微积分 A 期末试题 第一次模拟考答案

一，填空题（每小题 2 分，共四小题，满分 8 分）

1，摆线$\begin{cases} x = 1 - cost \\ y = t - sint \end{cases}$一拱$(0 \le t \le 2\pi)$的弧长为___.

答案：8

解：$\frac{dx}{dt} = \mathrm{sint}, \frac{dy}{dt} = 1 - \mathrm{cost}$所以

$$\mathrm{ds} = \sqrt{(\mathrm{sint})^2 + (1 - \mathrm{cost})^2}\mathrm{dt} = 2\mathrm{sin}\frac{\mathrm{t}}{2}\mathrm{dt}\ (0 \le t \le 2\pi)$$

从而$\mathrm{s} = \int_0^{2\pi} 2\mathrm{sin}\frac{\mathrm{t}}{2}\mathrm{dt} = 8$

2，$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+18} =$___.

答案：$\frac{\pi}{12}$（将分母配成$(x+3)^2+9$形式，积分得$\frac{1}{3}arctan\frac{x+3}{3}$）

3，求$\frac{d}{dx}\int_0^x uf(u^2 - x^2)du =$___.

答案：$xf(-x^2)$（作换元$\mathrm{t} = u^2 - x^2$）

4，微分方程$y'' = 1 + y'^2$满足初值条件$y|_{\mathrm{x=0}} = 1, y'|_{\mathrm{x=0}} = 0$的特解是___.

答案：$\mathrm{y} = -\mathrm{ln}|\mathrm{cosx}| + 1$（令$y'$=$p$,$y''$=$p'$即可）

二，选择题（每小题 2 分，共四小题，满分 8 分）

1，设$\lim\limits_{x \to 0}\frac{ln(1+x)-(ax+bx^2)}{2x^2} = 3$,则____.

(A) a=1,b=$-\frac{13}{2}$　(B) a=0,b=$-\frac{7}{2}$　(C) a=1,b=$-\frac{7}{2}$　(D)a=0,b=$-\frac{13}{2}$

答案：A (利用泰勒公式展开即可)

2，曲线 y= $\mathrm{e^x} + \mathrm{x}$在(0,1)处的曲率半径等于____.

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$　(B)$\frac{1}{3\sqrt{3}}$　(C) $3\sqrt{3}$　(D)$\sqrt{3}$

答案：C

3，已知函数$y = f(x)$对一切 x 满足x$f''(x) + (x + x^2)[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$，若$f'(x_0)$=0($x_0 \ne$

0)，则___.

(A) $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

(B) $f(x_0)$是$f(x)$的极小值

(C) $f(x_0)$是$f(x)$的极大值

(D) $f(x_0)$不是$f(x)$的极值，$(x_0,f(x_0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点

答案：B

解：令$x=x_0$，有$f''(x_0)=\frac{1-\mathrm{e}^{-x_0}}{x_0}>0$，所以$f(x_0)$是$f(x)$的极小值

4，设$\mathrm{f(x)}=\begin{cases}1，x>0\\0，x=0\\-1，x<0\end{cases}$，$\mathrm{F(x)}=\int_0^{\mathrm{x}}\mathrm{f(t)dt}$，则___.

(A) $\mathrm{F(x)}$在 x=0 点不连续

(B) $\mathrm{F(x)}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，在 x=0 点不可导

(C) $\mathrm{F(x)}$在$(-\infty,+\infty)$可导，且满足$F'(x)$=f(x)

(D) $\mathrm{F(x)}$在$(-\infty,+\infty)$可导，但不一定满足$F'(x)$=f(x)

解：易求得$\mathrm{F(x)}$=|x|，故选择 B

三， **计算题**（每题 3 分，共 4 题，满分 12 分）

1， 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}e^{2t}dt}{cos(2x)arcsinx^2}$

原式=$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}e^{2t}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xe^{2x^2}}{2x}=1$

2， 求不定积分$\int(arcsinx)^2dx$

原式=$x(arcsinx)^2-\int arcsinx\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

=$x(arcsinx)^2+\int arcsinx\,d2\sqrt{1-x^2}$

= $x(arcsinx)^2+2\sqrt{1-x^2}arcsinx-2x+C$

3， 计算定积分$\int_{-2}^{2}\frac{x(e^x+e^{-x}+2x)}{2+\sqrt{4-x^2}}dx$

原式=$\int_{-2}^{2}\frac{x(e^x+e^{-x})}{2+\sqrt{4-x^2}}dx+\int_{-2}^{2}\frac{2x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}dx$

=$4\int_0^2\frac{x^2}{2+\sqrt{4-x^2}}dx$

=$16-4\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=16-4\pi$

4,　　解微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2+4cosy}{y^2-6xy+4xsiny}$

解：整理可得$\frac{dx}{dy}+x\frac{6y-4siny}{3y^2+4cosy}=\frac{y^2}{3y^2+4cosy}$

由一阶非齐次线性方程通解公式得

$$x=e^{-\int\frac{6y-4siny}{3y^2+4cosy}dy}\left(\int\frac{y^2}{3y^2+4cosy}e^{\int\frac{6y-4siny}{3y^2+4cosy}dy}dy+C\right)$$

即$x=\frac{C+\frac{y^3}{3}}{3y^2+4cosy}$

四，　（1），设 D1 是由抛物线$y=2x^2$和直线 x=a，x=2 及 y=0 所围成的平面区域；D2 是由抛物线$y=2x^2$和直线 y=0，x=a 所围成的平面区域，其中 0<a,2.

(1)试求 D1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V1; D2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V2;

(2)问当 a 为何值时，V1+V2 取得最大值？试求此最大值.

（2），一质量为 M，长为 d 的均匀杆 AB 吸引着质量为 m 的一质点 C，此质点 C 位于 AB 杆的延长线上，C 距离 B 更近，试求质点在杆的延长线上从距离 A 点 r_1 处移动至 r_2 处克服吸引力所做的功.(注：r_1>d,r_2>d)

（6 分）

1. 解:

(1) V1= $\pi\int_a^2(2x^2)^2dx=\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$;

V2= $\pi a^2\cdot 2a^2$-$\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}dy=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4$.

(2) 设 V=V1+V2= $\frac{4\pi}{5}(32-a^5)$+πa^4. 由

$V'=4\pi a^3(1-a)$ =0,

得区间(0,2)内的唯一驻点 a=1.

当 0<a<1 时，V'>0;当 1<a<2 时，V'<0.

因此 a=1 是极大值点即最大值点.此时 V1+V2 取得最大值，等于$\frac{129}{5}\pi$.

2. 解：根据万有引力定律，当 C 距离 A 点 r(r>d)时，

AB 杆与质点 C 间的相互吸引力 F=$\frac{kmM}{d}\int_0^d\frac{dx}{(d+r-x)^2}=\frac{kmM}{r(r+d)}$

所以

$$W=\int_{r_1}^{r_2}\frac{kmM}{r(r+d)}dr=\frac{kmM}{d}\ln\frac{r_2(r_1+d)}{r_1(r_2+d)}.$$

五，（7 分）设$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx \quad (n=0,1,2\ldots\ldots)$

(1) 证明：数列a_n单调减少，且$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$（$n=2,3,\ldots\ldots$）；

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

(1)证：做代换$x=sint$可得：t∈（0，$\frac{\pi}{2}$）时，$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n tcos^2 tdt$，

由于$sin^n t>sin^{n+1}t$可知数列a_n单调减少，由分部积分可得：

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n tcos^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{n-1}tcos^2 td(-cost)\\&=[-sin^{n-1}tcos^3 t]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}costd(sin^{n-1}tcos^2 t)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cost[(n-1)sin^{n-2}tcos^3 t-2sin^n tcost]dt\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{n-2}tcos^4 tdt-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^n tcos^2 tdt\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{n-2}tcos^2 t(1-sin^2 t)dt-2a_n\\&=(n-1)a_{n-2}-(n+1)a_n\end{aligned}$$

则有$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$（$n=2,3,\ldots\ldots$）

（2）由a_n单调递减，$\frac{n-1}{n+2}=\frac{a_n}{a_{n-2}}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<1$，又$\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2}=1$，由夹逼准则可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$

六，（5 分）设函数$f(x)$连续且一阶可导，且满足$\int_0^x xf(x-t)dt=\frac{x^4}{3}$，求函数$f(x)$及其极值

解：由题，对上式求两次导可得$2f(x)+xf'(x)=4x^2$

$\therefore x=0$时，$f(x)=0$；$x\neq 0$时，有$y'+\frac{2}{x}y=4x$

由一阶非齐次线性方程通解公式可知$y=x^2+\frac{C}{x^2}\quad(x\neq 0)$，又$\because f(x)$连续且一阶可导$\therefore C=0$

对$f(x)=x^2\quad(x\neq 0)$有$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，$\therefore f(x)=x^2$，有极小值0，在$x=0$时取到

七，（4 分）设函数$f(x)$在区间[a,b]上有二阶导数，且$f''(x)\geq 0$；$x=\varphi(t)$是区间

[α，β]上任意一个值域的连续函数。证明：$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\,dt \geq f\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)dt\right)$

证：记$x_0=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)dt$，$x_0\in[a，b]$

由泰勒公式及$f''(x)\geq 0$可知$f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，$x\in[a，b]$

代入$x=\varphi(t)$可知 $f\big(\varphi(t)\big)\geq f(x_0)+f'(x_0)(\varphi(t)-x_0)$，$t\in[\alpha，\beta]$,

两侧同时积分$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)dt \geq f(x_0)(\beta-\alpha)+f'(x_0)\left[\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)dt-x_0(\beta-\alpha)\right]=f(x_0)(\beta-\alpha)$，即所证，证毕