iint\limits_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧中满足$x\geq 0, y\geq 0$的部分(见[5]，P. 27，五)。
4. 设函数$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$在球体$\Omega: x^2+y^2+z^2\leq 1$上有连续偏导数，曲面$\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$，方向为外侧。在$\Omega$上
$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=(x+y+z)^2$$
求$I=\iint\limits_{\Sigma}(P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$的值(见[5]，P. 29，三)。
5. 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$f$为连续函数，$\Sigma$为平面$x-y+z=1$在第四卦限部分的下侧(见[5]，P. 127，七)。

6.3 补充习题

1. 计算曲线积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中$\Sigma$为球面$(x-1)^2+y^2+z^2=a^2(a>0,a\neq 1)$的外侧。

2. 设函数$f(u)$连续可微，记$I_t=\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$P=Q=R=f((x^2+y^2)z)$且有向曲面$\Sigma$是球柱体$x^2+y^2\leq t^2$，$0\leq z\leq 1$的表面外侧。求极限$\lim\limits_{t\to 0+}\frac{I_t}{t^4}$。思考：若$f(u)$连续且仅在$u=0$处可导，该极限为何值？

6.4 参考答案

6.4.1 第一型曲面积分

1. 解：

$$
\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{\Sigma}2x+3y+z\mathrm{d}S\\
&=\iint\limits_{\Sigma}2(x-1)+3y+(z+1)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma}2-1\mathrm{d}S && \text{为了利用对称性}\\
&=4\pi R^2 && \text{球面面积}
\end{aligned}
$$

2. 解：

$$
\begin{aligned}
I=&\iint\limits_{\Sigma}x^2+z^2\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma}2x|z|\mathrm{d}S && \text{为了利用对称性}\\
=&\frac{2}{3}\iint\limits_{\Sigma}x^2+y^2+z^2\mathrm{d}S\\
=&\frac{8}{3}\pi R^4 && \text{球面面积}
\end{aligned}
$$

3. 解：首先计算点到直线$x=y=z$的距离：

$$
d^2=\frac{|(1,1,1)\times(x,y,z)|^2}{1^2+1^2+1^2}=\frac{1}{3}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)
$$

接下来计算转动惯量：

$$
\begin{aligned}
&\iiint_V d^2\mathrm{d}v\\
=&\frac{2}{3}\iiint_V x^2+y^2+z^2\mathrm{d}v && \text{利用对称性}\\
=&\frac{4}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^1(r^2+z^2)r\mathrm{d}r && \text{柱坐标变换}\\
=&\frac{10}{9}\pi
\end{aligned}
$$

4. 解：

$$\begin{aligned}
I=&\iint\limits_{\Sigma}|y|+|z|\mathrm{d}S && \text{利用对称性}\\
=&\frac{2}{3}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S && \text{利用轮换对称性}\\
=&\frac{16}{3}\iint_{x\geq0,y\geq0,z\geq0,x+y+z=1}\mathrm{d}S && \text{8个三角形面积}\\
=&\frac{16}{3}\iint_{x\geq0,y\geq0,x+y=1}\sqrt{1+(-z'_x)^2+(-z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\frac{8}{3}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

6.4.2 第二型曲面积分

1. 解：

$$\begin{aligned}
I=&-\iint_{oxy}x(1+x^2z)(-z'_x)+y(1-x^2z)(-z'_y)+z(1-x^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y && \text{化成第一型}\\
=&2\iint\limits_{oxy}x^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\cos^4\theta\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4} && \text{化为极坐标}
\end{aligned}$$

2. 解：补充一个曲面$\Sigma_1:x^2+y^2=1$的上侧。

$$\begin{aligned}
I=&\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1^-}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+\iint_{\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&6\iiint_V x^2+y^2+z\mathrm{d}\sigma-\iint_{oxy}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y && \text{高斯公式}\\
=&6\int_0^{2\pi}\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-r^2}(r^2+z)r\mathrm{d}r-3\pi && \text{化为柱坐标}\\
=&-\pi
\end{aligned}$$

3. 书上原题，答案为$\frac{2}{15}$，过程略。

4. 解：由高斯公式可得：

$$\begin{aligned}
I=&\iiint_V\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}V\\
=&\iiint_V(x+y+z)^2\mathrm{d}V\\
=&2\iiint_V x^2+y^2+z^2\mathrm{d}V && \text{利用对称性}\\
=&2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^2r^2\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi && \text{化为极坐标}
\end{aligned}$$

5. 解：直接化成第一型曲面积分：

$$
\begin{aligned}
I &= -\iint_{oxy} \big([f(x,y,z)+z](-z'_x) + [2f(x,y,z)+y](-z'_y) + [f(x,y,z)+z]\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\iint_{oxy} 2(y-x+1) - y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\text{化为第一型计算}
\end{aligned}
$$

6.4.3 补充习题

1. 解：分别设

$$
\begin{aligned}
P(x,y,z) &= \frac{x}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
Q(x,y,z) &= \frac{y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
R(x,y,z) &= \frac{z}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

则容易验证（虽然计算有点复杂）：$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$。

(i) 当$0 < a < 1$时，计算区域内不包含原点，故$I = 0$。

(i) 当$a > 1$时，计算区域内包含原点，不能直接使用高斯公式。为此引入$\Sigma_\epsilon : x^2+y^2+4z^2 = \epsilon^2$方向向外。则

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma\cup\Sigma_\epsilon^-} + \iint_{\Sigma_\epsilon} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{\epsilon^3}\iint_{\Sigma_\epsilon} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{\epsilon^3}\iiint_{V_\epsilon} \mathrm{d}V = 8\pi \qquad \text{这个是题目的考点}
\end{aligned}
$$

2. 解：首先

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x} &= 2xzf'((x^2+y^2)z) \\
\frac{\partial Q}{\partial y} &= 2yzf'((x^2+y^2)z) \\
\frac{\partial R}{\partial z} &= (x^2+y^2)f'((x^2+y^2)z)
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
I_t &= \iiint_V (2xz+2yz+x^2+y^2)f'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}V \\
&= \iiint_V (x^2+y^2)f'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}V \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \mathrm{d}zf'(r^2z)r^2r\mathrm{d}r
\end{aligned}
$$

故用洛必达法则可以求得：

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0+}\frac{I_t}{t^4} &= \lim_{t\to 0+}\frac{2\pi\displaystyle\int_0^1 f'(t^2z)t^3\mathrm{d}z}{4t^3}\\
&=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0+}\int_0^1 f'(t^2z)\mathrm{d}z\\
&=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

七 级数

7.1 正项级数

1. 设两个正项级数$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$。如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$绝对收敛(见[5]，P. 27，七)。

2. 已知单调的正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛。

3. 设正项级数$\{a_n\}$的部分和为$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$。证明：(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充分必要条件是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 收敛；(2) 对于任意$\lambda > 1$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\lambda}}$ 收敛。

7.2 交错级数

1. 设$f(x)$是在$(-\infty, +\infty)$内的可微函数且$|f'(x)| \le mf(x)$，其中$0 < m < 1$。任取实数a_0，定义$a_n = \ln f(a_{n-1})$，$n = 1, 2, \cdots$。证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$绝对收敛(见[5]，P. 18，七)。

2. 设函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续且满足$f(x) = \sin x + \displaystyle\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$。试判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$的收敛性。

7.3 幂级数

1. 设有级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \dfrac{1}{5}$，求该级数的收敛半径(见[5]，P. 21，一、2)。

2. 求函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{3^n n}$的收敛域(见[5]，P. 26，三、1)。

3. 计算下列函数的幂级数展开：

   (a) 将$\sin x$在$x = \dfrac{\pi}{4}$处展开成幂级数，

   (b) 将$\ln(1 - x - 2x^2)$展开成幂级数，

(c) 将$\dfrac{x}{4-x^2}$展开成幂级数，

(d) 将$f(x)=\arctan x$展开成幂级数，并求$f^{(n)}(0)$，

(e) 将$\dfrac{1}{(1-x)^2}$展开成幂级数。

4. 验证函数$y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$，$-\infty<x<\infty$，满足微分方程$y''+y'+y=e^x$，并求$y(x)$ (见[5]，P. 28，五)。

5. 已知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，计算$\int_0^2\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)\mathrm{d}x$ (见[5]，P. 129，三)。

6. 设$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=2a_{n+1}+3a_n$，$n\geq 1$。求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径及和函数。

7.4 参考答案

7.4.1 正项级数

1. 证明：由条件可得：

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leq\frac{a_n}{b_n}\leq\cdots\leq\frac{a_1}{b_1}$$

故

$$a_n\leq\frac{a_1}{b_1}b_n$$

于是由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。进而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sqrt{a_n}}{n}\right|\leq\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\frac{\pi^2}{12}<\infty$$

证毕。

2. 证明：由正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛知$a_n$必单调下降，故$b_n=n(a_n-a_{n+1})\geq 0$。进而由

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}b_k=&a_1-a_2+2a_2-2a_3+3a_3-3a_4+\cdots+na_n-na_{n+1}\\=&a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1}\\\leq&\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty\end{aligned}$$

知正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛。证毕。

3. 证明：(1) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则其部分和单调上升且有界，即$S_1 < S_2 < \cdots < S_n < \cdots < S < \infty$。故

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_1} \leq \frac{S_n}{S_1} \leq \frac{S}{S_1} < \infty$$

即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 收敛。

反之，假设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散。则对于任意给定自然数$n$，存在$p$使得$S_{n+p} > 2S_n$。故

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_{n+p}} \geq \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} \geq \frac{1}{2}$$

由柯西收敛准则知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$发散。

(2) 当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛时，则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k^{\lambda}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_1^{\lambda}} \leq \frac{S}{S_1^{\lambda}} < \infty$$

即级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\lambda}}$ 收敛。

以下假定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散。则当$n \geq 2$时，有

$$\frac{a_n}{S_n^{\lambda}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^{\lambda}} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}x}{S_n^{\lambda}} < \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\lambda}} = \frac{1}{\lambda - 1}(S_{n-1}^{1-\lambda} - S_n^{1-\lambda})$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k^{\lambda}} \leq \frac{a_1}{S_1^{\lambda}} + \frac{1}{\lambda - 1}(S_1^{1-\lambda} - S_n^{1-\lambda}) < \infty$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\lambda}}$ 收敛。

7.4.2 交错级数

1. 证明：对于任意$n \geq 2$，由拉格朗日中值定理可得：

$$|a_n - a_{n-1}| = |\ln f(a_{n-1}) - \ln f(a_{n-2})| = \left|\frac{f'(\xi_n)}{f(\xi_n)}\right| |a_{n-1} - a_{n-2}| \leq m|a_{n-1} - a_{n-2}|$$

其中ξ_n介于a_{n-1}与a_{n-2}之间。由于$0 < m < 1$，故比值判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$绝对收敛。证毕。

2. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$条件收敛。

证明：由题意可得：

$$f(x)=\sin x+\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t=\sin x+x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

故

$$f'(x)=\cos x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)=\cos x+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

于是$f(0)=0$且$f'(0)=1$。进而存在$\delta\in(0,1)$使得$f'(x)>0$当$|x|<\delta$时。这蕴含着交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$的一般项在$n\geq N=\left[\dfrac{1}{\delta}\right]$后是单调下降的，有莱布尼斯判别法知交错级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$条件收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$条件收敛。

7.4.3 幂级数

1. 解：由题意知幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为$\dfrac{1}{5}$，故原级数的收敛半径为$\dfrac{2}{5}$。

2. 解：由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n n}}{\frac{1}{3^{n+1}(n+1)}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=3$$

故函数项级数的收敛半径为3，收敛区间为$(0,6)$。

以下判断收敛区间端点的收敛性。

函数项级数在$x=0$处为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，故条件收敛。而函数项级数在$x=6$处为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，故发散。于是收敛域为$[0,6)$。

3. 解：

(a) 令$x=t+\dfrac{\pi}{4}$，则

$$\begin{aligned}\sin x=&\sin\left(\frac{2}{4}+t\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t+\cos t)\\=&\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}+^{2n+1}\right)\right.\\=&\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+t-\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots\right)\\=&\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{8}\right)^3+\cdots\right],x\in(-\infty,+\infty)\end{aligned}$$

(b) 由于$f(x)=\ln(1-x-2x^2)=\ln(1-2x)+\ln(1+x)$，及

$$\begin{aligned}\ln(1+x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}, && x\in(-1,1]\\ \ln(1-2x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(-2x)^{n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n+1}x^{n+1}, && x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\end{aligned}$$

故

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n-2^{n+1}}{n+1}x^{n+1},\qquad \in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{x}{4-x^2}&=\frac{x}{4}\frac{1}{1-(x/2)^2}\\ &=\frac{x}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n+1}}x^{2n+1}\quad x\in(-2,2)\end{aligned}$$

(d) 由

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n,\qquad x\in(-1,1)$$

可知：

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\qquad x\in(-1,1)$$

易见当$x=\pm1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$收敛，故收敛域为$[-1,1]$。
由幂级数展开的唯一性可得：

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k(2k)! & n=2k+1\end{cases}$$

(e) 为了避免计算级数乘法，采用求导的方式展开，即

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1},\qquad x\in(-1,1)$$

4. 解：容易计算

$$\begin{aligned}y(x)&=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\\ y'(x)&=0+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\\ y''(x)&=0+x+\frac{x^4}{4!}+\cdots\end{aligned}$$

于是$y''+y'+y=e^x$且$y(0)=1$，$y'(0)=0$。进而解方程可得：$y(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x$。

5. 解：利用幂级数展开可以得到：

$$
\begin{aligned}
&\int_0^2 \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^2 \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(-\frac{x}{2}\right)^{n+1}\right)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^2 \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\mathrm{d}x \qquad \text{奇数项均为0}\\
=&\int_0^2 \frac{2}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}\mathrm{d}x\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^2 \frac{1}{2k+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\mathrm{d}x\\
=&2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}
\end{aligned}
$$

由已知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，可得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{24}$，故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$。于是原式$=\frac{\pi^2}{4}$。

6. 解：为了计算幂级数的收敛半径，设$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$。则

$$b_{n+1}=2+\frac{3}{b_n}$$

故$b_n\geq 2$且

$$|b_{n+1}-3|=\left|\frac{b_n-3}{b_n}\right|\leq\frac{1}{2}|b_n-3|$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-3)=0$，故幂级数的收敛半径为$\frac{1}{3}$，收敛区间为$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$。

设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，则

$$
\begin{aligned}
S(x)&=1+x+x^2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+2}x^n\\
&=1+x+x^2\sum_{n=1}^{\infty}(2a_{n+1}+3a_n)x^n\\
&=1+x+2x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}+3x^2\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\\
&=1+x+2x(S(x)-1)+3x^2S(x)
\end{aligned}
$$

故$S(x)=\frac{1-x}{1+2x-3x^2}=\frac{1}{1+3x}$，收敛半径为$\frac{1}{3}$，收敛区间为$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$。

参考文献

[1] 哈尔滨工业大学数学分析教研室，工科数学分析（上册），高等教育出版社，北京，2015.

[2] 哈尔滨工业大学数学分析教研室，工科数学分析（下册），高等教育出版社，北京，2015.

[3] 哈尔滨工业大学数学分析教研室，工科数学分析学习指导与习题解答（上册），高等教育出版社，北京，2015.

[4] 哈尔滨工业大学数学分析教研室，工科数学分析学习指导与习题解答（下册），高等教育出版社，北京，2015.

[5] 张雅卓，白红，哈尔滨工业大学微积分历届期末试题集，哈尔滨工业大学出版社，2018.