HIT本部大一学习交流群

扫一扫二维码，加入群聊。

第四部分

模拟题

秋季学期期中考试模拟试题(一)

一、填空题

1. 设 $\varphi(x)$ 是以 π 为周期的可导函数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x}=1$,$f(x)=\sin 2x+\varphi(x)$,则曲线 $y=f(x)$ 在 $(\pi,f(\pi))$ 处的法线方程为______.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos x}}=2$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=$______.

3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,4]$,则函数 $\Psi(x)=f(x+1)+f(x-1)$ 的定义域为______.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}=$______.

二、选择题

1. 设 $f(x)$ 是可导的偶函数,则( ).

(A) $f'(x)$ 也是偶函数　　(B) $f'(x)$ 是奇函数

(C) $f'(x)$ 是非奇非偶函数　　(D) $f'(x)$ 的奇偶性不确定

2. 设 $x_n\leqslant a\leqslant y_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$,则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$( ).

(A) 都收敛于 a　　(B) 都收敛,但不一定收敛于 a

(C) 可能收敛,也可能发散　　(D) 都发散

3. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin^2 x}=1$,则( ).

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值　　(B) $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值 0

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处不取极值　　(D) $(0,0)$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

4. 设 k 为常数,函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的增量满足 $\Delta f|_{x=x_0}=k\Delta x+o(\Delta x)$,则 $y=f(x)$ 在 x_0 处( ).

(A) 连续,不一定可微　　(B) 可微且 $f'(x_0)=k$

(C) 可微且 $f'(x_0)=0$　　(D) 可微且 $f'(x_0)=1$

三、设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n$,$n=2,3,\cdots$.

(1) 证明:方程 $f_n(x)=1$ 在 $[0,+\infty)$ 有唯一实根 x_n.

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

四、设直角坐标 (x,y) 与极坐标 (r,θ) 满足 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$,若曲线的极坐标方程为 $r=3-2\sin\theta$,求曲线上对应于 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

五、设 $f(x)\in C[-1,1]$,在 $(-1,1)$ 内有 $f''(x)>0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\ln(1+x)}{x}=2$. 证明:当 $x\in(-1,1)$ 时,$f(x)\geqslant 3x$.

六、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{4}$. 证明：存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2}), \eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^3+\eta^3$.

秋季学期期中考试模拟试题(二)

一、填空题

1. 已知一个长方形的长 l 以 2 cm/s 的速率增加，宽 w 以 3 cm/s 的速率增加，则当 $l=12$ cm，$w=5$ cm 时，它的对角线增加的速率为________.

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}$ 有无穷间断点 $x=e$ 及可去间断点 $x=1$，则 a,b 分别为________.

3. 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$________.

4. 设 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 互为反函数，且 $f(2)=3, f'(2)=1, f''(2)=4$，则 $g''(3)=$________.

二、选择题

1. 设常数 $k>0$ 时，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为(　　).

(A)3　　(B)2　　(C)1　　(D)0

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　).

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

3. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$，则(　　).

(A) $f(x)$ 不存在间断点　　(B) 只存在可去间断点

(C) 只存在跳跃间断点　　(D) 只存在无穷间断点

4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant 1-\cos x$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的(　　).

(A) 连续而不可导的点　　(B) 间断点

(C) 可导点，且 $f'(0)=0$　　(D) 可导点，且 $f'(0)\neq 0$

三、计算下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{x\cos x}}{x\ln(1+x^2)}$；

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e\right]$.

四、确定常数 a 和 b 使等式 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+3)^a-x]=b$ 成立.

五、求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

六、设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$g(x)$ 在 (a,b) 内有定义，且 $g(x)>0$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 (a,b) 内任意 n 个点，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)=f(\xi)\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

秋季学期期中考试模拟试题(三)

一、填空题

1. $f(x)$ 是以 π 为周期的奇函数,且 $f(x)=\sin x-\cos x+2, 0<x<\frac{\pi}{2}$,则当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时,$f(x)=$________.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=$________.

3. 曲线 $\tan(x+y+\frac{\pi}{4})=e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程是________.

4. 设 $0<\alpha<1$,则当 $n\to\infty$ 时,$(n+1)^\alpha-n^\alpha$ 是 $\frac{1}{n}$ 的 k 阶无穷小,则 $k=$________.

二、选择题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=($ $)$.

(A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0

2. 设曲线 $y=x^2+ax$ 与曲线 $y=bx^2+c$ 在点 $(-1,0)$ 处相切,其中 a,b,c 为常数,则( ).

(A) $a=-1,b=-1,c=1$ (B) $a=-1,b=2,c=-2$

(C) $a=1,b=\frac{1}{2},c=-\frac{1}{2}$ (D) $a=1,b=-1,c=1$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\leqslant0\end{cases}$,其中 $g(x)$ 为有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处( ).

(A) 极限不存在 (B) 极限存在,但不连续 (C) 连续,但不可导 (D) 可导

4. 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的导函数的零点的个数为( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

三、设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,试确定 a 的值,使 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]$ 存在,并求此极限.

四、设 $x_0>0, x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. 求:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}x_n}{x_n-x_{n+1}}$.

五、求函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}, & x<0\\ \ln(1+x)+\sin\frac{1}{x^2-1}, & x\geqslant0\end{cases}$ 的间断点,并判断其类型.

六、设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,在 $(a,+\infty)$ 内二次可导,且存在 $b\in(a,+\infty)$,使得 $f(a)=f(b)<\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 求证:至少存在一点 $\xi\in(a,+\infty)$,使得 $f''(\xi)>0$.

秋季学期期中考试模拟试题(四)

一、填空题

1. 设 $f(x)=\sin x\sin 3x\sin 5x$,则 $f''(0)=$ ________.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\ln(1+ax)}{|x|}\right]$ 存在,则 $a=$ ________.

3. 已知 $x\to 0$ 时,$f(x)=3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 $g(x)=x^n$ 为同阶无穷小,则 $n=$ ________.

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=$ ________.

二、选择题

1. 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可微,$\Delta y=f(x_0+h)-f(x_0)$,当 $h\to 0$ 时必有( ).

(A) dy 与 Δy 是等价无穷小　　(B) $\Delta y-dy$ 是比 h 高阶的无穷小

(C) dy 是 h 的同阶无穷小　　(D) $\Delta y-dy$ 是 h 的同阶无穷小

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$,则 $f(x)$ 有( ).

(A) 1 个可去间断点,1 个跳跃间断点

(B) 2 个跳跃间断点

(C) 1 个可去间断点,1 个无穷间断点

(D) 2 个无穷间断点

3. 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有( ).

(A) $a_n<b_n$,对任意 n 都成立　　(B) $b_n<c_n$,对任意 n 都成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}, & x\leqslant 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$,则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处( ).

(A) 左导数存在,右导数不存在　　(B) 左、右导数均存在

(C) 左、右导数都不存在　　(D) 左导数不存在,右导数存在

三、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{(x+x^2)\ln(1+x)\arcsin x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$;

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

四、设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+\sin x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

五、设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$. 证明：存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

六、已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=g(0)$，$f(1)>g(1)$，$f'(0)<g'(0)$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=g(\xi)$.

秋季学期期中考试模拟试题(五)

一、填空题

1. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^3+xy+x^2-x-2=0$ 确定的满足 $y(1)=1$ 的具有二阶导数的函数,则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{[y(x)-1]\ln x}=$________.

2. 设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+(x-1)y'+x^2y=e^x$,且 $y'(0)=1$. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}=a$,则 $a=$________.

3. 设曲线 L 的参数方程表达式为 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{\pi}(1+t^2)\\ y=2\cos t\end{cases}$,$-\infty<t<+\infty$,则其平行于直线 $y=x$ 的法线方程为________.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$,则 $a=$________.

二、选择题

1. 数列 $\{x_n\}$ 收敛于实数 a 等价于( ).

(A) 对任意给定的 $\varepsilon>0$,在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内有数列的无穷多项

(B) 对任意给定的 $\varepsilon>0$,在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内有数列的有限项

(C) 对任意给定的 $\varepsilon>0$,在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 外有数列的有限项

(D) 对任意给定的 $\varepsilon>0$,在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 外有数列的无穷多项

2. 设 $f(x)=\ln^{10}x$,$g(x)=x$,$h(x)=e^{\frac{x}{10}}$,则当 x 充分大时有( ).

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$

3. 下列命题正确的是( ).

(A) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,$g(x)$ 在点 x_0 处不连续,则 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处可能连续

(B) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在点 x_0 处也连续

(C) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,则 $|f(x)|$ 在点 x_0 处也连续

(D) 若 $|f(x)|$ 在点 x_0 处连续,则 $f(x)$ 在点 x_0 处也连续

4. 设 $\delta>0$,$f(x)$ 在 $[-\delta,+\delta]$ 上有定义,$f(0)=1$,且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处( ).

(A) 连续,不一定可微　　(B) 可微,且 $f'(0)=1$

(C) 可微,且 $f'(0)=0$　　(D) 可微,且 $f'(0)$ 不确定

三、已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{x}}-1}{x^2}=c$,$c\neq 0$. 求常数 l 与 k 使当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)\sim lx^k$.

存在 $\xi \in (-1,1)$，使 $f'''(\xi)=3$.

六、设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=f(1)$. 证明：存在ξ,η满足 $0<\xi<\eta<1$，使得 $f'(\xi)+2f'(\eta)=0$.

秋季学期期中考试模拟试题(七)

一、填空题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)e^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]=$________.

2. 若 $y=y(x)$ 连续，且在 (x,y) 处满足 $\Delta y=xy^2\Delta x+x^2y\Delta x\Delta y+o(\Delta x)$，则 $y'=$________.

3. 设 n 为正整数，a 为实数，$a\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2\,011}}{x^n-(x-1)^n}=\dfrac{1}{a}$，则 $a=$________.

4. $f(x)=\begin{cases}x+\sin ax, & x>0\\ 1-\cos ax, & x\leqslant 0\end{cases}$，$f'(0)$ 存在，则 $a=$________.

二、选择题

1. 设 x_n 为单调数列，且 $x_n\neq 0$，$n\geqslant 1$，则下面不成立的是(　　).

(A) x_{2n} 收敛时，必有 x_n 收敛

(B) x_{2n} 有界时，必有 x_n 收敛

(C) $\forall\, y_n$，$y_n\to 0$，有 $x_ny_n\to 0$，则 x_n 收敛

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$ 时，必有 x_n 收敛

2. 当 $x\to 0$，$\alpha=\sqrt{1-x^2+x^4}-\cos x$ 为 x 的 k 阶无穷小，则(　　).

(A) $k=2$　　(B) $k=3$　　(C) $k=4$　　(D) $k=5$

3. $f(x)=\dfrac{|ax^3+bx^2+x-1|}{x^2-1}$，$f(x)$ 的间断点都是第一类的，则(　　).

(A) $a=b=1$　　(B) $a=b=-1$　　(C) $a=-b=1$　　(D) $a=-b=-1$

4. 设 $f(x)$ 是以 3 为周期的函数，且 $f'(-1)=1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(2-3h)-f(2)}=$(　　).

(A) -3　　(B) 3　　(C) $-\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{3}$

三、数列 x_n 满足 $x_n^n+x_n-1=0$，$0<x_n<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

四、(1) 证明：对任意的正数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立；

(2) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\ (n=1,2,\cdots)$. 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛.

五、$\begin{cases}x=f(e^{-t})\\ y=f(e^t)\end{cases}$，其中 f'' 连续，$f'(1)=1$，$f''(1)=2$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

六、$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)f(1)<0$. 求证：$\exists\,\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=(e^{-\xi}-1)f'(\xi)$.

秋季学期期中考试模拟试题(八)

一、填空题

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[n]{(n!)^2}}=$________.

2. 设 $f''(x)$ 存在，$f''(0)=-2$，$F(x)=f(\sin x)$，则 $F''(0)=$________.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$，则 $a=$________，$b=$________.

4. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$________.

二、选择题

1. 下面和 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义不等价的条件是(　　).

(A) 对于任意给定的 $0<\varepsilon<1$，$\exists N$，当 $n\geqslant N$ 时，$|x_n-a|\leqslant\varepsilon$

(B) $\forall\varepsilon>0$，有无限多的 n 满足 $|x_n-a|<\varepsilon$

(C) $\forall\varepsilon>0$，满足 $|x_n-a|>\varepsilon$ 的 n 最多为有限个

(D) $\forall k\geqslant 1$，$\exists n_k$，当 $n>n_k$ 时 $|x_n-a|<\dfrac{1}{10^k}$

2. $f'(a)$ 存在，$F(x)=|f(x)|$，则(　　).

(A) $f(a)\neq 0$ 时，$F'(a)=|f'(a)|$

(B) $f(a)\neq 0$ 时，$F'(a)=\dfrac{|f(a)|}{f(a)}f'(a)$

(C) $f(a)=0$ 时，$F'(a)\neq 0$

(D) $f(a)=0$ 时，$F'(a)$ 不存在

3. $a\neq 0$，当 $x\to 0$ 时，$\cos ax-(1+ax^2)^{\frac{1}{2}}$ 为 x^2 的高阶无穷小，则(　　).

(A) $a=1$　　(B) $a=-1$　　(C) $a=\dfrac{1}{2}$　　(D) $a=\dfrac{1}{2}$

4. 设 $f'(x)$ 存在，则(　　).

(A) $f(x)$ 在 (a,b) 上有界，则 $f'(x)$ 在 (a,b) 上也有界

(B) $f'(x)$ 在 (a,b) 上有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上也有界

(C) $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也有界

(D) $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也有界

三、$x_1\in\mathbf{R}$，$x_{n+1}=\sin x_n$，$n\geqslant 1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

四、设 $g(x)$ 二阶可导，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$.

(1) 求常数 a，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

(2) 求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

五、$y=\dfrac{1}{1+x+x^2}$，验证 y 满足 $y^{(n)}(0)+ny^{(n-1)}(0)+n(n-1)y^{(n-2)}(0)=0$，并求 $y^{(4)}(0)$.

六、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $f'(a)<f'(b)$. 证明：对任意适合 $f'(a)<c<f'(b)$ 的 c，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=c$.

秋季学期期末考试模拟试题(一)

一、填空题

1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}=$________.

2. 曲线 $r=e^{a\theta}(a>0)$ 上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围图形的面积为________.

3. 设函数 $y(x)$ 由参数方程$\begin{cases}x=t^3+3t+1\\y=t^3-3t+1\end{cases}$确定,则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为________.

4. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{\int_0^{x^2}e^{t^2}dt}=\int_e^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$,则常数 $a=$________,$b=$________.

5. 曲线 $y=\dfrac{x|x|}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线共有________条.

二、选择题

1. 曲线 $y=\dfrac{x^2}{2}$ 在[0,1]之间的一段绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面的面积为(　　).

(A)$\int_0^1 2\pi\sqrt{1+x^2}dx$　　(B)$\int_0^1 2\pi x^2dx$

(C)$\int_0^1 \pi x^2\sqrt{1+x^2}dx$　　(D)$\int_0^1 \pi\sqrt{1+x^2}dx$

2. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}$,$y=x$,$x=2$ 所围成的图形面积为 S,则 $S=$(　　).

(A)$\int_1^2(\frac{1}{x}-x)dx$　　(B)$\int_2^1(\frac{1}{x}-x)dx$

(C)$\int_1^2(2-\frac{1}{y})dy+\int_0^1(2-x)dx$　　(D)$\int_1^2(2-\frac{1}{y})dy+\int_1^2(2-x)dx$

3. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}dx$,$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}dx$,则(　　).

(A)$I_1>I_2>1$　　(B)$1>I_1>I_2$

(C)$I_2>I_1>1$　　(D)$1>I_2>I_1$

4. 设 $f(x)$ 在[0,1]上有连续导数,且 $f(0)=0$,令 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$,则必有(　　).

(A)$\int_0^1|f(x)|dx\leqslant\dfrac{M}{2}$　　(B)$\dfrac{M}{2}\leqslant\int_0^1|f(x)|dx\leqslant M$

(C)$M\leqslant\int_0^1|f(x)|dx\leqslant 2M$　　(D)$\int_0^1|f(x)|dx\geqslant 2M$

5. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导,且 $f(x)>0$,不等式

$$f(b)(b-a)<\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}$$

成立的条件是(　　).

(A)$f'(x)<0, f''(x)<0$　　(B)$f'(x)<0, f''(x)>0$

(C)$f'(x)>0, f''(x)>0$　　(D)$f'(x)>0, f''(x)<0$

三、计算下列积分

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$;

2. $\int \frac{x^5-x}{x^8+1} dx$.

四、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=\arctan t \\ \int_0^y e^{u^2} du + \int_t^1 \frac{\cos u}{1+u^2} du = 0 \end{cases}$ 确定,求 $\frac{dy}{dx}$.

五、设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内一阶连续可导,且对 $\forall x \in (0,+\infty)$ 满足 $x\int_0^1 f(xt)dt = 2\int_0^x f(t)dt + xf(x) + x^3$,又 $f(1)=0$,求 $f(x)$.

六、设曲线方程为 $y=e^{-x}(x \geq 0)$.

(1) 把该曲线与直线 $x=\xi(\xi>0)$ 和两坐标轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周,得一旋转体,求此旋转体体积 $v(\xi)$,并求满足 $v(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty} v(\xi)$ 的 a;

(2) 在此曲线上找一点,使过该点的切线与两个坐标轴所围图形的面积最大,并求出该面积.

七、设 $f''(x) \in C[a,b]$. 证明:存在 $\xi \in [a,b]$,使得 $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$.

公众号 QQ:2842305604

秋季学期期末考试模拟试题(二)

一、填空题

1. 方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{xy+x^3y}$的通解为________.

2. 摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与$x$轴所围图形的面积为________.

3. 在$x=1$时有极大值6,$x=3$时有极小值2的最低幂次多项式的表达式是________.

4. $\int_{-1}^{2} x e^{-|x|}dx=$________.

5. 设$y(x)=x^2\cos x^2$,则$y^{(10)}(0)=$________.

二、选择题

1. 设$F(x)=\int_0^x xf(x-t)dt$,$f(x)$为连续函数,$f(0)=0$,$f'(x)>0$,则$y=F(x)$在$(0,+\infty)$内是(　　).

(A) 单调增加且为向下凸的　　(B) 单调增加且为向上凸的

(C) 单调减少且为向下凸的　　(D) 单调减少且为向上凸的

2. 曲线$y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$的拐点是(　　).

(A)$(1,0)$　　(B)$(2,0)$　　(C)$(3,0)$　　(D)$(4,0)$

3. 设$f'(x_0)=0$,$f''(x_0)>0$,则必定存在一个正数δ,使得(　　).

(A) 曲线$y=f(x)$在区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内是下凸的

(B) 曲线$y=f(x)$在区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内是上凸的

(C) 曲线$y=f(x)$在区间$(x_0-\delta,x_0]$上单调减少,在$[x_0,x_0+\delta)$上单调增加

(D) 曲线$y=f(x)$在区间$(x_0-\delta,x_0]$上单调增加,在$[x_0,x_0+\delta)$上单调减少

4. 设$F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\cos t}\cos t\,dt$,则$F(x)$(　　).

(A) 是零　　(B) 是一个正数

(C) 是一个负数　　(D) 不是常数

5. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\leqslant 0\\ \cos x+\dfrac{\pi}{4}, & x>0\end{cases}$,$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$,则(　　).

(A)$F(x)$为$f(x)$的一个原函数

(B)$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可微,但不是$f(x)$的原函数

(C)$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不连续

(D)$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,但不是$f(x)$的原函数

三、1. 已知函数$F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$,设$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$,试求$\alpha$的取值范围;

2. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[\sqrt{n^2-1}+2\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}]$.

四、计算

1. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$;

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0\\ \mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$,求$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

五、(1) 比较$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$与$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$的大小,说明理由;

(2) 记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

六、若曲线在第一象限上任一点的切线、坐标轴及过切点平行于 x 轴的直线所围成的梯形的面积等于 4,且曲线过点(2,2),求该曲线方程.

七、设 $f(x)$ 在$[0,1]$上有二阶连续导数,且 $f(0)=f(1)=0,f(x)\neq 0,x\in(0,1)$. 证明:$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4$.

秋季学期期末考试模拟试题(三)

一、填空题

1. 设函数 $f(x)=n^2 e^{\frac{x}{n}}-(1+n)x$,$f(x)$ 在 $x=\xi_n$ 处取得极值,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=$________.

2. 设 $f(\pi)=2$,$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\,\mathrm{d}x=5$,则 $f(0)=$________.

3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{0}x\cos t^2\,\mathrm{d}t=$________.

4. 方程 $y'\cos y'=(1+\cos x\sin y)\sin y$ 的通解为________.

5. $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x=$________.

二、选择题

1. $f(x)$ 是以 T 为周期的函数,下列函数中以 T 为周期的函数是(　　).

(A) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$　　(B) $\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$

(C) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$　　(D) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$

2. 设 $f(x)$ 连续,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$(　　).

(A) $xf(x^2)$　　(B) $-xf(x^2)$

(C) $2xf(x^2)$　　(D) $-2xf(x^2)$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续,且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x(1-\cos x)}=1$,则 $x=0$(　　).

(A) 是 $f(x)$ 的极大值点

(B) 是 $f(x)$ 的极小值点

(C) 是 $f(x)$ 的驻点,但不是极值点

(D) 不是 $f(x)$ 的驻点,也不是极值点

4. 设 $f(x)$ 有 n 阶导数,且有 $2n$ 个不同的极值点,则方程 $f^{(n)}(x)=0$ 至少有(　　).

(A) $n-1$ 个实根　(B) n 个实根

(C) $n+1$ 个实根　(D) $n+2$ 个实根

5. 曲线 $y=x(x-1)(x-2)$ 与 x 轴所围部分的面积为(　　).

(A) $\int_0^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x$

(B) $\int_0^1 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x$

(D) 以上均不对

三、设 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切，求函数 $\psi(t)$.

四、设 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{\pi-t}dt$，计算 $\int_0^{\pi}f(x)dx$.

五、求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

六、求曲线 $y=\int_0^x\tan t\,dt\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长.

七、设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l:y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点. 记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾角，若 $\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$，求 $y(x)$ 的表达式.

公众号 QQ：2842305604

秋季学期期末考试模拟试题(四)

一、填空题

1. $\int_{-1}^{1}\ln\frac{2-x}{2+x}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=$________,其中 $f(x)$ 连续.

2. 设曲线 $y=x^a$ 与 $x=y^a(a>0)$ 在第一象限所围平面图形的面积为$\frac{1}{3}$,则________.

3. 设一锥形蓄水池,深 15 m,口径 20 m,盛满水,今以水泵将水吸尽,需作功________.

4. $\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=$________.

5. $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x\sqrt{\cos(1+x^2)}+|x|)\mathrm{d}x=$________.

二、选择题

1. 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,且 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则下述结论正确的是(　　).

(A) 若 $f(x)$ 为单调递增函数,则 $F(x)$ 亦为单调递增函数

(B) 若 $f(x)$ 为单调递减函数,则 $F(x)$ 亦为单调递减函数

(C) 若 $f(x)$ 为非负函数,则 $F(x)$ 为单调递增函数

(D) 若 $f(x)$ 为有界函数,则 $F(x)$ 亦为有界函数

2. 设$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{\frac{1}{3}}}=1$,则函数 $f(x)$ 在点 a 处必然(　　).

(A) 取极大值　　(B) 取极小值　　(C) 可导　　(D) 不可导

3. 设 $f(x)$,$g(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续,且 $f(x)$ 具有一阶连续导数,并有$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=0$,

$f'(x)=-2x^2+\int_0^x g(x-t)\mathrm{d}t$,则(　　).

(A)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点

(B)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

(C)$(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) 以上结论都不对

4. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\mathrm{d}x$,$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\mathrm{d}x$,$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\mathrm{d}x$,则 I,J,K 的大小关系为(　　).

(A)$I<J<K$　　(B)$I<K<J$　　(C)$J<I<K$　　(D)$K<J<I$

5. 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,则下列叙述正确的是(　　).

(A) 若 $f(x)$ 为偶函数,则$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\neq 0$

(B) 若 $f(x)$ 为奇函数,则$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\neq 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

(C) 若 $f(x)$ 为非奇非偶函数,则 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x \neq 0$

(D) 若 $f(x)$ 为以 T 为周期的周期函数,且是奇函数,则 $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数

三、求 $\int \frac{3\cos x-\sin x}{\cos x-2\sin x}\mathrm{d}x$.

四、已知 $y'=\arctan(x-1)^2$, $y(0)=0$,求 $I=\int_{0}^{1} y(x)\mathrm{d}x$.

五、设 $0<a<1$,求 $\int_{0}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}$.

六、设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3} \end{cases}$ 确定,求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

七、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二阶可导,且 $f(a)=f(b)=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$. 证明:存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=0$.

公众号QQ:2842305604

秋季学期期末考试模拟试题(五)

一、填空题

1. 设$\int x^2 f(x)\mathrm{d}x = \arcsin x + c, x > 0$ 时,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,满足 $F(1)=0$,则 $F(x)=$________.

2. 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}+\dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}\right]=$________.

3. 设 $y=y(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上可导,$\forall x>0, \Delta y = y(x+\Delta x)-y(x)=\dfrac{y\Delta x}{1+x}+\alpha$,其中 α 当 $\Delta x\to 0$ 时是 Δx 的等价无穷小,$y(0)=1, y(1)=$________.

4. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+6}}=$________.

5. 已知 $x=\int_0^t \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s, y=\int_0^t \sin(t-s)^2\mathrm{d}s$,则$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=$________.

二、选择题

1. $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x$,则有( ).

(A)$N<P<M$　　(B)$M<P<N$

(C)$P<N<M$　　(D)$P<M<N$

2. $\int |x|\mathrm{d}x=$( ).

(A) $\dfrac{1}{2}x^2+c$　　(B)$x|x|+c$

(C)$\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+c_1, & x\geqslant 0\\ -\dfrac{1}{2}x^2+c_2, & x\leqslant 0\end{cases}$　　(D) $\dfrac{1}{2}x|x|+c$

3. 设 $f(x)$ 连续,且满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^2+\dfrac{1}{2}$,则关于 $f(x)$ 的极值问题有( ).

(A) 存在极小值$\dfrac{1}{2}\ln 2$　　(B) 存在极大值$-\dfrac{1}{2}\ln 2$

(C) 存在极小值$\dfrac{1}{2}$　　(D) 存在极小值$-\dfrac{1}{2}$

4. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$,则 $f'(x)$ 的零点个数为( ).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

5. $\dfrac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}$ 的一个原函数是(　　).

(A) $\ln(2+\sin 2x)$　　(B) $\ln(1+\sin 2x)$

(C) $\ln|x+\sin 2x|$　　(D) $\ln(2-\sin 2x)$

三、计算 $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\int_1^x \dfrac{\ln(t+1)}{t}dt$.

四、已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且 $f(x)=x,x\in[0,\pi)$，计算 $\int_\pi^{3\pi} f(x)dx$.

五、设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$、直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x，V_y 分别是由 D 绕 x 轴、y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值.

六、一个高为 l 的柱体形储油罐，底面是长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆. 现将储油罐平放(图1)，当油罐中油面高度为 $\dfrac{3}{2}b$ 时，计算油的质量.

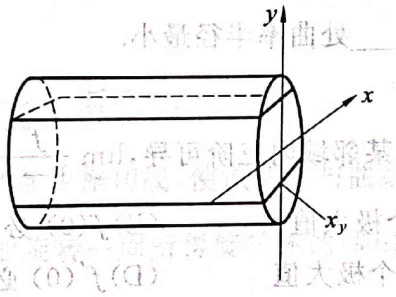

图1

七、设函数 $y(x)$ 满足 $y(x)=x^3-x\int_1^x \dfrac{y(t)}{t^2}dt+y'(x)(x>0)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x^3}$ 存在，求 $y(x)$.

秋季学期期末考试模拟试题(六)

一、填空题

1. 设曲线 $y=f(x)$ 经过原点且在原点与 x 轴相切,其中 $f(x)$ 二阶可导,又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-1$,则此曲线在原点的曲率为________.

2. 设 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,$f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}+\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$,则 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=$________.

3. 已知 $f(x)(x\in[0,+\infty))$ 为非负连续函数,且满足 $\int_0^x f(x)f(x-t)\mathrm{d}t=x^3$,则 $f(x)=$________.

4. 设 $|y|<1$,则 $\int_{-1}^{1}|x-y|\mathrm{d}x=$________.

5. 曲线 $y=\ln x$ 在点________处曲率半径最小.

二、选择题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内三阶可导,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1-\cos x}=-\dfrac{1}{2}$,则(　　).

(A) $f(0)$ 必是 $f(x)$ 的一个极大值　　(B) $f(0)$ 必是 $f(x)$ 的一个极小值

(C) $f'(0)$ 必是 $f'(x)$ 的一个极大值　　(D) $f'(0)$ 必是 $f'(x)$ 的一个极小值

2. 下列函数中,在区间 $[-2,3]$ 上不存在原函数的是(　　).

(A) $f(x)=\max\{|x|,1\}$

(B) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}, & x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(D) $f(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$,其中 $g(t)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0\\ 2, & x>0\end{cases}$

3. 设 $\phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ x-1, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$,则 $\phi(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内(　　).

(A) 无界　　(B) 递减　　(C) 可导　　(D) 连续

4. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数,且 $f'(0)=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$,则(　　).

(A)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B)$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C)$(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D)$f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5. x 轴上长为 a，线密度为常数 μ 的均匀细直杆，对其右侧距右端点 a 处质量为 m 的质点引力 F 的大小为(　　).

(A)$\int_0^{-a}\frac{km\mu}{(a+x)^2}\mathrm{d}x$　　(B)$\int_0^{a}\frac{km\mu}{(a+x)^2}\mathrm{d}x$

(C)$\int_{-a}^{0}\frac{km\mu}{(a+x)^2}\mathrm{d}x$　　(D)$\int_a^{0}\frac{km\mu}{(a+x)^2}\mathrm{d}x$

三、试确定常数 a,b,c 的值，使得极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq0)$.

四、设可微函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 上有定义，其反函数为 $g(x)$，且满足 $\int_1^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}}-8)$，试求 $f(x)$.

五、求曲线 $y=\dfrac{x^2\arctan x}{x-1}-x$ 的渐近线.

六、过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\,(x\geqslant0)$ 上点 A 作切线，使该切线与曲线及 x 轴所围平面图形 D 的面积为 $\frac{3}{4}$(图 1). 求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

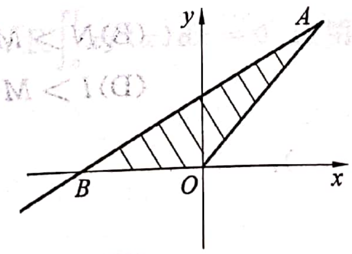

图 1

七、设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，若曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1,x=t(t>1)$，与 x 轴围成的平面区域绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积为 $V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$，且 $f(2)=\frac{2}{9}$，求函数 $y=f(x)$ 的表达式.

秋季学期期末考试模拟试题(七)

一、填空题

1. 曲线 $y=x^2+x+1$ 在点(0,1)处的曲率为________.

2. $\int(\arcsin x-\arccos x)\mathrm{d}x=$________.

3. $\int_{-1}^{1}x(\cos x+\mathrm{e}^{x^2}\cos\sqrt{x^2+2})\mathrm{d}x=$________.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{1^2+2^2+\cdots+n^2}}=$________.

5. 设 $y=y(x)$ 满足方程 $\int_0^x xy\,\mathrm{d}x=x^2+y$,则 $y(x)=$________.

二、选择题

1. 设 $f(x)$ 为已知可导奇函数,$g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数,则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x-f(x)}xg(t-x)\mathrm{d}t=$(　　).

(A)$\int_0^{-f(x)}g(t)\mathrm{d}t+x^2f'(x)$　　(B)$\int_0^{-f(x)}g(t)\mathrm{d}t-x^2f'(x)$

(C)$\int_0^{-f(x)}g(t)\mathrm{d}t+xf'(x)$　　(D)$\int_0^{-f(x)}g(t)\mathrm{d}t-xf'(x)$

2. $I=\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$,$M=\int_0^1\sin^n x\,\mathrm{d}x$,$N=\int_0^1\sin x^n\mathrm{d}x$,下列关系中正确的是(　　).

(A)$I>N>M$　　(B)$N>M>I$

(C)$M>N>I$　　(D)$I>M>N$

3. $\int_{-1}^{1}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^2}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的值为(　　).

(A)$\dfrac{1}{1+\mathrm{e}}-\dfrac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}}$　　(B)0

(C)$\dfrac{1}{1+\mathrm{e}}-\dfrac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}}+1$　　(D)以上均不对

4. $\int\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x(1+x)}\mathrm{d}x=$(　　).

(A)$-\dfrac{1}{2}\ln^2(1+\dfrac{1}{x})+c$　　(B)$(1+\dfrac{1}{x})\ln(1+\dfrac{1}{x})+c$

(C)$\ln\ln(1+\dfrac{1}{x})+c$　　(D)$x\ln(1+\dfrac{1}{x})+c$

5. 设 $f(x)$ 有连续导数,$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$,$f(0)=0$,$f'(0)\neq0$,且当 $x\to0$ 时,$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 $k=$(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

三、计算

1. $\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)}dx$；

2. $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx$.

四、曲线 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0, x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形，该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体，其体积为 $V(t)$，侧面积为 $S(t)$，在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(1) 求 $\frac{S(t)}{V(t)}$ 的值；

(2) 求 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{S(t)}{F(t)}$.

五、设函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值；

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

六、设 $f(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，$F(t)=\frac{\int_0^t f(x^2)x^2dx}{\int_0^t f(x^2)x\,dx}$. 讨论 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

七、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 xf(x)dx=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f(\xi)-\int_0^{\xi}xf(x)dx=0$.

公众号 QQ：2842305604

秋季学期期末考试模拟试题(八)

一、填空题

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+\sin t+x}}=$________.

2. 当 $x\to 0$ 时,$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)\mathrm{d}t$ 的导数与 x^2 为等价无穷小,则 $f'(0)=$________.

3. 函数 $y=x^3-5x^2+3x+5$ 的图形的上凸区间为________.

4. $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$,则 $f(x)=$________.

5. 设 $f(x)>0$,$f(x)$ 可导,且$\int_0^x \ln f(t)\mathrm{d}t=x^2(1+f'(0))$,则 $f(x)=$________.

二、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶导数,$f''(0)=f'(0)=0$,则( ).

(A)$x=0$ 为 $f(x)$ 的零点

(B)$x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点

(C) 当$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$ 时,$(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) 当$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{\sin x}=1$ 时,$(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

2. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)$ 的渐近线共有( ).

(A)1 条 (B)2 条 (C)3 条 (D)4 条

3. 若 $f(x)$ 在$[0,1]$上可导,$f(1)-f(0)=1$,$I=\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x$,则有( ).

(A)$I=1$ (B)$I<1$ (C)$I\geqslant 1$ (D)$I=0$

4. 参数曲线 $x=t^2$,$y=3t+t^3$,$t\in(0,\infty)$ 的向上凸区间是( ).

(A)$(0,1)$ (B)$(1,+\infty)$ (C)$(0,2)$ (D)$(2,+\infty)$

5. 把质量为M的冰块沿地面匀速地推过距离S,速度是v_0,冰块的质量在每单位时间减少m.设摩擦系数为μ,则在整个过程中克服摩擦力作的功为( ).

(A)$\mu gs(M-\dfrac{ms}{2v_0})$ (B)$\dfrac{1}{2}\mu gs(M-\dfrac{ms}{v_0})$

(C)$\mu gs(M-\dfrac{2ms}{v_0})$ (D)$\mu gs(M-\dfrac{mv_0}{3s})$

三、计算

1. $\int_{-\infty}^0\dfrac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$;

2. $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx$.

四、设 D 是曲线 $y=2x-x^2$ 与 x 轴围成的平面图形，直线 $y=kx$ 把 D 分成 D_1，D_2 上下两部分(图 1)，若 D_1 的面积与 D_2 的面积之比 $S_1:S_2=1:7$. 求平面图形 D_1 的周长及 D_1 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

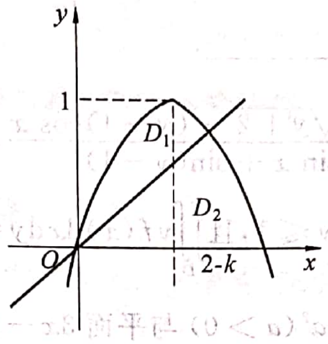

图 1

五、设 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内二阶可导，$f(0)=f(1)$，$f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx$. 证明：存在 $\xi \in (0,2)$，使得 $f''(\xi)=0$.

六、求微分方程 $xdy+(x-2y)dx=0$ 的一个解 $y=y(x)$，使得曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1$，$x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体之体积最小.

七、设 $f(x)$ 是$[0,2]$上的可微函数，满足 $f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)| \leqslant 1$，证明：$\left|\int_0^2 f(x)dx\right| > 1$.

HIT爱观影社【总】

扫一扫二维码，加入群聊。

第五部分
模拟题答案

公众号 QQ:2842305604

秋季学期期中考试模拟试题(一)答案

一、填空题

1. $y=-\frac{1}{3}(x-\pi)$

解:由$\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{x}=1$可知$\varphi(0)=0,\varphi'(0)=1$,则$f(0)=0,f'(0)=3$.故法线方程为$y=-\frac{1}{3}(x-\pi)$.

2. $-(\ln 2)^2$

解:因为

$$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos x}}=2$$

所以

$$\lim_{x\to0}\ln\left(1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\ln 2\ln\cos x$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{4^x-1}=0$$

因此

$$\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos x}}=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{4^x-1}{f(x)}\frac{f(x)}{x^3}\frac{x^3}{4^x-1}\frac{1}{\ln\cos x}}=2$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^3}{(4^x-1)\ln\cos x}=\ln 2$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^3}=\ln 2\lim_{x\to0}\frac{(4^x-1)\ln\cos x}{x^3}=-(\ln 2)^2$$

3. $[1,3]$

解: $\begin{cases}0\leqslant x+1\leqslant4\\0\leqslant x-1\leqslant4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant3\\1\leqslant x\leqslant5\end{cases}\Rightarrow x\in[1,3]$

4. -2

解: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{\frac{1}{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{-1}=-2$

二、选择题

1. B　解:$f(x)=f(-x),f'(x)=-f'(-x)$.

2. A　解:$y_n-a\leqslant y_n-x_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a;x_n-a\leqslant y_n-x_n\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

3. B　解:此题为期末的内容见期末模拟题.

4. B　解:由$\Delta f|_{x=x_0}=k\Delta x+o(\Delta x)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\Rightarrow f'(x_0)=k$.

三、解:(1) 由题可知$f_n(0)=0,f_n(1)=n>1$.由零点定理,$\exists x_n\in(0,1)$使得$f_n(x_n)=$

1.

又$f_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0$,则$f_n(x)$单调递增,故实根唯一.

(2) 由 $x_n \in (0,1), n=2,3,\cdots$ 得 $\{x_n\}$ 有界,所以

$$1=f_n(x_n)=f_{n+1}(x_{n+1}), n=2,3$$
$$\Rightarrow 1=x_n+x_n^2+\cdots+x_n^n=x_{n+1}+x_{n+1}^2+\cdots+x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n+1}$$
$$\Rightarrow (x_n+\cdots+x_n^n)-(x_{n+1}+\cdots+x_{n+1}^n)=x_{n+1}^{n+1}>0$$

因此 $\{x_n\}$ 单调递减,由单调有界原理,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,记为 A.

又 $x_n+\cdots+x_n^n=1 \Rightarrow \dfrac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=1$,因 $0<x_n<x_2<1$,故 $\dfrac{A}{1-A}=1 \Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$.

四、解:
$$\begin{cases} x=(3-2\sin\theta)\cos\theta \\ y=(3-2\sin\theta)\sin\theta \end{cases}$$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时,解得 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases}$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

因此切线方程为
$$y-1=-\frac{\sqrt{3}}{5}(x-\sqrt{3})$$

法线方法为
$$y-1=\frac{5}{\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$$

五、证明:设 $F(x)=f(x)-3x$,由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\ln(1+x)}{x}=2$ 知 $f(0)=0, f'(0)=3$. 又 $F'(x)=f'(x)-3$,则 $F'(0)=0, F(0)=0$.

(1) 当 $x\in(-1,0]$ 时,$(f'(x))'>0$,则 $f'(x)$ 单调递增. 所以 $f'(x)\leqslant f'(0)=3$,则 $F'(x)\leqslant 0$,因此 $F(x)$ 单调递减.

故 $F(x)\geqslant F(0)=0$.

(2) 当 $x\in(0,1)$ 时,同理可得 $F(x)\geqslant F(0)=0$.

综上,$f(x)\geqslant 3x$.

六、证明:设 $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{4}x^4$,则

$$F(0)=F(1)=0$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{2}F'(\xi), \xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

$$F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}F'(\eta), \eta\in\left(\frac{1}{2},1\right) \quad (2)$$

(1)+(2) 可得

$$0=F'(\xi)+F'(\eta)\Rightarrow f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^3+\eta^3$$

秋季学期期中考试模拟试题(二)答案

一、填空题

1. 3 cm/s

解：对角线 $n=\sqrt{l^2+w^2}$，则 $n'=\dfrac{u'+ww'}{\sqrt{l^2+w^2}}$. 故 n 的增加速度为 $\dfrac{12\times2+5\times3}{\sqrt{(12)^2+5^2}}=3$.

2. 1，e

解：由 $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{e^e-b}{(e-a)(e-b)}=\infty$，得 $a=e$ 或 $b=e$.

由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{e-b}{(1-a)(1-b)}$ 存在，得 $b=e$，则 $a=1$.

3. $-2^n(n-1)!$

解：

$$y'=-2\frac{1}{1-2x}$$

$$y''=(-2)^2\frac{-1}{(1-2x)^2}$$

$$y'''=(-2)^3\frac{-1\times(-2)}{(1-2x)^3}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=(-2)^n\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1-2x)^n}$$

因此

$$y^{(n)}(0)=-2^n(n-1)!$$

4. -4

解：

$$g''(3)=\lim_{y\to3}\frac{g'(y)-g'(3)}{y-3}=\lim_{x\to2}\frac{\dfrac{1}{f'(x)}-\dfrac{1}{f'(3)}}{f(x)-f(2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{f'(x)f'(2)}\frac{f'(2)-f'(x)}{f(x)-f(2)}=\frac{f''(2)}{f'^3(2)}=-4$$

二、选择题

1. B

解：由 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 得

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=0$$

则 $x=e$. 当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减.

因此 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$，$f(\mathrm{e})>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. $\exists\xi_1\in(0,\mathrm{e})$，使得 $f(\xi_1)=0$；$\exists\xi_2\in(\mathrm{e},+\infty)$，使得 $f(\xi_2)=0$.

2. B

解：设 $\{x_n\}$ 为单调数列，因为 $f(x)$ 单调有界，所以 $\{f(x_n)\}$ 也是单调有界数列，故数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

3. B

解：$f(x)=\begin{cases}x^2, & x=0,\pm1,\cdots,\pm k\cdots\\ x(1-x), & x\neq 0,\pm1,\cdots,\pm k\cdots\end{cases}$ 均为可去间断点.

4. C

解：由 $|f(x)|\leqslant 1-\cos x$，$f(0)=0$，则

$$0\leqslant\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\leqslant\frac{1-\cos x}{|x|}\to 0\Rightarrow f'(0)=0$$

三、计算下列极限

1. 解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{x\cos x}}{x\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x-x\cos x}}{\mathrm{e}^{x\cos x}\cdot x^3}=\frac{1}{2}$$

2. 解：
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\left[\frac{1}{t}\ln(1+t)\right]'$$
$$=\mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{t-(t+1)\ln(1+t)}{t^2(t+1)}=-\frac{\mathrm{e}}{2}$$

四、解：
$$\lim_{x\to+\infty}x\left[x^{5a-1}\left(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)^a-1\right]=b\Rightarrow 5a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{5}$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)^{\frac{1}{5}}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}x\,\frac{1}{5}\left(\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)=\frac{7}{5}$$

五、解：设 $f(x)=k\arctan x-x$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为奇函数，$f(0)=0$，则
$$f'(x)=\frac{k-1-x^2}{1+x^2}$$

(1) $k-1\leqslant 0$，即 $k\leqslant 1$ 时，$f'(x)<0\,(x\neq 0)$，则 $f(x)$ 单调递减，故 $f(x)=0$ 只有一个实根，$x=0$.

(2) $k-1>0$，即 $k>1$ 时，在 $(0,\sqrt{k-1})$ 内，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；在 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 内，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减. 故 $f(\sqrt{k-1})$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的最大值.

由 $f(0)=0$，$f(\sqrt{k-1})>0$，得
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(k\arctan x-x)=-\infty$$
故 $\exists\xi\in(\sqrt{k-1},+\infty)$，使得 $f(\xi)=0$.

由 $f(x)$ 是奇函数及单调性，故 $f(x)=0$ 有且仅有三个不同实根，$x=\pm\xi$，$x=0$.

六、证明：不妨设 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$（否则重排序），则 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 内有最值. 设 $x = m$ 时 $f(x)$ 最小，$x = M$ 时 $f(x)$ 最大. 不妨令 $m < M$，令 $F(x) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)[f(x_i) - f(x)]$，则有

$$F(m) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)[f(x_i) - f(m)] \geqslant 0$$

$$F(M) \leqslant 0$$

(1) 若 $F(m) = 0$ 或 $F(M) = 0$，取 $\xi = m$ 或 M.

(2) 不妨设 $F(m) > 0$，$F(M) < 0$.

由零点定理，可得 $\xi \in (a, b)$ 满足结论.

秋季学期期中考试模拟试题(三)答案

一、填空题

1. $-\sin x-\cos x-2$

解:
$$\begin{aligned}f(x)&=-f(-x+\pi)\\&=-(\sin(-x+\pi)-\cos(-x+\pi)+2)\\&=-\sin x-\cos x-2\end{aligned}$$

2. e^{-1}

解:
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}=1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}(x^{\frac{1}{x}}-1)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{x(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-\ln x)}{\ln x}=-1\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}}=e^{-1}$$

3. $y=-2x$

解:对方程两边求导,得

$$\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)(1+y')=e^y y'$$

由 $x=y=0$ 得 $k=-2$,故切线方程为 $y=-2x$.

4. $1-\alpha$

解: $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{n^{-k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right]}{n^{-k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha n^\alpha}{n^{1-k}}=c\Rightarrow k=1-\alpha$$

二、选择题

1. B

解: $$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}&=\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-x^2f(0)-2f(x^3)+f(0)}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\,\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\right]\\&=-f'(0)\end{aligned}$$

2. C

解:由 $1-a=0\Rightarrow a=1$,由 $b+c=0\Rightarrow b=-c$. 由 $-2+a=-2b\Rightarrow b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{2}$.

3. D

解：

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2 g(x)}{x}=0$$

故得 $f'(0)=0$.

4. C

解：

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\\&=\frac{(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}\\&=\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}\overset{\text{令}}{=\!=}0\\&\Rightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144-132}}{6}=2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

三、解：令 $\frac{1}{x}=t$，极限化为 $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{\ln(1+e^{2t})}{\ln(1+e^t)}+a\left[\frac{1}{t}\right]\right)$.

$t\to+\infty$ 时

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{2e^{2t}}{(1+e^{2t})}\cdot\frac{(1+e^t)}{e^t}+0=\lim_{t\to+\infty}\frac{2e^t+2e^{2t}}{1+e^{2t}}=2$$

$t\to-\infty$ 时

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{2e^t+2e^{2t}}{1+e^{2t}}-a=-a$$

因此 $a=-2$.

四、解：(1) $x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$，故 $\{x_n\}$ 单调递减，又 $0<x_n<x_0$，故 $\{x_n\}$ 有界，由单调有界原理知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设为 A，则 $A=\ln(1+A)$，即 $A=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 因为

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\ln(1+t)}{t-\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{1+t}\ln(1+t)}{\frac{t}{1+t}}=2$$

所以

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)\cdot x_n}{x_n-\ln(1+x_n)}=2$$

五、解：$f(0^+)=-\sin 1$，$f(0^-)=-\frac{1}{\pi}$，跳跃间断点 $x=0$.

$f(-1^+)=f(-1^-)=-\frac{2}{\pi}$，可去间断点 $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to k}\frac{x^3-x}{\sin\pi x}=\infty$，$k=-2,-3,\cdots$，无穷间断点 $x=k(k=-2,-3,\cdots)$.

$\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}\right]$不存在，振荡间断点 $x=1$.

六、证明：由罗尔定理知，$\exists\,\xi_1\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi_1)=0 \tag{1}$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)>f(b)$，由保序性知，$\exists\,\xi_2>b$，使得当 $x\geqslant\xi_2$ 时，$f(x)>f(b)$，即 $f(\xi_2)>f(b)$.

在$[b,\xi_2]$内利用拉格朗日中值定理，得

$$\frac{f(\xi_2)-f(b)}{\xi_2-b}=f'(\xi_3)>0,\xi_3\in(b,\xi_2) \tag{2}$$

注意到 $\xi_3>\xi_1$，则在$[\xi_1,\xi_3]$内再用拉格朗日中值定理，得

$$\frac{f'(\xi_3)-f'(\xi_1)}{\xi_3-\xi_1}=f''(\xi)>0,\xi\in(a,+\infty)$$

秋季学期期中考试模拟试题(四)答案

一、填空题

1. 0

2. $\dfrac{3}{2}$

解：

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+ax)}{|x|}\right]=a$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\ln(1+ax)}{|x|}\right]=3-a$$

因此 $a=\dfrac{3}{2}$.

3. 5

解：$f(x)=3x-4\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots\right)+\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots\right)\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}-\cdots\right)$

$$=cx^5+o(x^5)\quad(c\neq 0)$$

故 $n=5$.

4. 0

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^3}{e^{t^2}}=0$.

二、选择题

1. B

解：

$$\Delta y-dy=f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h$$

$$\frac{\Delta y-dy}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)\to 0$$

所以 $\Delta y-dy$ 是 h 的高阶无穷小.

2. A

解：

$$f(x)=\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{|x-1|}\sin x=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(-x)}{|x-1|}\sin x=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin 1\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin 1\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x}=-1$$

所以 $x=0$ 是可去间断点，$x=1$ 是跳跃间断点.

3. D

解：因为$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$，所以，$\exists N$，当$n>N$，$b_n>\dfrac{1}{2}$. 因为$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$，所以，$\exists N$，当$n>N$，$|c_n|>M$. 因此

$$|b_nc_n|>\frac{1}{2}|c_n|>\frac{M}{2}$$

4. A

解：

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{1}{3}}{x-1}=1$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\dfrac{1}{3}}{x-1}=\infty$$

三、求下列极限

1. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{(x+x^2)\ln(1+x)\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{e^{\sin x}\cdot x^3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{6}$

2. 解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{6}\sin^3 x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

3. 解：

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=3\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2^x)}{x}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\cdot\ln 2}{1+2^x}=3\ln 2$$

四、解：当$x\neq 0$时

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+\cos x$$

当$x=0$时

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

故

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}+\cos x, & x\neq 0\\[2ex] 1, & x=0\end{cases}$$

五、证明：设在$[0,3]$内$f(x)$的最大值为M，最小值为m，则

$$m\leqslant\min\{f(0),f(1),f(2)\}\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant\max\{f(0),f(1),f(2)\}\leqslant M$$

由介值定理，$\exists\eta\in(0,3)$，使得$f(\eta)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$.

又$f(\eta)=f(3)=1$，由罗尔定理知结论可证.

六、证明：设$F(x)=f(x)-g(x)$，则

$$F'(x)=f'(x)-g'(x)$$

$$F'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=f'(0)-g'(0)<0$$

即当 $x>0$ 时存在 $\eta>0$，使得

$$(F(x)-F(0))\big|_{x=\eta}<0$$

$$F(\eta)<F(0)=0$$

又 $F(1)>1$，故由零点定理可得结论.

公众号 QQ：2842305604

秋季学期期中考试模拟试题(五)答案

一、填空题

1. -2

解:$y^3+xy+x^2-x-2=0$ 对其求导得

$$3y^2y'+y+xy'+2x-1=0$$

则

$$y'(1)=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{[y(x)-1]\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{y'\ln x+\dfrac{y-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{xy'\ln x+y-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2}{y'\ln x+xy''\ln x+y'+y'}=\frac{1}{y'}=-2$$

2. 1

解:由 $y''(0)=2$,则

$$\lim_{x\to0}\frac{y(x)-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{y'-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{y''}{2}=\frac{y''(0)}{0}=1$$

3. $y-\sqrt{3}=x-\frac{3}{\pi}-\frac{\pi}{12}$

解:
$$y'=\frac{-2\sin t}{\dfrac{6}{\pi}t}=-\frac{\pi}{3}\frac{\sin t}{t}=-1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$$

切点 $x_0=\frac{3}{\pi}\left(1+\frac{\pi^2}{36}\right),y_0=\sqrt{3}$.

故法线方程为 $y-\sqrt{3}=x-\frac{3}{\pi}-\frac{\pi}{12}$.

4. 2

解:$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-(1-ax)e^x}{x}=-1+a=1\Rightarrow a=2$.

二、选择题

1. C

由数列极限定义可知 C 正确.

2. C

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0,\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=0$,所以 n 充分大时,$f(x)<g(x)<h(x)$.

3. C

解:若 $f(x)$ 在 x_0 连续,则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

此时

$$||f(x)|-|f(x_0)||<\varepsilon$$

故 $|f(x)|$ 在 x_0 连续.

4. B

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(0)+2xf(x)-2xf(0)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{-2}{1-2x}+2}{2x}+2\frac{f(x)-f(0)}{x}\right]$$

$$=-2+2f'(0)=0$$

故得 $f'(0)=1$.

三、解：由题意，$\dfrac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}}-1}{x^2}=C+\alpha$（无穷小），则

$$\frac{f(x)}{x}=[(C+\alpha)x^2+1]^2-1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}}-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=C$，因此

$$\begin{cases}k=3\\ \dfrac{l}{2}=C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}l=2C\\ k=3\end{cases}$$

四、解：由题意，$\dfrac{2\sin x+xf(x)}{x^3}=\alpha$（无穷小），则

$$f(x)=\frac{\alpha x^3-2\sin x}{x}\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=-2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin x-x)+x[f(x)-(-2)]}{x^3}=0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2}=\frac{1}{3}\qquad(*)$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)-f(0)}{x^2}=\frac{1}{3}+\beta\text{（无穷小）}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{3}x+\beta x$$

$$\Rightarrow f'(0)=0$$

由式（*）知

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{3}$$

故得 $f''(0)=\dfrac{2}{3}$.

五、解：
$$0 \leqslant | x_n - 4 | = | \sqrt{x_{n-1} + 12} - 4 | = \frac{| x_{n-1} - 4 |}{\sqrt{x_{n-1} + 12} + 4}$$
$$< \frac{| x_{n-1} - 4 |}{4} < \cdots < \frac{1}{4^{n-1}} | x_1 - 2 | \to 0$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$.

六、证明：设 $f(x)$ 在点 C 取到最小值，由费马引理得
$$f'(C) = 0$$
$$| f'(0) | = | f'(C) - f'(0) | = C | f''(\xi_1) | \leqslant MC \quad (其中\ \xi_1 \in (0, C))$$
$$| f'(a) | = | f'(a) - f'(C) | = (a - C) | f''(\xi_2) | \leqslant M(a - C)$$
故 $| f'(a) | + | f'(0) | \leqslant M_a$.

公众号 QQ：2842305604

秋季学期期中考试模拟试题(六)答案

一、填空题

1.5

解:$f(x)=-f(-x)$,$f'(x)=f'(-x)$,则 $f'(-x_0)=5$.

2.2

解:
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n+5}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2^n+5}}{\sqrt[n]{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt[n]{1+\frac{5}{2^n}}}{\sqrt[n]{n^3}}=2$$

3.$\dfrac{2}{\pi-2}$

解:$1+2x=3$,$x=1$,$y=0$.则
$$2\varphi\varphi'y'+\sin[\pi\varphi(y)]+x\cos[\pi\varphi(y)]\pi\varphi'y'+2=0$$
$$2y'+\pi y'=-2$$

故 $y'=\dfrac{2}{\pi-2}$.

4.1

解:
$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=1$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x^{\frac{1}{x}}}\overset{x^{\frac{1}{x}}=u}{=\!=}\lim_{u\to1}\frac{u-1}{\ln u}=1$$

二、选择题

1.D

解:由定理可知D是正确的.

2.D

解:因为当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$g(x)$ 有界.若 $x\to x_0$ 时,$f(x)g(x)$ 是无穷大,而 $f(x)$ 不是无穷大,必有 $g(x)$ 为无穷大,矛盾.

3.C

解:
$$f(x)=\begin{cases}3x^2+x^3, & x\geqslant0\\ 3x^2-x^3, & x<0\end{cases}$$
$$f'(x)=\begin{cases}6x+3x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ 6x-3x^2, & x<0\end{cases}$$
$$f''(x)=\begin{cases}6+6x, & x>0\\ 6, & x=0\\ 6-6x, & x<0\end{cases}$$
$$f'''_-(0)=-6,f'''_+(0)=6$$

故 $f'''(0)$ 不存在.

4. B

解：$x=0,\pm 1$ 是间断点.

因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$$

所以 $x=1$ 是可去间断点.

因为

$$\lim_{x\to -1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\infty$$

所以 $x=-1$ 是无穷间断点.

因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}=\pm 1$$

所以 $x=0$ 是跳跃间断点.

三、求下列极限

1. 解：

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}e^{-x}\cdot e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x}$$

又

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\frac{1}{2}$$

故原极限为 $e^{-\frac{1}{2}}$.

2. 解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{4}$$

3. 解：

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

四、证明：$\begin{cases}\rho=a(1+\cos\theta)\\ \rho=a(1-\cos\theta)\end{cases}\Rightarrow\cos\theta=0\Rightarrow\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}.$

对于 $\rho=a(1+\cos\theta)$，有

$$\begin{cases}x=a(1+\cos\theta)\cos\theta\\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$$

$$\left|\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}}=1,\ \left|\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=2k\pi+\frac{3}{2}\pi}=-1$$

对于 $\rho=a(1-\cos\theta)$，有

$$\begin{cases}x=a(1-\cos\theta)\cos\theta\\ y=a(1-\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$$

$$\left|\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}}=-1,\ \left|\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=2k\pi+\frac{3}{2}\pi}=1$$

故切线垂直.

五、证明：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)x^3$$

$$\Rightarrow f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1),\xi_1\in(0,1)$$

$$f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2),\xi_2\in(-1,0)$$

$$\Rightarrow 1=f(1)-f(-1)=\frac{1}{6}f'''(\xi_1)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]=3$$

由介值定理知，$\exists\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$.

六、证明：

$$f\left(\frac{1}{3}\right)-f(0)=\frac{1}{3}f'(\xi),\xi\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$$

$$f(1)-f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}f'(\eta),\eta\in\left(\frac{1}{3},1\right)$$

两式相加，得

$$0=f'(\xi)+2f'(\eta)$$

秋季学期期中考试模拟试题(七)答案

一、填空题

1. $\dfrac{1}{6}$

解:因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-x+\dfrac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^x-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-1+x+1-x+\dfrac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^x}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\frac{n}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{2n^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1+1-\sqrt{1+\dfrac{1}{n^6}}}{\dfrac{1}{n^3}}$$

$$=\frac{1}{6}+\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt{1+\dfrac{1}{n^6}}}{\dfrac{1}{n^3}}=\frac{1}{6}$$

2. xy^2

解:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(xy^2+x^2y\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)\Rightarrow y'=xy^2$.

3. $n=2\ 012,a=2\ 012$

解:$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2\ 011}}{x^n-(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2\ 011}}{x^n\left[1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^n\right]}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{2\ 011}}{x^{n-1}}=\dfrac{1}{a}\Rightarrow n=2\ 012,a=2\ 012$

4. -1

解:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+\sin ax}{x}=1+a$$

故得 $a=-1$.

二、选择题

1. D

解:(A)(B)$x_{2n}\leqslant x_{2n+1}\leqslant x_{2n+2}$,由 x_{2n} 有界知 x_{2n+1} 有界,于是 x_n 单调有界必收敛.

(C)$\Rightarrow x_n$ 有界,若 x_n 无界则不保证 $x_ny_n\to 0$,例如 $y_n=\dfrac{1}{n}$,$x_n=n$. 设 $x_n=n$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$,但 x_n 不收敛.

2. C

解：
$$\sqrt{1-x^2-x^4}-\cos x=1+\frac{1}{2}(-x^2-x^4)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x^2-x^4)^2+o(x^4)-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)$$

所以 $k=4$.

3. D

解：间断点为 $x=\pm 1$.

由 $-a+b-2=0, a+b=0 \Rightarrow a=-1, b=1$.

4. C

解：
$$f'(2)=f'(-1)=1$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(2-3h)-f(2)}{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}}\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3f'(2)}=-\frac{1}{3}$$

三、解：令 $F(x)=x^n+x-1$，则 $F(0)=-1<0, F(1)=1>0$. 由零点定理知，$\exists x_n\in(0,1)$，使得 $x_n^n+x_n-1=0$.

令 $G(x)=x^{n+1}+x-1$，则 $G(1)=1>0, G(x_n)=x_n^{n+1}+x_n-1<x_n^n+x_n-1=0$. $x_{n+1}\in(x_n,1)$，使得 $x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}-1=0$. 故 $x_{n+1}>x_n$，$\{x_n\}$ 单调递增，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 收敛.

记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n+\lim\limits_{n\to\infty}x_n-1=0$. 若 $0\leqslant A<1$，$x_n\leqslant A$，则 $0<x_n^n\leqslant A^n\to 0$.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，矛盾，故 $A=1$.

四、证明：(1) 设 $f(x)=\ln(1+x)$，则 $f'(x)=\frac{1}{1+x}$. 由 $f(0)=0$，得
$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=f'(\xi)\frac{1}{n}$$

故 $\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=f'(\xi)\frac{1}{n}<1\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$.

(2)
$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$
$$>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$
$$=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)-\ln n$$
$$=\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 0\quad(n\to\infty)$$

因此$\{a_n\}$有下界

$$a_n-a_{n+1}=\ln(n+1)-\ln n-\frac{1}{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}>0$$

故$\{a_n\}$单调递减，由单调有界原理知极限存在.

五、解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(e^t)\cdot e^{2t}}{-f'(e^{-t})}\Rightarrow\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=-1$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-f'(e^{-t})[f''(e^t)\cdot e^t\cdot e^{2t}+2e^{2t}\cdot f'(e^t)]-f'(e^t)\cdot e^{2t}f'(e^{-t})\cdot e^{-t}}{-[f'(e^{-t})]^3\cdot e^{-t}}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=6$$

六、证明：设$F(x)=(1-e^x)f(x)$. 因$f(0)f(1)<1$，由零点定理知，$\exists\xi_0\in(0,1)$，使得$f(\xi_0)=0$，故$F(0)=F(\xi_0)=0$. 由罗尔定理知结论可证.

秋季学期期中考试模拟试题(八)答案

一、填空题

1.0

解：
$$\frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^2}}=\sqrt[n]{\left(1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}\right)^2}\leqslant\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$<\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right)<\frac{2}{n}$$
$$0<\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[n]{(n!)^2}}<\frac{2}{\sqrt{n}}\to 0$$

2. -2

解：
$$F'(x)=f'(\sin x)\cos x$$
$$F''(x)=f''(\sin x)\cos^2 x+f'(\sin x)\sin x$$
$$F''(0)=f''(0)=-2$$

3. $a=2,b=3$

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2+6x}{1-2x+3x^2}+a+2bx}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2+6x+(a+2bx)(1-2x+3x^2)}{2x}=4\Rightarrow a=2$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{-2+6x+(2+2bx)(1-2x+3x^2)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6+2b(1-2x+3x^2)+(2+2bx)(-2+6x)}{2x}=4\Rightarrow b=3$$

4. $e^{3x}(1+3x)$

解：
$$f(x)=\lim_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=\lim_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{1}{3t}3x}=xe^{3x}$$
$$f'(x)=e^{3x}(1+3x)$$

二、选择题

1. B

解：由数列极限的定义可知选择 B.

2. B

解：$f(a)\neq 0$，若 $f(a)>0$，则
$$F'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

若 $f(a)<0$,则

$$F'(a)=\lim_{x\to a}\frac{-f(x)+f(a)}{x-a}=-f'(a)$$

故 $F'(a)=\frac{|f(a)|}{f(a)}f'(a)$.

3. B

解:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-(1+ax^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin ax-ax(1+ax^2)^{-\frac{1}{2}}}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin ax(1+ax^2)-ax}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-a^2\cos ax(1+ax^2)-2a^2x\sin ax-a}{2}$$

$$=0\Rightarrow -a^2-a=0\Rightarrow a=-1$$

4. B

解:设 $|f'(x)|\leqslant M$,则

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$$

$$|f(x)|\leqslant M|x-x_0|+|f(x_0)|\leqslant M(b-a)+|f(x_0)|$$

故 $f(x)$ 有界.

三、解:$-1\leqslant x_n\leqslant 1$.

(1) 当 $0\leqslant x_n\leqslant 1$ 时,$x_{n+1}=\sin x_n\leqslant x_n$,$\{x_n\}$ 单调递减,故极限存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2) 当 $-1\leqslant x_n<0$ 时,$-x_{n+1}=-\sin x_n\leqslant -x_n$,$\{x_n\}$ 单调递增,故极限存在,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

综上,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

四、解:(1)
$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=a\Rightarrow g(0)=1$$

又

$$上式=\lim_{x\to 0}[g'(x)+\sin x]=g'(0)=a$$

故 $a=g'(0)$.

(2) $x\neq 0$ 时

$$f'(x)=\frac{xg'(x)-g(x)+x\sin x+\cos x}{x^2}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-xg'(0)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{2x}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}g''(0)$$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)+\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2}$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{-[g(x)-\cos x-xg'(0)]}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-xg'(0)}{x^2}$$

$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}g''(0)+g''(0)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}g''(0)=f'(0)$$

故 $f'(x)$ 连续.

五、解：

$$(x^2+x+1)y=1$$

$$[(x^2+x+1)y]^{(n)}=y^{(n)}(x^2+x+1)+ny^{(n-1)}(2x+1)+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n-2)}\cdot 2+0=0$$

$x=0$ 时

$$y^{(n)}(0)+ny^{(n-1)}(0)+n(n-1)y^{(n-2)}(0)=0$$

$$y'=-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2},y'(0)=-1,y(0)=1$$

将 $n=2$ 代入，得 $y^{(2)}(0)=0$.

将 $n=3$ 代入，得 $y^{(3)}(0)=6$.

将 $n=4$ 代入，得 $y^{(4)}(0)=-24$.

六、证明：设

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\in(a,b]\\ f'(a)=f'_+(a), & x=a\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}, & x\in[a,b)\\ f'(b)=f'_-(b), & x=b\end{cases}$$

则可知 $F(x)$，$G(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的连续函数

$$F(a)=f'(a),F(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$G(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=F(b),G(b)=f'(b)$$

对任意适合 $f'(a)<c<f'(b)$ 的 c，则 c 介于 $F(a)$，$F(b)$ 之间或 $G(a)$，$G(b)$ 之间，再利用 $F(x)$ 或 $G(x)$ 的介值定理即可.

秋季学期期末考试模拟试题(一)答案

一、填空题

1. $\frac{1}{\mathrm{e}}$

解：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln n!-n\ln n]}$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(\ln 1-\ln n)+(\ln 2-\ln n)+\cdots+(\ln n-\ln n)]}$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}]}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln x\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-1}$$

2. $\frac{1}{4a}(\mathrm{e}^{4a\pi-1})$

解：$A=\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{2a\theta}}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4a}(\mathrm{e}^{4a\pi}-1)$.

3. $(-\infty,1]$

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3t^2-3}{3t^2+3}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{36t}{(3t^2+3)^2}\leqslant 0\Rightarrow t\leqslant 0$，所以 $x\in(-\infty,1]$.

4. $1,-\frac{3}{2}$

解：
$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2x}=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln^2x}=-\frac{1}{\ln x}\bigg|_{\mathrm{e}}^{\infty}=1$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-(a+2bx)}{2x\mathrm{e}^{x^4}}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{1-(1+x)(a+2bx)}{2x}=1\Rightarrow a=1$$
$$\lim_{x\to0}\frac{1-(1+x)(1+2bx)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-x-2bx^2-2bx}{2x}=\frac{-1-2b}{2}=1\Rightarrow b=-\frac{3}{2}$$

5. 4

解：$x=1,-2$ 为两条垂直渐近线，$y=\pm1$ 为两条水平渐近线．无斜渐近线．

二、选择题

1. C

解：旋转体的侧面积 $s=\int_0^1 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\pi x^2\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. B

解：$S=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_2^1\left(\frac{1}{x}-x\right)\mathrm{d}x$.

3. B

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\dfrac{\tan x}{x}$ 单调递增，$\dfrac{x}{\tan x}$ 单调递减，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$$

又$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=1$.

4. A

解：
$$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1|f(x)-f(0)|\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1|f'(\xi)|x\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{M}{2}$$

5. B

解：$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$f(b)(b-a)<\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. $f''(x)>0$，曲线下凸，$f(x)\leqslant\dfrac{f(b)+f(a)}{2}$.

故$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)$.

三、计算下列积分

解：1.
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{\pi}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{1}{(\sin t+\cos t)^2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\pi}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{\mathrm{d}(1+\tan t)}{(1+\tan t)^2}$$

$$\left(\tan\frac{\pi}{4}=\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}\Rightarrow\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1\right)$$

因此

$$\text{原式}=\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}-2$$

2.
$$\int\frac{x^5-x}{x^8+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{(x^4-1)}{x^8+1}\mathrm{d}x^2\quad(\text{设 }x^2=t)$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{t^2-1}{t^4+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{t^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2}\xlongequal{u=t+\frac{1}{t}}\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2-2}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\frac{1}{x^2}-\sqrt{2}}{x^2+\frac{1}{x^2}+\sqrt{2}}\right|+C$$

四、解：$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t^2+1}\\ y'(t)e^{y^2}=\dfrac{\cos t}{t^2+1}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{dy}{dt}=\cos t\cdot e^{-y^2}$.

五、解：

$$x\int_0^1 f(xt)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt=2\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)+x^3$$

$$\Rightarrow f'(x)+\frac{2}{x}f(x)=-3x,f(1)=0$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3}{4}(x^{-2}-x^2)$$

六、解：(1) $$V(\xi)=\int_0^\xi \pi(e^{-x})^2dx=-\frac{1}{2}\pi e^{-2\xi}+\frac{1}{2}\pi$$

$$V(a)=-\frac{1}{2}\pi e^{-2a}+\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\pi e^{-2\xi}+\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow a=\frac{1}{2}\ln 2$$

(2) 该点(x_0,e^{-x_0})，则

$$y=e^{-x}\Rightarrow y'=-e^{-x}\Rightarrow k=-e^{-x_0}$$

故切线方程为

$$y-e^{-x_0}=-e^{-x_0}(x-x_0)$$

$x=0$ 时，$y=e^{-x_0}(x_0+1)$.

$y=0$ 时，$x=x_0+1$.

因此 $S=\frac{1}{2}e^{-x_0}(x_0+1)^2$，则

$$S'=-\frac{1}{2}e^{-x_0}(x_0+1)^2+\frac{1}{2}e^{-x_0}\cdot 2(x_0+1)=0\Rightarrow x_0=1$$

$$\begin{cases}x>1\text{ 时},S'<0\\ x<1\text{ 时},S'>0\end{cases}\quad\left(\text{当}\begin{cases}x_0=1\\ y_0=e^{-1}\end{cases}\text{时}\right)$$

$$S_{\max}=\frac{1}{2}e^{-1}\cdot 4=2e^{-1}$$

七、证明：

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi_0)}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

ξ_0 介于$\frac{a+b}{2}$，x 之间.

因 $f''(x)\in C[a,b]$，故有界. 令

$$m=\min f''(x),M=\max f''(x)$$

则有

$$f(x)\leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{M}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$f(x)\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{m}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}M$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}m$$

于是

$$m\leqslant\frac{24}{(b-a)^3}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\leqslant M$$

由介值定理知结论可证.

秋季学期期末考试模拟试题(二)答案

一、填空题

1. $1+y^2=\dfrac{Cx^2}{1+x^2}(C\neq 0)$

解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+y^2}{y(x+x^3)}$$

$$\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{x+x^3}=\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=C$$

$$\ln(1+y^2)(1+x^2)=\ln Cx^2\Rightarrow 1+y^2=\frac{Cx^2}{1+x^2}$$

2. $3\pi a^2$

解：

$$A=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=a^2\left[t-2\sin t+\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi}=3\pi a^2$$

3. $y=x^3-6x^2+9x+2$

解：设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，则

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f'(1)=3+2a+b=0$$

$$f'(3)=27+6a+b=0$$

故 $a=-6,b=9,c=2$，因此 $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$.

4. $\dfrac{2}{\mathrm{e}}-\dfrac{3}{\mathrm{e}^2}$

解：

$$\int_{-1}^{2}x\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=[(x-1)\mathrm{e}^{x}]_{-1}^{0}+[-(1+x)\mathrm{e}^{-x}]_{0}^{2}$$

$$=\frac{2}{\mathrm{e}}-\frac{3}{\mathrm{e}^2}$$

5. $\dfrac{10!}{4!}$

解：$y=x^2\cos x^2=x^2\left(1-\dfrac{x^4}{2!}+\dfrac{x^8}{4!}+o(x^8)\right)$，$\dfrac{y^{(10)}}{10!}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow y^{(10)}=\dfrac{10!}{4!}$.

二、选择题

1. A

解：
$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} \int_0^x f(u)\mathrm{d}u.$$
$$F(x)=\int_0^x xf(x-t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t = x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$
$$F'(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x) > 0$$
$$F''(x)=2f(x)+xf'(x)>0$$

故选 A.

2. C

解：可能的拐点为(3,0) 和(4,0). 显然 y'' 在 $x=3$ 的两侧变号，而在 $x=4$ 的两侧不变号，因此(3,0) 是拐点.

3. C

解：$f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$.

$x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

$x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加.

故 C 正确.

设 $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\dfrac{1}{x}+x^2, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$，则

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}+2x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$$

$f''(0)=2>0$，而 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近无限震荡，此例否定(A)(B)(D).

4. B

解：
$$F(x)=\int_x^{x+2\pi} \mathrm{e}^{\cos t}\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos t}\mathrm{d}\sin t$$
$$=[\mathrm{e}^{\cos t}\sin t]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos t}\sin^2 t\mathrm{d}t>0$$

5. D

解：
$$F(x)=\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3}+x+\dfrac{4}{3}, & x\leqslant 0\\ \sin x+\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{4}{3}, & x>0\end{cases}$$

因 $F'_+(0)=1+\dfrac{\pi}{4}$，$F'_-(0)=1$，故 $F(x)$ 不可微.

点 0 是 $f(x)$ 的第一类间断点，因此 $f(x)$ 可积，故 $F(x)$ 连续.

第一类间断点处无原函数. $F(x)$ 不是 $f(x)$ 的原函数.

三、1. 解：$\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}=0$

故 $\alpha-1<2$，即 $\alpha<3$.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{(1+x^2)\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}$$

故 $2+\alpha-2>1$，即 $\alpha>1$.

因此 $1<\alpha<3$.

2. 解：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\left[\sqrt{n^2-1}+2\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}\frac{i}{n}\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

四、计算

1. 解：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}-\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

2. 解：$\displaystyle\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0(x^2+1)\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{7}{3}-\mathrm{e}^{-1}$

五、解：(1) $\qquad F(t)=\ln(1+t)-t, F'(t)<0$

$$F(t)<F(0)=0\Rightarrow\ln(1+t)<t\Rightarrow\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t$$

(2)
$$0\leqslant u_n\leqslant\int_0^1 t^n|\ln t|\,\mathrm{d}t=-\int_0^1 t^n\ln t\,\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{n+1}\left[t^{n+1}\ln t\Big|_0^1-\int_0^1 t^n\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}\to 0(n\to\infty)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

六、解：切线 $Y-y=y'(X-x)$.

$Y=0$ 时，$X=x-\dfrac{y}{y'}$，故

$$S=\frac{1}{2}(X+x)y=xy-\frac{y^2}{2y'}=4$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{2}{y}x=-\dfrac{8}{y^2}\\ y(2)=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{6}y^2+\frac{8}{3y}$$

七、证明：$|f(x)|$ 在 $[0,1]$ 上连续，设在 $x=x_0$ 时 $|f(x)|$ 取到最大值，由 $f(x)\neq 0$，故

$|f(x_0)|>0$.

由拉格朗日中值定理，得

$$f(x_0)-f(0)=f'(\xi_1)x_0,\xi_1\in(0,x_0)$$
$$f(1)-f(x_0)=f'(\xi_2)(1-x_0),\xi_2\in(x_0,1)$$

则推理

$$\begin{cases}f(x_0)=x_0f'(\xi_1)\\-f(x_0)=f'(\xi_2)(1-x_0)\end{cases}$$

故

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{|f(x_0)|}\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{|f(x_0)|}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$=\frac{1}{|f(x_0)|}|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|=\frac{1}{|f(x_0)|}\left|-\frac{f(x_0)}{1-x_0}-\frac{f(x_0)}{x_0}\right|$$
$$=\frac{1}{x_0(1-x_0)}\geqslant\left|\frac{1}{x_0(1-x_0)}\right|_{x_0=\frac{1}{2}}=4$$

秋季学期期末考试模拟试题(三)答案

一、填空题

1. 1

解：
$$f'(x)=ne^{\frac{x}{n}}-(1+n)$$
$$ne^{\frac{\xi_n}{n}}-(1+n)=0$$
$$\xi_n=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=1$.

2. 3

解：
$$\begin{aligned}\int_0^\pi[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x&=\int_0^\pi[f(x)\sin x+f''(x)\sin x]\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x+\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}f'(x)\\&=\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x+\sin xf'(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\cos x\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x-\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}f(x)\\&=\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x-\cos xf(x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x\\&=f(0)+f(\pi)=f(0)+2=5\end{aligned}$$

因此得 $f(0)=3$.

3. $\int_{x^2}^0\cos t^2\mathrm{d}t-2x^2\cos x^4$

解：
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^0 x\cos t^2\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\int_{x^2}^0\cos t^2\mathrm{d}t=\int_{x^2}^0\cos t^2\mathrm{d}t-2x^2\cos x^4$$

4. $\frac{2}{\sin y}+\cos x+\sin x=Ce^{-x}$

解：方程$(\sin y)'-\sin y=\cos x\sin^2 y$为$n=2$的伯努利方程，令$z=(\sin y)^{-1}$. 由$z'+z=-\cos x$，解得
$$\frac{1}{\sin y}=e^{-\int\mathrm{d}x}(C-\int\cos xe^{\int x\mathrm{d}x})=e^{-x}\left(C-e^x\frac{(\sin x+\cos x)}{2}\right)$$
$$\Rightarrow\frac{2}{\sin y}=Ce^{-x}-(\sin x+\cos x)$$

5. $\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$

解：
$$\int x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}x^2=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

二、选择题

1. C

解：由 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$，得

$$\begin{aligned}F(x+T)&=\int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t-\int_{-x-T}^0 f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{x+T} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x-T} f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+\int_{-x}^{-x-T} f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-T} f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+\int_T^0 f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=F(x)\end{aligned}$$

2. A

解：
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t\xlongequal{x^2-t^2=u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u\right)=xf(x^2)$$

3. C

解：
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x(1-\cos x)}=1\Rightarrow f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1-\cos x)}\cdot\frac{f(x)}{x}=1\Rightarrow f'(0)=0$$

故 0 是驻点.

当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f(x)>0$. 故 0 不是极值点.

4. C

解：$f'(x)=0$ 至少有 $2n$ 个实根，$f''(x)=0$ 至少有 $2n-1$ 个实根，……，$f^{(n)}(x)=0$ 至少有 $n+1$ 个实根.

5. B

解：$0<x<1, y>0; 1<x<2, y<0$. 故

$$A=\int_0^1 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(x-2)\mathrm{d}x$$

三、解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{2+2t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\frac{3}{4(1+t)}$$

$$\Rightarrow \psi''(t)-\frac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t)$$

$$\Rightarrow \psi'(t)=(1+t)(3t+C_1)$$

因相切，故 $\psi(1)=\frac{3}{2e}$，$\psi'(1)=\frac{2}{e}$，因此 $\psi(t)=t^3+\frac{1}{2e}t^2+\left(\frac{1}{e}-3\right)t+2(t>-1)$.

四、解：
$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}(x-\pi)=(x-\pi)f(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(x-\pi)\frac{\sin x}{\pi-x}\mathrm{d}x$$
$$=(x-\pi)f(x)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=2$$

五、解：
$$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=x^2\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t-\int_1^{x^2}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$
$$f'(x)=2x\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	<0	0	>0	0	<0	0	>0
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗

六、解：
$$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y(x)'^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\ln\left|\frac{1}{\cos x}+\tan t\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1)$$

七、解：$y'=\tan\alpha$，则$\begin{cases}y''=\sec^2\alpha\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\sec^2\alpha y'\\ y(0)=0,y'(0)=1\end{cases}$

又 $\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha=1+(y')^2$，则$\begin{cases}y''=[1+(y')^2]y'\\ y(0)=0,y'(0)=1\end{cases}$.

令 $y'=z$，则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1+z^2)z\Rightarrow\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}=Ce^x$.

由 $y'(0)=1$，得

$$C=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{z^2}{1+z^2}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow y'=\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2-\mathrm{e}^{2x}}}\Rightarrow y=\arcsin\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}+C$$

由 $y(0)=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+C=0$，得 $C=-\frac{\pi}{4}$，故 $y=\arcsin\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$.

秋季学期期末考试模拟试题(四)答案

一、填空题

1. 0

解:因为 $g(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}[f(x)+f(-x)]$ 是奇函数,所以

$$\int_{-1}^{1}\ln\frac{2-x}{2+x}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x=0$$

2. 2 或 $\frac{1}{2}$

解:
$$\frac{1}{3}=\int_0^1(x^a-x^{\frac{1}{a}})\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}-\frac{x^{\frac{1}{a}+1}}{1+\frac{1}{a}}\right]_0^1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

或

$$\frac{1}{3}=\int_0^1(x^{\frac{1}{a}}-x^a)\mathrm{d}x\Rightarrow a=2$$

3. $1\ 875\pi\rho g$

解:$w=\int_0^{15}\pi\left(\frac{2}{3}x\right)^2(15-x)\rho g\,\mathrm{d}x=1\ 875\pi\rho g$.

4. 1

解:
$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\bigg|_0^{+\infty}+1$$

5. π^2

解:$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x\sqrt{\cos(1+x^2)}+|x|)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi^2$.

二、选择题

1. C

解:若 $f(x)$ 非负,则 $F'(x)=f(x)\geqslant 0$. 故 C 正确.

D 的反例:$f(x)=1$ 有界,但 $F(x)=x$ 无界.

2. D

解:由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{\frac{1}{3}}}=1$ 得 $f(a)=0$.

当 $x<a$ 时,$f(x)<f(a)$,当 $x>a$ 时,$f(x)>f(a)$,故 $x=a$ 不是极值点.

又因为

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^{\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}(x-a)^{\frac{2}{3}}=1$$

所以$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)}$不存在.

3. C

解:已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$,则 $g(0)=0,g'(0)=0$.

$$f'(x)=-2x^2+\int_0^x g(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} -2x^2+\int_0^x g(u)\mathrm{d}u$$

$$f''(x)=-4x+g(x)$$

$$f''(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{x}=-4$$

$x<0$ 时,$f''(x)>0$,$x>0$ 时,$f''(x)<0$. 故 C 是正确的.

4. B

解:$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}>\cos x$. 设 $f(x)=\cos x-\sin x$,则

$$f'(x)=-\sin x-\cos x<0$$

$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$,$f(x)$ 单调递减,$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$. $f(x)>0$,$\cos x>\sin x$,即 $\sin x<\cos x<\cot x$.

5. D

解:若 $f(x)$ 为以 T 为周期的周期函数,且是奇函数,则

$$F(x+T)=\int_0^{x+T}f(t)\mathrm{d}t=F(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

而$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} \int_0^{-T}-f(-u)\mathrm{d}u=\int_{0+T}^{-T+T}f(u)\mathrm{d}u=\int_T^0 f(u)\mathrm{d}u=-\int_0^T f(u)\mathrm{d}u$,可得 $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$. 故 D 正确.

三、解:
$$\int\frac{3\cos x-\sin x}{\cos x-2\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x-2\sin x}{\cos x-2\sin x}\mathrm{d}x+\int\frac{2\cos x+\sin x}{\cos x-2\sin x}\mathrm{d}x$$
$$=x-\int\frac{\mathrm{d}(\cos x-2\sin x)}{\cos x-2\sin x}=x-\ln|\cos x-2\sin x|+C$$

四、解:
$$\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 y(x)\mathrm{d}(x-1)=(x-1)y(x)\big|_0^1-\int_0^1(x-1)y'(x)\mathrm{d}x$$
$$=-\int_0^1(x-1)\arctan(x-1)^2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$$

五、解:$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}$.

设 $x=\pi-t$,则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1-a\cos t}$$

$$上式=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+a\cos x}+\frac{1}{1-a\cos x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-a^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{2}{\tan^2 x+1-a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

六、解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$. 令$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，则 $t=1$ 或 $t=-1$，于是得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{5}{3}\\ y_1=-\dfrac{1}{3}\end{cases},\begin{cases}x_2=-1\\ y_2=1\end{cases}$$

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{4t}{(t^2+1)^3}$，令 $y''=0$，则 $t=0$，于是得

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

极值：$t=1$ 时，$y''>0$，在点 $x=\dfrac{5}{3}$ 取极小值 $-\dfrac{1}{3}$，$t=-1$ 时，$y''<0$，在点 $x=-1$ 取极大值 1.

拐点$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

下凸区间$\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$.

上凸区间$\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$.

七、证明：设 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F(a)=0,F(b)=f(b)(b-a)$$

由拉格朗日中值定理，得

$$F'(\xi_0)=f(\xi_0)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=f(b)$$

在$[a,\xi_0]$上，由罗尔定理，$\exists\,\xi_1\in(a,\xi_0)$，使得

$$f'(\xi_1)=0$$

在$[\xi_0,b]$上，由罗尔定理，$\exists\,\xi_2\in(\xi_0,b)$，使得

$$f'(\xi_2)=0$$

在$[\xi_1,\xi_2]$上利用罗尔定理得证.

秋季学期期末考试模拟试题(五)答案

一、填空题

1. $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

解：由$\int x^2 f(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+c$，得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=x^2 f(x)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$F(x)=\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin t}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\int\csc^2 t\mathrm{d}t=-\cot t+c=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c$$

因此 $F(1)=0\Rightarrow c=0$.

2. $\dfrac{2}{3}$

解：$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)\geqslant\left[\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}\right]$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+1}}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}\right]=\frac{2}{3}$$

3. $2(1+\ln 2)$

解：$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{y\Delta x}{1+x}+\alpha}{\Delta x}=\frac{y}{1+x}+1$$

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x}\left(c+\int\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x}\right)=(1+x)(c+\ln(1+x))$$

$$y(0)=1\Rightarrow c=1$$

故 $y(1)=2(1+\ln 2)$.

4. $\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+2}\right|+C$

解：$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4x+6}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+2)^2+2}}=\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+2}\right|+C.$$

5. $2t\mathrm{e}^{2t^2}(\sin t^2+\cos t^2)$

解：由 $y=\int_0^t \sin(t-s)^2 ds \xlongequal{t-s=u} \int_0^t \sin u^2 du$，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t^2}{e^{-t^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2t\cos t^2+2t\sin t^2}{e^{-3t^2}}e^{-t^2}=\frac{2t\cos t^2+2t\sin t^2}{e^{-2t^2}}$$

二、选择题

1. D

解：

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx=0$$

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx>0$$

$$P=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx<0$$

所以 $P<M<N$.

2. D

解：

$$\int|x|dx=\begin{cases}\int x dx=\frac{x^2}{2}+c_1\\ \int -x dx=-\frac{x^2}{2}+c_2\end{cases}$$

因为此函数在 $x=0$ 处连续，所以 $c_1=c_2$，于是

$$\int|x|dx=\frac{1}{2}x|x|+c$$

3. A

解：由 $f(x)+2\int_0^x f(t)dt=x^2+\frac{1}{2}$，$f(0)=\frac{1}{2}$，得

$$f'(x)+2f(x)=2x$$

$$f(x)=e^{\int -2dx}(c+\int 2xe^{\int 2dx}dx)$$

$$=e^{-2x}(c+\int 2xe^{2x}dx)$$

$$=e^{-2x}(c+xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x})$$

$$=ce^{-2x}+x-\frac{1}{2}$$

由 $f(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow c=1$，则 $f(x)=e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$，故

$$f'(x)=-2e^{-2x}+1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln 2$$

$$f''(x)=4e^{-2x}>0$$

因此 $f\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)=\frac{1}{2}\ln 2$ 为极小值.

4. B

解：由 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$，则

$$f'(x)=2x\ln(2+x)=0\Rightarrow x=0$$

5. A

解：

$$\int\frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\sin 2x}{1+\frac{1}{2}\sin 2x}\mathrm{d}x$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+c=\ln(2+\sin 2x)+c$$

三、解：

$$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\sqrt{x}=[2\sqrt{x}f(x)]_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}f(x)$$

$$=-2\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=-4\int_0^1\ln(x+1)\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$=-4\ln 2+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x=-4\ln 2+8\int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}x$$

$$=-4\ln 2+8-2\pi$$

四、解：

$$\int_\pi^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_\pi^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]\mathrm{d}x=\int_\pi^{3\pi}f(x-\pi)\mathrm{d}x$$

令 $t=x-\pi$，则

$$\text{上式}=\int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi x\mathrm{d}x+\int_\pi^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\int_\pi^{2\pi}[f(t-\pi)+\sin t]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-2+\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=\pi^2-2$$

五、解：

$$v_x=\int_0^a\pi x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$v_y=\pi a^{\frac{7}{3}}-\int_0^{a^{\frac{1}{3}}}\pi y^6\mathrm{d}y=\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}$$

由 $v_y=10v_x\Rightarrow a=7^{\frac{3}{2}}$.

六、解：在 $\left[-b,\frac{1}{2}b\right]$ 中任取 $[y,y+\mathrm{d}y]$，则

$$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V=\rho S\mathrm{d}y=\rho l x_y\mathrm{d}y=l\rho\ 2\sqrt{a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$m=\int_{-b}^{\frac{1}{2}b}2\rho l\sqrt{a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{2\rho a l}{b}\int_{-b}^{\frac{1}{2}b}\sqrt{b^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2\rho a l}{b}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{3}\right)b^2=2\rho a l b\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{3}\right)$$

七、解：
$$\frac{y(x)}{x}=x^2-\int_1^x\frac{y(t)}{t^2}\mathrm{d}t+\frac{y'(x)}{x} \tag{1}$$

求导得

$$\frac{xy'-y}{x^2}=2x-\frac{y}{x^2}+\frac{xy''-y'}{x^2}$$

$$y''=\frac{x+1}{x}y'-2x^2\quad(x>0)$$

$$\Rightarrow y'=C_1xe^x+2x^2+2x$$

$$\Rightarrow y=C_1(x-1)e^x+\frac{2}{3}x^3+x^2+C_2\quad(x>0)$$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{C_1(x-1)e^x+\frac{2}{3}x^3+x^2+C_2}{x^2}$ 存在 $\Rightarrow C_1=0$.

故 $y=\frac{2}{3}x^3+x^2+C_2\Rightarrow y'=2x^2+2x,y(1)=\frac{5}{3}+C_2,y'(1)=4$.

由式(1)，$y(1)=1+y'(1)$，代入得 $C_2=\frac{10}{3}$，故 $y(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2+\frac{10}{3}$.

公众号 QQ：2842305604

秋季学期期末考试模拟试题(六)答案

一、填空题

1. 2

解：由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-1\Rightarrow f(0)=0,f'(0)=0$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=-1\Rightarrow f''(0)=-2$$

$$k=\frac{|-2|}{(1+0)^{\frac{3}{2}}}=2$$

2. 1

解：设$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=k$，则由$f(x)=x^3\mathrm{e}^{-x^2}+\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，得

$$k=\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+k\int_0^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}[x^2\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{-x^2}]_0^{+\infty}+\frac{k}{\pi}\arctan x\,|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\Rightarrow k=1$$

3. $\sqrt{2}x$

解：设$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\int_0^x f(x)f(x-t)\mathrm{d}t=f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)F(x)=x^3$$

$$F'(x)F(x)=x^3$$

$$\frac{1}{2}(F^2(x))'=x^3\Rightarrow F^2(x)=\frac{x^4}{2}\Rightarrow F(x)=\pm\frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

故$f(x)=\sqrt{2}x$.

4. y^2+1

解：$\int_{-1}^{1}|x-y|\mathrm{d}x\overset{x-y=u}{=\!=\!=}\int_{-1-y}^{1-y}|u|\mathrm{d}u=\int_{-1-y}^{0}-u\mathrm{d}u+\int_0^{1-y}u\mathrm{d}u=1+y^2$

5. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$

解：$y'=\dfrac{1}{x},y''=-\dfrac{1}{x^2}$，则曲率$k(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$，于是

$$k'(x)=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-3x^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$k''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)<0,k\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$最大，故$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$处曲率半径最小.

二、选择题

1. C

解：由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1-\cos x}=-\dfrac{1}{2}$，则

$$f'(0)=f''(0)=0$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{2}$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)=\frac{-1}{2\times 3!}x^3+o(x^3)$$

因为 $f(x)-f(0)$ 在 $x=0$ 的左右两边变号，所以 $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.

又 $$f'(x)=f'(0)+f''(0)x+\frac{f'''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=\frac{-1}{2\times 2!}x^2+o(x^2)$$

而 $f'(x)-f'(0)$ 在 0 的左右两边均小于 0，$f'(x)<f'(0)$，故 $f'(0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值.

2. C

解：
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}, & x<0\end{cases}$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}$$

$f(x)$ 有第一类间断点 $x=0$，因此没有原函数. 其他 3 个函数均为连续函数必有原函数.

3. D

解：因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内除点$\dfrac{1}{2}$是第一类间断点外处处连续，所以 $f(x)$ 可积，其积分上限函数 $\phi(x)$ 连续.

4. B

解：由 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$ 知，当 $x<0$ 时，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 单调增加，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少；当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 单调增加，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加. 故 $f(0)$ 是极小值.

5. B

解：　$\mathrm{d}F=\dfrac{km\mu\mathrm{d}x}{(a-x)^2}$，$F=\displaystyle\int_{-a}^{0}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a-x)^2}\overset{t=-x}{=\!=}\int_0^a\frac{km\mu\mathrm{d}t}{(a+t)^2}=\int_0^a\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a+x)^2}$

三、解：极限为"$\dfrac{0}{0}$"，故 $b=0$，因此

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(a-\cos x)x}{\ln(1+x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=C\Rightarrow a=1,C=\frac{1}{2}$$

四、解：对$\int_1^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}}-8)$两边求导，得

$$g[f(x)]f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow xf'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x}+c$$

当$x=4$时$f(x)=1\Rightarrow c=-1$，所以$f(x)=\sqrt{x}-1$.

五、解：$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2\arctan x}{x-1}-x\right)=\infty$，故$x=1$为垂直渐近线.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2\arctan x}{x(x-1)}-1\right]=-\frac{\pi}{2}-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2\arctan x}{x-1}-x-\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\arctan x+\frac{\pi}{2}x(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x(2\arctan x+\pi)+\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=-\frac{\pi}{2}-1$$

故$y=\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)x-\frac{\pi}{2}-1$为一般渐近线.

同理当$x\to+\infty$时，可得$y=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)x+\frac{\pi}{2}-1$也是曲线渐近线.

六、解：由$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，得切线方程为

$$y-y_0=\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}(x-x_0)$$

$$\begin{cases}y_0=\sqrt[3]{x_0}\\ \int_0^{y_0}[y^3-3x_0^{\frac{2}{3}}(y-y_0)-x_0]\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int_0^{y_0}[y^3-3y_0^2y+2y_0^3]\mathrm{d}y=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y_0=1,x_0=1$$

$$\Rightarrow 切线方程\ x-3y+2=0$$

因此旋转体的体积为

$$V=\pi\int_{-2}^{1}\left[\frac{1}{3}(x+2)\right]^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^1x^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\pi$$

七、解：由$V(t)=\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$，$f(2)=\frac{2}{9}$，知

$$\pi f^2(t)=\frac{2\pi}{3}tf(t)+\frac{\pi t^2}{3}f'(t)\Rightarrow f'(t)+\frac{2}{t}f(t)=\frac{3}{t^2}f^2(t)$$

为伯努利方程.

令 $z(t)=[f(t)]^{-1}$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{t}z-\frac{3}{t^2}$$

$$z(t)=t^2(C+t^{-3})\Rightarrow f(x)=\frac{x}{x^3+1}$$

秋季学期期末考试模拟试题(七)答案

一、填空题

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解：$y'=2x+1 \Rightarrow y'(0)=1 \Rightarrow y''=2$，因此

$$k=\frac{2}{(1+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. $x(\arcsin x-\arccos x)+2\sqrt{1-x^2}+C$

解：

$$\int(\arcsin x-\arccos x)\mathrm{d}x=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-x\arccos x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=x(\arcsin x-\arccos x)+2\sqrt{1-x^2}+C$$

3. 0

解：$\displaystyle\int_{-1}^{1}x[\cos x+\mathrm{e}^{x^2}\cos\sqrt{x^2+2}]\mathrm{d}x \xlongequal{\text{奇函数在对称区间上积分}} 0.$

4. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{1^2+2^2+\cdots+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{6}\,\frac{n}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}\,\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$

因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{6}\,\frac{n}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}}\,\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\,\frac{2}{3}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

5. $-2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}+2$

解：对$\displaystyle\int_0^x xy\,\mathrm{d}x=x^2+y$求导，得 $xy=2x+y'$，则

$$y=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left(c-2\int x\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\right)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(c-2\int x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(c+2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)=c\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}+2$$

由 $y(0)=0 \Rightarrow c=-2$，故 $y=2(1-\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}})$.

二、选择题

1. A

解：
$$\int_x^{x-f(x)} xg(t-x)\mathrm{d}t = x\int_x^{x-f(x)} g(t-x)\mathrm{d}t = x\int_0^{-f(x)} g(u)\mathrm{d}u$$

$$\left(x\int_0^{-f(x)} g(u)\mathrm{d}u\right)' = \int_0^{-f(x)} g(u)\mathrm{d}u - xf'(x)g[-f(x)]$$

$$= \int_0^{-f(x)} g(u)\mathrm{d}u - xf'(x)g[-f(x)]$$

$$= \int_0^{-f(x)} g(u)\mathrm{d}u + x^2 f'(x)$$

2. A

解：因为 $x \in (0,1)$，所以 $\sin x \leqslant x, \sin x^n \leqslant x^n$.

设 $f(x) = \sin^n x - \sin x^n$，则

$$f'(x) = n\sin^{n-1} x\cos x - nx^{n-1}\cos x^n \leqslant 0$$

由 $f(0)=0$，$f(x)$ 单调减少，所以 $f(x)<0$.

于是 $I > N > M$.

3. C

解：
$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})^2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$\xlongequal{\frac{1}{x}=t} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^t) + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^t)$$

$$= \left[-\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\right]_{-\infty}^{-1} + \left[-\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\right]_{1}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{1+\mathrm{e}} - \frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}} + 1$$

4. A

解：

$$\int \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x(1+x)}\mathrm{d}x = -\int \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right) + c$$

5. C

解：
$$F(x) = \int_0^x (x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t = x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t$$

$$F'(x) = 2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^k} = \lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^{k-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}} = c(\text{不为零}) \Rightarrow k=3$$

三、解:1.
$$\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)}dx=\int \frac{e^x(1+x)}{xe^x(1+xe^x)}dx$$

设 $1+e^x x=t$,则 $(1+e^x x)'=e^x(x+1)$,故

$$\text{上式}=\int \frac{1}{t(t-1)}dt=\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C$$

2. 令 $\sqrt{x}=t$,则

$$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx=\int_0^{\pi}2t^2\cos t dt=2t^2\sin t\,\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}t\cos t dt=-4\pi$$

四、解:(1)
$$V(t)=\int_0^t \pi\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx=\frac{\pi}{8}(e^{2t}-e^{-2t}+4t)$$

$$S(t)=2\pi\int_0^t \frac{e^x+e^{-x}}{2}\sqrt{1+\left[\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'\right]^2}dx=\frac{\pi}{4}(e^{2t}-e^{-2t}+4t)$$

因此 $\dfrac{S(t)}{V(t)}=2$.

(2) $F(t)=\pi\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2$,则

$$\lim\frac{S(t)}{F(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{2t}+e^{-2t}+4t}{e^{2t}+e^{-2t}+2}=1$$

五、解:定义域为 $x>0$.

(1) $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

因此 $\min f(x)=f(1)=1$.

(2) 由(1)知,$1\leqslant \ln x_n+\dfrac{1}{x_n}$. 于是

$$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1\leqslant \ln x_n+\frac{1}{x_n}\Rightarrow \frac{1}{x_{n+1}}<\frac{1}{x_n}\Rightarrow x_n<x_{n+1}$$

故 $\{x_n\}$ 单调递增有上界,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设极限为 A,则

$$\ln A+\frac{1}{A}\leqslant 1\leqslant \ln A+\frac{1}{A}\Rightarrow A=1$$

六、解:
$$F'(t)=\frac{1}{\left[\int_0^t f(x^2)x dx\right]^2}\left\{tf(t^2)\left[t\int_0^t f(x^2)x dx-\int_0^t f(x^2)\cdot x^2 dx\right]\right\}$$

令 $G(t)=t\int_0^t f(x^2)x dx-\int_0^t f(x^2)x^2 dx$,则

$$G'(t)=\int_0^t f(x^2)x dx>0\Rightarrow G(t)>G(0)=0\Rightarrow F'(t)>0$$

因此 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

七、证明:设 $F(x)=e^{-x}\int_0^x xf(x)dx$,则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理的条件,由罗尔定理可证得.

秋季学期期末考试模拟试题(八)答案

一、填空题

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_x^{x+1}\dfrac{dt}{\sqrt{t+\sin t+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\xi_x+\sin\xi_x+x}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\quad(x\leqslant\xi_x\leqslant x+1)$

2. $\dfrac{1}{2}$

解：

$$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)dt=x^2\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x t^2 f'(t)dt$$

$$F'(x)=2x\int_0^x f'(t)dt+x^2f'(x)-x^2f'(x)=2x\int_0^x f'(t)dt$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x\int_0^x f'(t)dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2(f(x)-f(0))}{x}=2f'(0)=1\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$$

3. $\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right)$

解：因 $y=x^3-5x^2+3x+5$，则

$$y'=3x^2-10x$$

$$y''=6x-10=0\Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

由 $x\in\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right)$，$y''<0$，因此上凸区间为$\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right)$.

4. $\sqrt{4-x^2}-\pi$

解：

$$k=\int_0^2 f(x)dx$$

$$k=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx+k\int_0^2 dx\xlongequal{x=2\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t\,dt+2k=\pi+2k$$

得 $k=-\pi$，所以 $f(x)=\sqrt{4-x^2}-\pi$.

5. e^{-2x}

解：由 $\int_0^x\ln f(t)dt=x^2(1+f'(0))$ 可得

$$\ln f(x)=2x(1+f'(0))$$

$$f(x)=e^{2x(1+f'(0))}$$

$$f'(x)=2(1+f'(0))e^{2x(1+f'(0))}$$

$x=0\Rightarrow f'(0)=-2$，故 $f(x)=e^{-2x}$.

二、选择题

1. D

解：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{\sin x}=1$ 时，$f''(0)=0$. 当 $x<0$ 时，$f''(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$. 所以 $(0, f(0))$ 是拐点.

2. C

解：由 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)$ 可得 $x=0$ 为垂直渐近线，$y=0$ 为水平渐近线.

因为

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}\right)=-1$$

所以有一条斜渐近线.

3. C

解：$f(1)-f(0)=1$，则

$$I=\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x)^2=f(1)-f(0)=1$$

4. A

解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3}{2}\;\frac{1+t^2}{t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{2}\;\frac{t^2-1}{t^2}<0\Rightarrow 0<t<1$$

因此 $x\in(0,1)$ 时曲线上凸.

5. A

解：

$$w=\int_0^s\mu g\left(M-\frac{x}{v_0}m\right)\mathrm{d}x=\mu gs\left(M-\frac{sm}{2v_0}\right)$$

三、解：1.

$$\int_{-\infty}^0\frac{xe^x}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令}\sqrt{e^x+1}=t}2\int_1^{\sqrt{2}}\ln(t^2-1)\mathrm{d}t$$

$$=4-4\sqrt{2}+2\left[\ln\frac{(t^2-1)^t(t+1)}{t-1}\right]\Bigg|_1^{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{(t^2-1)^t(t+1)}{t-1}=\lim_{t\to 1}(t-1)^{t-1}(t+1)^{t+1}=\lim_{t\to 1}e^{(t-1)\ln(t-1)}\cdot 4=4$$

因此 $$\int_{-\infty}^0\frac{xe^x}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{d}x=4-4\sqrt{2}-4\ln(\sqrt{2}-1)-4\ln 2$$

2. $$\int\frac{1}{\sin^3x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}\cot x=-\frac{\cos x}{\sin^2x}+\int\cot x\left(-\frac{\cos x}{\sin^2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^2x}+\int\frac{\sin^2x-1}{\sin^3x}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{\sin^3x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\;\frac{\cos x}{\sin^2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\sin x}-\cot x\right|+C$$

四、解：$\begin{cases}y=2x-x^2\\ y=kx\end{cases}\Rightarrow x=0,x=2-k.$

当 $x=2-k$ 时，$y=k(2-k)$，故

$$S_{D_2}=\int_0^{k(2-k)}\left[\left(\sqrt{1-y}+1-\frac{y}{k}\right)\right]\mathrm{d}y=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}(2-k)^3$$

$$S_{D_1+D_2}=\int_0^2(2x-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$$

$$S_{D_1}=S_{D_1+D_2}-S_{D_2}=\frac{1}{6}(2-k)^3$$

由 $S_1:S_2=1:7$，得 $k=1$，因此

$$\text{周长}=\sqrt{2}+\int_0^1\sqrt{1+[(2x-x^2)']^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{4}\ln(\sqrt{5}+2)+\sqrt{2}$$

$$\text{体积}=\pi\int_0^1[y^2-(1-\sqrt{1-y})^2]\mathrm{d}y=\frac{\pi}{6}$$

五、证明：在 $[0,1]$ 上，利用罗尔定理，$\exists\xi_1\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)=0$.

由积分中值定理，知

$$2\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)\mathrm{d}x=f(\xi_2),\xi_2\in\left(1,\frac{3}{2}\right).$$

在 $[\xi_2,2]$ 上由罗尔定理，$\exists\xi_3\in(\xi_2,2)$，使得 $f'(\xi_3)=0$.

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上由罗尔定理，$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,2)$，使得 $f''(\xi)=0$.

六、解：$y'=\dfrac{2}{x}y-1\Rightarrow y=Cx^2+x$，则

$$V=\pi\int_1^2y^2(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_1^2(Cx^4+x^3)\mathrm{d}x$$

令 $V'(C)=0$，则得 $C=\dfrac{-75}{124}$. $V''(C)>0$，故 $y=x-\dfrac{75}{124}x^2$.

七、证明：在 $(0,1)$ 上，$\exists\xi_1\in(0,x)$，使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi_1)x$$

在 $(1,2)$ 上，$\exists\xi_2\in(x,2)$，使得

$$f(x)-f(2)=f'(\xi_2)(x-2)$$

因此

$$\begin{cases}(0,1)\text{ 上},f(x)=1+f'(\xi_1)x\geqslant 1-x\\(1,2)\text{ 上},f(x)=1+f'(\xi_2)(x-2)\geqslant x-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int_0^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2f(x)\mathrm{d}x$$

$$>\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=1$$

HIT阅读与思考

扫一扫二维码，加入群聊。