2018 秋高等数学 A 期末试题答案

一、填空题

1. $y=2x$ 或 $2x-y=0$ 或 $y-2x=0$； 2. $\dfrac{\sqrt{10}}{25}$ 或 $\dfrac{4}{10^{\frac{3}{2}}}$ 或 $\dfrac{2}{5\sqrt{10}}$； 3. $\dfrac{2}{3}$；

4. $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{\pi}{2}x$ 或 $\dfrac{2+\pi x+\pi x^3}{2+2x^2}$.

二、选择题

1. C; 2. C; 3. B; 4. D.

三、解答下列各题

1. 解: 求导得

$$f(x)=(2x^2+3x+1)\mathrm{e}^{x^2+3x+1}=(2x+1)(x+1)\mathrm{e}^{x^2+3x+1}$$

解得 $x=-\dfrac{1}{2}, x=-1$. 当 $x<-1$ 和 $x>-\dfrac{1}{2}$ 时, $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和区间 $(-\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调增加; 当 $-1<x<-\dfrac{1}{2}$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(-1,-\dfrac{1}{2})$ 上单调减少, 极大值为 $f(-1)=-\mathrm{e}^{-1}$, 极小值为 $f(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$.

又 $f(-2)=-2\mathrm{e}^{-1}$, $f(2)=2\mathrm{e}^{11}$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值为 $f(2)=2\mathrm{e}^{11}$, 最小值为 $f(-2)=-2\mathrm{e}^{-1}$.

2. 解: $\displaystyle\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x \overset{t=x-2}{=} \int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0 (t+t^2)\mathrm{d}t+\int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}\Big|_0^1=\left(0-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)=\frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{2}{3}$$

面积为

$$S=\int_{-1}^{0}\left[(x+1)-(x+x^2)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(1-x^2)\mathrm{d}x=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{2}{3}$$

3. 解: $\displaystyle\int\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}\mathrm{d}x \overset{x=\frac{1}{2}\sec t}{=} \int\frac{\tan t}{\frac{1}{2}\sec t}\frac{1}{2}\sec t\tan t\,\mathrm{d}t=\int\tan^2 t\,\mathrm{d}t$

$$=\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t=\tan t-t+C=\sqrt{4x^2-1}-\arccos\frac{1}{2x}+C$$

或

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{4x^2-1}}{=} \int \frac{t}{\frac{\sqrt{t^2+1}}{2}} \frac{t}{2\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$= \int \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = t - \arctan t + C$$

4. 解: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

5. 解: $y' + \frac{1}{x}y = \mathrm{e}^x$

通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = \frac{1}{x}\left(\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C\right) = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x} + \frac{C}{x}$$

由初值条件 $y(1)=2$ 得 $C=2$，故所求的解为

$$y = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x} + \frac{2}{x}$$

或

$$xy' + y = x\mathrm{e}^x$$

$$(xy)' = x\mathrm{e}^x$$

$$xy = \int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C$$

余同。

四、证明:

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^a x^2 f(x^2)\mathrm{d}(x^2) \overset{t=x^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^{a^2} tf(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^3\sin(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=-\frac{1}{2}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

五、解: (1) 容器的容积为

$$V=\pi\int_{-a}^{\frac{a}{2}}\left(a^2-y^2\right)\mathrm{d}y=\pi\left(a^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{\frac{a}{2}}=\frac{9}{8}\pi a^3$$

(2) 所作的功为

$$W=\int_{-a}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}-y\right)g\rho\pi\left(a^2-y^2\right)\mathrm{d}y=\rho g\pi\int_{-a}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^3}{2}-a^2y-\frac{a}{2}y^2+y^3\right)\mathrm{d}y$$

$$=\rho g\pi\left(\frac{a^3}{2}y-\frac{a^2}{2}y^2-\frac{a}{6}y^3+\frac{1}{4}y^4\right)\Bigg|_{-a}^{\frac{a}{2}}=\frac{45}{64}\rho g\pi a^4$$

六、解: (1) 方程化为

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

求导得

$$f'(x)+(x+1)f''(x)+f(x)+(x+1)f'(x)-f(x)=0$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=-\frac{x+2}{x+1}$$

积分得

$$\ln\left|f'(x)\right|=-x-\ln(x+1)+\ln|C|$$

去对数号得

$$f'(x)=\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$$

在原方程中令 $x=0$ 得 $f'(0)+f(0)=0$，所以 $f'(0)=-f(0)=-1$，由此得 $C=-1$，故

$$f'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$$

(2) 当 $x\geq 0$ 时, 有 $f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}\leq 0$，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少，故

$$f(x)\leq f(0)=1$$

设 $g(x)=f(x)-\mathrm{e}^{-x}$，则当 $x\ge 0$ 时, 有

$$g'(x)=f'(x)+\mathrm{e}^{-x}=-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}+\mathrm{e}^{-x}=\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x+1}\ge 0$$

所以 $g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加，故 $g(x)\ge g(0)=0$，即

$$f(x)\ge \mathrm{e}^{-x}.$$

七、证明：(1) 因为当 $a\le x\le b$ 时 $\varphi(x)\ge 0$，所以

$$a\varphi(x)\le x\varphi(x)\le b\varphi(x)$$

由定积分的性质知

$$a\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b\varphi(x)f(x)\mathrm{d}x\le b\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$$

利用 $\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=1$ 得

$$a\le\int_a^b\varphi(x)f(x)\mathrm{d}x\le b$$

（2）记 $x_0=\int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x$, 将 $f(x)$ 在 x_0 处展成二阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

所以

$$\int_a^b\varphi(x)f(x)dx=\int_a^b\varphi(x)\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$=f(x_0)\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x+f'(x_0)\int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x-f'(x_0)x_0\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi)(x-x_0)^2\mathrm{d}x$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)x_0-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-x_0)^2\mathrm{d}x$$

$$=f(x_0)+\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-x_0)^2\mathrm{d}x\le f(x_0)\qquad（因为\ f''(x)\le 0\ ）$$

即

$$\int_a^b\varphi(x)f(x)\mathrm{d}x\le f\left(\int_a^b x\varphi(x)\mathrm{d}x\right)$$