

主管
领导
审核
签字

哈尔滨工业大学(深圳) 2017 学年秋季学期

高等数学 A 试 题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范 遵守考场纪律

授课教师

姓名

学号

班号

学院

一、填空题 (每小题 2 分, 共 4 小题, 满分 8 分)

1. 曲线 $y = x^2 - 6x + 10$ 在点 $(3, 1)$ 处的曲率 $K =$ _____.

2. 不定积分 $\int \sin x e^{2\cos x} dx =$ _____ $+ C$.

3. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (|x| + \frac{(\sin x)^{99}}{\sqrt{1+x^6}}) dx =$ _____.

4. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}}}{n} =$ _____.

二、选择题 (每小题 2 分, 共 4 小题, 满分 8 分, 每小题中给出的四个选项中只有一个是符合题目要求的, 把所选项的字母填在题后的括号内)

1. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, 则 I, J, K 的大小关系是 ().
 (A) $I < J < K$; (B) $I < K < J$; (C) $J < I < K$; (D) $K < J < I$.

2. 曲线 $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = \frac{3}{2}t^2 - 1 \end{cases}$ 上相应于 $0 \leq t \leq 1$ 的一段弧的长度等于 ().

(A) $\frac{1}{3}$; (B) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$; (C) $3\sqrt{3} - 1$; (D) $2\sqrt{2} - 1$.

3. 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f(\frac{t}{2}) dt + \ln 2$, 则 $f(x)$ 等于 ().

(A) $e^x \ln 2$; (B) $e^{2x} \ln 2$; (C) $e^x + \ln 2$; (D) $e^{2x} + \ln 2$.

4. 一个物质的物体, 高 4 m, 水平截面面积 S 是高度 h (从底部算起) 的函数

$S = 20 + 3(4 - h)^2$ (高度 h 的单位是 m , 面积 S 的单位是 m^2), 已知物体的密度与水的密度同为 10^3 kg/m^3 , 此物体沉在水中, 上表面与水面平齐, 设重力加速度 $g = 10 \text{ m/s}^2$, 则将此物体水平打捞出水所需作的功为 ().

(A) 1940000 焦耳; (B) 2240000 焦耳; (C) 2960000 焦耳; (D) 3520000 焦耳.

三、(6 分) 已知函数 $f(x) = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$,

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值;

(2) 求曲线 $y = f(x)$ 的凸凹区间;

(3) 求曲线 $y = f(x)$ 的渐近线;

(4) 作函数 $f(x)$ 的图形.

授课教师

姓名

学号

班号

学院

四、计算下列各题（每小题 3 分，共三小题，满分 9 分）

1. 计算不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

2. 计算定积分 $\int_0^1 \frac{1}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

3. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (\sqrt{x-t})(e^t) dt}{\sqrt{x^3}}$.

五、解答下列各题（每小题 3 分，共两小题，满分 6 分）

1. 求微分方程 $yy'' = 2[(y')^2 - y']$ 满足初值条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

2. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过坐标原点，当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $y \geq 0$ ，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$ ，试确定常数 a, b, c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积最小.

授课教师

姓名

学号

班号

学院

六、(5分)

(1) 设 $x \in (0, 1)$, 证明 $(1+x)[\ln(1+x)]^2 < x^2$;

(2) 已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = k$ 在区间 $(0, 1)$ 内有实根, 确定常数 k 的取值范围.

七、(5分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[-a, a] (a > 0)$ 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 满

足条件 $f(x) + f(-x) = A (A$ 为常数),

(1) 证明 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx$;

(2) 利用(1)的结论计算定积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$.

八、(3分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且满足条件 $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$, 其中 a, b 都是非负实数, c 是 $(0, 1)$ 内任一点, 证明 $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.