2022~2023 学 年 秋 季 学 期

微积分 A 期末第一次模拟考

2023.1.13

【此卷满分 50 分，考试时间 120 分钟】

一，填空题（每小题 2 分，共四小题，满分 8 分）

1，摆线$\begin{cases} x=1-cost \\ y=t-sint \end{cases}$一拱$(0\le t\le 2\pi)$的弧长为___.

2，$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+18}=$___.

3，求$\frac{d}{dx}\int_0^x uf(u^2-x^2)du=$___.

4，微分方程$y''=1+y'^2$满足初值条件$y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=0$的特解是___.

二，选择题（每小题 2 分，共四小题，满分 8 分）

1，设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-(ax+bx^2)}{2x^2}=3$,则____.

(A) a=1,b=$-\frac{13}{2}$　(B) a=0,b=$-\frac{7}{2}$　(C) a=1,b=$-\frac{7}{2}$　(D)a=0,b=$-\frac{13}{2}$

2，曲线$y=\mathrm{e}^{\mathrm{x}}+\mathrm{x}$在(0,1)处的曲率半径等于____.

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$　(B)$\frac{1}{3\sqrt{3}}$　(C) $3\sqrt{3}$　(D)$\sqrt{3}$

3，已知函数$y=f(x)$对一切 x 满足$\mathrm{x}f''(x)+(x+x^2)[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，若$f'(x_0)=0(x_0\ne 0)$，则___.

(A) $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点
(B) $f(x_0)$是$f(x)$的极小值
(C) $f(x_0)$是$f(x)$的极大值
(D) $f(x_0)$不是$f(x)$的极值，$(x_0,f(x_0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点

1. 4，设$\mathrm{f(x)}=\begin{cases} 1，x>0 \\ 0，x=0 \\ -1，x<0 \end{cases}$，$\mathrm{F(x)}=\int_0^{\mathrm{x}}\mathrm{f(t)dt}$，则___.

(A) F(x)在 x=0 点不连续
(B) F(x)在$(-\infty,+\infty)$内连续，在 x=0 点不可导
(C) F(x)在$(-\infty,+\infty)$可导，且满足$F'(x)$=f(x)
(D) F(x)在$(-\infty,+\infty)$可导，但不一定满足$F'(x)$=f(x)

三，计算题（每题 3 分，共 4 题，满分 12 分）

1，计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} e^{2t}dt}{cos(2x)arcsinx^2}$

2，求不定积分$\int(arcsinx)^2dx$

3，计算定积分$\int_{-2}^{2}\frac{x(e^x+e^{-x}+2x)}{2+\sqrt{4-x^2}}dx$

4，解微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2+4cosy}{y^2-6xy+4xsiny}$

四，（6 分）

（1），设 D1 是由抛物线$y=2x^2$和直线 x=a，x=2 及 y=0 所围成的平面区域；D2 是由抛物线$y=2x^2$和直线 y=0，x=a 所围成的平面区域，其中 0<a,2.

(1)试求 D1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V1；D2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V2；

(2)问当 a 为何值时，V1+V2 取得最大值？试求此最大值.

（2），一质量为 M，长为 d 的均匀杆 AB 吸引着质量为 m 的一质点 C，此质点 C 位于 AB 杆的延长线上，C 距离 B 更近，试求质点在杆的延长线上从距离 A 点 r_1 处移动至 r_2 处克服吸引力所做的功.(注：r_1>d,r_2>d)

五， （7 分）设$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx \quad (n=0,1,2\dots\dots)$

(1) 证明：数列a_n单调减少，且$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\dots\dots)$；

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

六，（5 分）设函数$f(x)$连续且一阶可导，且满足$\int_0^x xf(x-t)dt=\frac{x^4}{3}$，求函数$f(x)$及其极值

七，（4 分）设函数$f(x)$在区间[a,b]上有二阶导数，且$f''(x)\geq 0$；$x=\varphi(t)$是区间[α，β]上任意一个值域的连续函数。证明：$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,dt\geq f\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt\right)$