

2022~2023 学 年 秋 季 学 期
微积分 A 期末第二次模拟考

2023. 2. 9

【此卷满分 50 分，考试时间 120 分钟】

一，填空题（每小题 2 分，共四小题，满分 8 分）

1. 函数 $y = \ln x$ 的最小曲率半径为__.2. 求曲线 $r = a\theta$ ($a > 0$) 在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 一段的弧长__.3. $d[\int_0^x x \cos t^4 dt] =$ __.4. 求方程 $x dy - [y + xy^3(1 + \ln x)] dx = 0$ 的通解 __.

二，选择题（每小题 2 分，共四小题，满分 8 分）

1. 设 $\ln \cos x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4)$, 则__.

(A) $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = 0, a_4 = -\frac{1}{24}$

(B) $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = 0, a_4 = -\frac{1}{12}$

(C) $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -\frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{4}, a_4 = -\frac{1}{24}$

(D) $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -1, a_3 = -\frac{1}{4}, a_4 = -\frac{1}{12}$

2. $\int_{-1}^1 (1 + e^{\frac{1}{x}})^{-2} e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} dx$ 的值为__.

(A) $\frac{1-e}{1+e}$

(B) $\frac{1-e}{1+e} + 1$

(C) 0

(D) 以上均不对

3. 下列反常积分中，发散的是__.

(A) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$

(B) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

(C) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 1}{x} dx$

(D) $\int_1^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$

4. x 轴上有一线密度为常数 μ 、长度为 l 的细杆,有一质量为 m 的质点到杆的右端(位于 x 轴原点处)的距离为 a ,已知引力系数为 k ,则质点和细杆之间的引力大小为_____.

- (A) $\int_{-l}^0 \frac{k\mu dx}{(a-x)^2}$ (B) $\int_0^l \frac{k\mu dx}{(a-x)^2}$
 (B) $\int_{-\frac{l}{2}}^0 \frac{k\mu dx}{(a+x)^2}$ (D) $2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{k\mu dx}{(a-x)^2}$

三.计算题 (每题 2 分, 共 4 题, 满分 8 分)

1. 计算定积分 $\int_0^4 x\sqrt{4x-x^2} dx$

2. 求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x} dx$

3. 计算定积分 $\int_0^{2\pi} x\cos^8 x dx$

4. 设函数为 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt$, 求 $\int_0^\pi f(x) dx$

四. (4 分)

(1) 证明对于任意 $x > 0$, 有 $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x$

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \right]$

五. (6 分)

(1) 设曲线 $\Gamma_n: y = e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x}$, $x \in [(2n-2)\pi, (2n-1)\pi]$, 其中 n 为固定的正整数, Γ_n 与 x 轴所围成的区域绕 x 轴旋转一周而形成的旋转体体积为 V_n . 求 V_n 的值

(2) 把质量为 M 的冰块沿地面匀速推过距离 s , 速度是 v_0 , 冰块的质量在每单位时间减少 m , 设摩擦系数为 μ , 问在整个过程中克服摩擦力做了多少功

六 (7 分) 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

七. (5 分) 给定方程 $e^x + x^{2n+1} = 0$, 其中 n 为自然数

(1) 证明: 方程 $e^x + x^{2n+1} = 0$ 的解 x_n 是唯一的

(2) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限值

八. (4 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上有二阶连续导数, 且 $f(0) = 0$

试证明: 至少存在一点 $\mu \in [-a, a]$, 使 $a^3 f''(\mu) = 3 \int_{-a}^a f(x) dx$