哈尔滨工业大学（深圳）2017 学年秋季学期

高等数学 A 试题参考答案

一、填空题(每题 2 分，满分 8 分)

1．2 2．$-\frac{1}{2}e^{2\cos x}$ 3．$\frac{\pi^2}{4}$ 4．$e-1$

提示：

1．$y' = 2x-6, y'' = 2, K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1} = 2$.

2．原积分 $= -\frac{1}{2}\int e^{2\cos x}d(2\cos x) = -\frac{1}{2}e^{2\cos x} + C$.

3．$y = \frac{(\sin x)^{99}}{\sqrt{1+x^6}}$ 为奇函数，原积分 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |x| dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx = \frac{\pi^2}{4}$.

4．原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{i}{n}} = \int_0^1 e^x dx = e-1$.

二、选择题(每题 2 分，满分 8 分)

1.（A） 2.（D） 3.（B） 4.（B）

提示：

1．$(0,\frac{\pi}{4})$上，$\cot x > \cos x > \sin x$，由于 $y = ln\ x$单调递增，

则 $ln\cot x > ln\cos x > ln\sin x$，由定积分保序性质可知$A$正确。

2．运用弧微分公式，$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \sqrt{9t^4+9t^2}dt = 3t\sqrt{t^2+1}dt$

$s = \int_0^1 3t\sqrt{t^2+1}dt = \frac{3}{2}\int_0^1\sqrt{t^2+1}dt^2 = \frac{3}{2}\int_0^1\sqrt{u+1}du = \frac{3}{2}\times\frac{2}{3}(u+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = 2\sqrt{2}-1$.

3．两边求导得 $f'(x) = 2f(x)$, 即 $\frac{dy}{dx} = 2y$, 得 $\frac{dy}{2y} = dx$，两边积分有 $\frac{ln\ y}{2} = x + C$，

则$y = e^{2x+2C}$，由题设$x = 0$时$y = ln\ 2$，代入上式得$e^{2C} = ln\ 2$, 则$f(x) = e^{2x}e^{2C} = e^{2x}\ ln\ 2$.

4．功微元 $dW = Fdx$，而每个微小位移上施加的力 F 等于在水面上方的物体的重力。

提升了 $x(x\in(0,4))$ 高度时，在水面上方的物体体积 $V=\int_{4-x}^{4}[20+3(4-h)^2]dh$

$=\int_0^x(20+3h^2)dh=(20h+h^3)\big|_0^x=20x+x^3$

功微元 $dW=\rho gVdx=10^4(20x+x^3)dx$

功 $W=10^4\int_0^4(20x+x^3)dx=10^4(10x^2+\frac{1}{4}x^4)\big|_0^4=2240000(J)$

三、(6 分)

解：（1）该函数在定义区间上可导。函数定义域为 $(1,+\infty)\cup(-\infty,1)$

由 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$，可知 $x=1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点。

$$f'(x)=\frac{2(x-3)4(x-1)-(x-3)^2(x+1)}{16(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}$$

则 $x>3$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；$1<x<3$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

则 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；$-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(3,+\infty),(-\infty,-1)$，单调减区间为 $(-1,1)$ 和 $(1,3)$，

在 $x=-1$ 处取得极大值，$f(-1)=2$，在 $x=3$ 处取得极小值，$f(3)=0$.

（2）$f''(x)=\dfrac{4(2x-2)(x-1)^2-8(x-1)(x^2-2x-3)}{16(x-1)^4}=\dfrac{2}{(x-1)^3}$

可知 $x>1$ 时 $f''(x)>0$，$f(x)$ 的图像是向上凹的；$x<1$ 时 $f''(x)<0$，$f(x)$ 的图像是向上凸的。

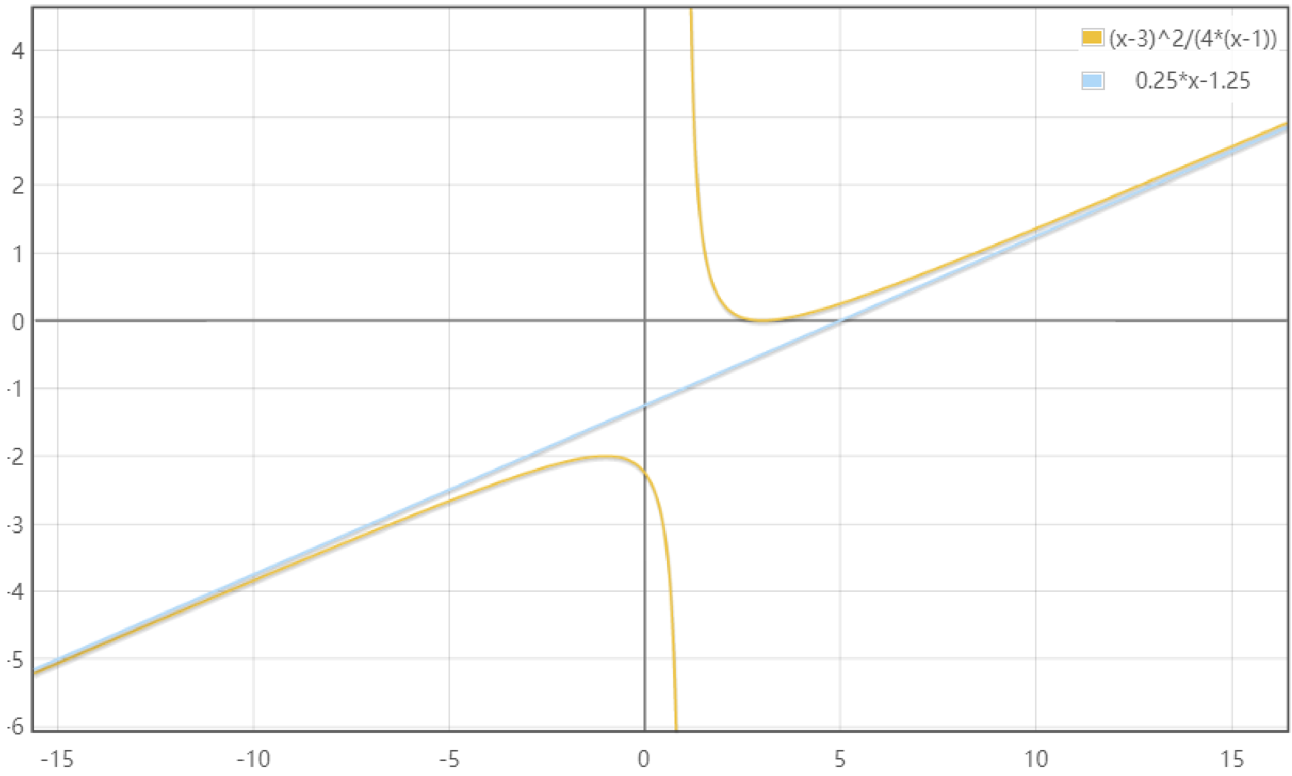
（3）$x=1$ 是 $f(x)$ 的铅直渐近线；

$x\to\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}-ax\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+9-4ax^2+4ax}{4(x-1)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(1-4a)x^2+(4a-6)x+9}{4(x-1)}\right)$

$a=\dfrac{1}{4}$ 时，上式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x+9}{4(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x+5+4}{4(x-1)}=-\dfrac{5}{4}$ 所以 $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$ 是 $f(x)$ 的斜渐近线。

（4）图像如下所示。（蓝线为渐近线）



四、(9 分)

1. 原式 $= -\int \arctan x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\left[\frac{\arctan x}{x} - \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx\right] = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$

$= -\frac{\arctan x}{x} + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = -\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

2. 做变换 $x = \tan t$, 则$dx = \sec^2 t dt$。

原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t}{\sec t(\sec^2 t + \tan^2 t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec t}{\sec^2 t + \tan^2 t} dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin t)}{1+\sin^2 t} = \arctan(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}.$

3. 原极限 $=$ (做变换$u = x - t$) $\lim_{x\to0^+} \frac{\int_x^0 \sqrt{u}e^{x-u}d(-u)}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{u}e^{x-u}d(u)}{\sqrt{x^3}}$

$= \lim_{x\to0^+} \frac{e^x\int_0^x \sqrt{u}e^{-u}du}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{u}e^{-u}du}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}e^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = \frac{2}{3}.$

五、(6 分) 解:

1. $y' = p$, 则 $y'' = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$,原方程可化为

$yp\dfrac{dp}{dy} = 2p^2 - 2p$, 即 $\dfrac{dp}{2p-2} = \dfrac{dy}{y}$, 即 $\dfrac{1}{2}ln(2p-2) = ln\ y + ln\ C$

$x = 0$时，$p = 2, y = 1$, 则 $\dfrac{1}{2}ln\ 2 = ln\ C$，$C=\sqrt{2}$

则 $\sqrt{2p-2} = \sqrt{2}y$，则 $p - 1 = y^2, \dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1, \dfrac{dy}{y^2+1} = dx$, 两边积分得

$arctan\ y = x + C_2, x = 0$时$y = 1$, 代入得$C_2 = \dfrac{\pi}{4}$，所以原方程的特解是 $y = tan(x + \dfrac{\pi}{4})$.

2. 首先，$c=0$. $S = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (ax^2 + bx)dx = \dfrac{a}{3}x^3 + \dfrac{b}{2}x^2 \Big|_0^1 = \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{3}$；则

$a = -\dfrac{3b}{2} + 1 . dV = \pi y^2 dx, \therefore V = \pi\int_0^1 (a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2)dx = \pi(\dfrac{a^2}{5}x^5 + \dfrac{2ab}{4}x^4 + \dfrac{b^2}{3}x^3)\Big|_0^1$

$=\pi\dfrac{6a^2+15ab+10b^2}{30} = \pi\dfrac{6 + \frac{27}{2}b^2 - 18b + 15b - \frac{45}{2}b^2 + 10b^2}{30} = \pi\dfrac{6 + b^2 - 3b}{30}$

可知当 $b = \dfrac{3}{2}$时，V最大，此时$a = -\dfrac{5}{4}$, 由 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时 $y \geq 0$, 则 $\begin{cases} a > 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$b = \dfrac{3}{2}$，$a = -\dfrac{5}{4}$符合条件，所以符合题意的常数$b = \dfrac{3}{2}$，$a = -\dfrac{5}{4}$，$c = 0$.

六、(5 分)

解:（1）设$f(x) = (1+x)[ln(1+x)]^2 - x^2$，则 $f'(x) = ln^2(1+x) + 2\,ln(1+x) - 2x$

$f''(x) = 2\,ln(1+x)\dfrac{1}{1+x} + 2\dfrac{1}{1+x} - 2 = \dfrac{2\,ln(1+x) - 2x}{1+x}$,

设$g(x) = ln(1+x) - x, g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 < 0$,

则$0 < x < 1$时，$g'(x) < 0$，$g(x)$单调递减, $g(x) < g(0) = 0$，

所以$0 < x < 1$时，$f''(x) < 0$，$f'(x)$单调递减,$f'(x) < f'(0) = 0$，

所以$0 < x < 1$时，$f'(x) < 0$，$f(x)$单调递减,$f(x) < f(0) = 0$，所以$0 < x < 1$时，

$(1+x)[ln(1+x)]^2 - x^2 < 0$,也即$(1+x)[ln(1+x)]^2 < x^2$,证毕。

（2）设$h(x) = \frac{1}{ln(1+x)} - \frac{1}{x}$，则 $h'(x) = \frac{-\frac{1}{1+x}}{ln^2(1+x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + (1+x)\,ln^2(1+x)}{x^2(1+x)\,ln^2(1+x)}$，由(1)得

$0 < x < 1$时,$(1+x)[ln(1+x)]^2 - x^2 < 0, x^2(1+x)\,ln^2(1+x) > 0$,所以$h'(x) < 0, h(x)$单调递减

$h(x) > h(1) = \frac{1}{ln\,2} - 1$，$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - ln(1+x)}{x\,ln(1+x)} = \frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{ln\,2} - 1 < k < \frac{1}{2}$.

七、(5 分)

解：（1）$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = \int_{a}^{-a} f(-x)g(-x)d(-x) = \int_{-a}^{a} f(-x)g(x)dx$

设$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = I$，则 $2I = \int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx + \int_{-a}^{a} f(-x)g(x)dx = \int_{-a}^{a} (f(x) + f(-x))g(x)dx$

$= A\int_{-a}^{a} g(x)dx = 2A\int_{0}^{a} g(x)dx$，所以$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = A\int_{0}^{a} g(x)dx$，证毕。

（2）$|\sin x|$为偶函数,$arctan\, e^x + arctan\, e^{-x} = \frac{\pi}{2}$，应用（1）中结论有

原积分 $= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\frac{\pi}{2}\cos \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

八、(3 分)

证明：

$f(x)$在$x = c$处的泰勒展开式为$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-c)^2, \xi \in (c,x)$或$\xi \in (x,c)$

将$f(x)$在$x = 0$和$x = 1$处的函数值分别在$x = c$处展开得

$f(1) = f(c) + f'(c)(1-c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(1-c)^2, \xi_1 \in (c,1)$……①

$f(0) = f(c) - cf'(c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}c^2, \xi_2 \in (0,c)$……②

①②两式相减得 $f(1)-f(0)=f'(c)+\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(1-c)^2-\dfrac{f''(\xi_2)}{2}c^2$

即$f'(c)=f(1)-f(0)+\dfrac{f''(\xi_2)}{2}c^2-\dfrac{f''(\xi_1)}{2}(1-c)^2$

则 $|f'(c)|\le|f(1)|+|f(0)|+\left|\dfrac{f''(\xi_2)}{2}\right|c^2+\left|\dfrac{f''(\xi_1)}{2}\right|(1-c)^2\le 2a+\dfrac{b}{2}(c^2+c^2-2c+1)$

又 $2c^2-2c+1=2(c-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{2}\le 1$(当且仅当$c=0$或1时等号成立)

则 $|f'(c)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$.证毕.