一、1. $\dfrac{1}{2}$； 2. $y-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}(x-1)$； 3. $-\dfrac{\sin x+ye^{xy}}{2y+xe^{xy}}$； 4. $-\pi dx$ 或 $-\pi\Delta x$； 5. 6050

二、1. (B); 2. (B); 3. (C); 4. (A); 5. (B)

三、解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t}{1+e^t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{(-\sin t)(1+e^t)-(\cos t)(e^t)}{(1+e^t)^2}}{1+e^t}=-\frac{\sin t+e^t\sin t+e^t\cos t}{(1+e^t)^3}$$

四、解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2-2\cos x}(e^{x^2-2+2\cos x}-1)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}e^{2-2\cos x}\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{12x}=\frac{1}{12}$$

五、解： $x=-1$是分段点，当$x>-1$时，$x=0, x=1$是间断点，当$x<-1$时，$x=-2$是间断点。

因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{(\ln|x|)(\sin x)}{(x+1)|x-1|}=-\frac{\sin1}{2}\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x}{x-1}=-\frac{\sin1}{2}\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{x}}{1}=-\frac{\sin1}{2}$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{(\ln|x|)(\sin x)}{(x+1)|x-1|}=\frac{\sin1}{2}\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{\sin1}{2}\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{\sin1}{2}$$

所以$x=1$是跳跃间断点。

因为

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{(\ln|x|)(\sin x)}{(x+1)|x-1|}=\lim_{x\to0}\sin x\ln|x|=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0}x=0$$

所以$x=0$是可去间断点。

因为

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{e^{\frac{x+2}{x+1}}-1}=-1$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{(\ln|x|)(\sin x)}{(x+1)|x-1|}=-\frac{\sin 1}{2}\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(-x)}{x+1}=-\frac{\sin 1}{2}\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=-\frac{\sin 1}{2}$$

所以 $x=-1$ 是跳跃间断点。

因为

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{1}{e^{\frac{x+2}{x+1}}-1}=\infty$$

所以 $x=-2$ 是第二类间断点（或无穷间断点）。

由初等函数的连续性知， $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-2),(-2,-1),(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$ 内连续。

六、解：

（1）当 $x\neq 0$ 时，求导得

$$f'(x)=\frac{(g'(x)+e^{-x})x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}$$

当 $x=0$ 时，由导数定义得

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)-e^{-x}}{x}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}$$

（2）因为

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(g'(x)+e^{-x})x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(g''(x)-e^{-x})x+(g'(x)++e^{-x})-(g'(x)++e^{-x})}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，又当 $x\neq 0$ 时 $f'(x)$ 连续，故 $f'(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

七、证：

（1）由 $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$ 知，$f(0)=0$，且存在 $0<x_1<1$ 使得 $f(x_1)<0$。对 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,1]$ 上应用零点存在定理，存在 $\xi\in(x_1,1)\subset(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$，即方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个实根。

（2）对 $f(x)$ 在闭区间 $[0,\xi]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi_1 \in (0,\xi)$ 使得 $f'(\xi_1)=0$。

设 $F(x)=f(x)f'(x)$，则 $F'(x)=f(x)f''(x)+(f'(x))^2$，对 $F(x)$ 在区间 $[0,\xi_1]$ 和 $[\xi_1,\xi]$ 上分别应用罗尔定理，存在 $\eta_1 \in (0,\xi_1)$，$\eta_2 \in (\xi_1,\xi)$ 使得

$$F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0$$

即方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在 $(0,1)$ 内至少存在两个实根。