一、填空题（每小题 1 分，共 5 小题，满分 5 分）

1. -0.05； 2. $y=x-1$； 3. $\dfrac{\ln 2}{16}$； 4. $\dfrac{(-1)^{n-1}2^n(n-1)!}{(2x-1)^n}$； 5. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

二、选择题（每小题 1 分，共 5 小题，满分 5 分）

1. D; 2. B; 3. C; 4. A; 5. B

三、(4 分) 设a,b均为不等于1的正常数，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 解法一

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{a^x-x\ln a-b^x+x\ln b}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{b^x-x\ln b}{a^x-x\ln a-b^x+x\ln b}}\right]^{\frac{a^x-x\ln a-b^x+x\ln b}{x^2(b^x-x\ln b)}}$$

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-x\ln a-b^x+x\ln b}{x^2(b^x-x\ln b)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{b^x-x\ln b}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-x\ln a-b^x+x\ln b}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-\ln a-b^x\ln b+\ln b}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x(\ln a)^2-b^x(\ln b)^2}{2}=\frac{(\ln a)^2-(\ln b)^2}{2}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\frac{(\ln a)^2-(\ln b)^2}{2}}$$

解法二

设$y=\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$，取对数得

$$\ln y=\frac{\ln(a^x-x\ln a)-\ln(b^x-x\ln b)}{x^2}$$

取极限得

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x-x\ln a)-\ln(b^x-x\ln b)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x-x\ln a)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(b^x-x\ln b)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{a^x\ln a-\ln a}{a^x-x\ln a}}{2x}-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{b^x\ln b-\ln b}{b^x-x\ln b}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{a^x-x\ln a}\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-\ln a}{2x}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{b^x-x\ln b}\lim_{x\to 0}\frac{b^x\ln b-\ln b}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x(\ln a)^2}{2}-\lim_{x\to 0}\frac{b^x(\ln b)^2}{2}=\frac{(\ln a)^2-(\ln b)^2}{2}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}y=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y}=\mathrm{e}^{\frac{(\ln a)^2-(\ln b)^2}{2}}$$

四、(4 分) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_{x=0}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\big|_{x=0}$.

解　方程中 $x=0$ 得 $y=1$

方程两边对 x 求导得

$$\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6y+6x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2x=0$$

将 $x=0,\ y=1$ 代入上式得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_{x=0}=-\frac{6}{\mathrm{e}}$

前一式两边对 x 求导得

$$\mathrm{e}^y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+6\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2=0$$

将 $x=0,\ y=1,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{6}{\mathrm{e}}$ 代入上式得 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\big|_{x=0}=\frac{36}{\mathrm{e}^2}-\frac{2}{\mathrm{e}}$

五、(4 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x}+\cos x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 求 $f''(x)$.

解　当 $x\neq 0$ 时，有

$$f'(x)=4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}-\sin x$$

当 $x=0$ 时，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin\frac{1}{x}+\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}x^3\sin\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0+0=0$$

当 $x\neq 0$ 时，有

$$f''(x)=12x^2\sin\frac{1}{x}-6x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}-\cos x$$

当 $x=0$ 时，有

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}-\sin x-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}4x^2\sin\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0-0-1=-1$$

六、(5 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+ax^3\right)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$ 问 a 取何值时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？ a 取何值时， $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

解 因为

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{-\frac{x^2}{2}}=-6a$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{ax}+x^2-ax-1}{\frac{x^2}{4}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a\mathrm{e}^{ax}+2x-a}{\frac{x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{a^2\mathrm{e}^{ax}+2}{\frac{1}{2}}=2a^2+4$$

$f(0)=6$

令 $f(0^-)=f(0^+)$ 得 $-6a=2a^2+4$，解得 $a=-1, a=-2$

当 $a=-1$ 时，有

$f(0^-)=f(0^+)=f(0)=6$

所以当 $a=-1$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

当 $a=-2$ 时，有

$f(0^-)=f(0^+)=12\neq 6=f(0)$

所以当 $a=-2$ 时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点。

七、(3 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，$g''(x)\neq 0$，且 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明：

（1）在区间 (a,b) 内，$g(x)\neq 0$；

（2）存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

证明 （1）反证。若存在 $c\in(a,b)$，使得 $g(c)=0$，对 $g(x)$ 分别在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 应用罗尔定理，存在 $\eta_1\in(a,c), \eta_2\in(c,b)$，使得

$g'(\eta_1)=g'(\eta_2)=0$

对 $g'(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上应用罗尔定理，存在 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使得

$g''(\eta)=0$

矛盾。

（2）设 $F(x)=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F(a)=F(b)=0$，

应用罗尔定理，存在$\xi \in (a,b)$，使得

$$F'(\xi) = f''(\xi)g(\xi) - f(\xi)g''(\xi) = 0$$

所以$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = \dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$。