2019 秋季学期高等数学 A（期中）试题

一、填空题（每小题 1 分，共 5 小题，满分 5 分）

1. e^2；　2. $2e\,dx$ 或 $2e\,\Delta x$；

3. $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$ 或 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 或 $x+2y-3=0$；　4. $-9900\cos 1$；

5. $\forall M>0,\ \exists\delta>0$，使得当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $f(x)>M$.

二、选择题（每小题 1 分，共 5 小题，满分 5 分）

1. A;　2. C;　3. B;　4. C;　5. D

三、(4 分) 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\frac{t^3}{3}+t+1 \\ y=e^t+t^2 \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+2t}{t^2+1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{(e^t+2)(t^2+1)-(e^t+2t)(2t)}{(t^2+1)^2}}{t^2+1}=\frac{e^t(t^2-2t+1)-2t^2+2}{(t^2+1)^3}$$

四、(4 分) 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$.

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \dfrac{1}{1+x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\dfrac{1}{1+x}}{2x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+\dfrac{1}{(1+x)^2}}{2}-0=\frac{1}{2}$$

五、(4 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{x-1}}, & x>0 \text{ 且 } x\neq 1 \\ \mathrm{e}, & x=1 \end{cases}$,

（1）求函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的导数 $f'(x)$；

（2）讨论 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的连续性.

解 （1）当 $x>0$ 且 $x\neq 1$ 时，有

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)=x^{\frac{1}{x-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)=x^{\frac{1}{x-1}}\frac{\dfrac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}=x^{\frac{1}{x-1}}\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$$

当 $x=1$ 时，有

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{x-1}}-\mathrm{e}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{x-1}}\dfrac{1-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}}{1}=\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}\lim_{x\to 1}\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)^2}$$

$$=\mathrm{e}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1-\ln x-x\dfrac{1}{x}}{2(x-1)}=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{-\ln x}{2(x-1)}=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{x}}{2}=-\frac{\mathrm{e}}{2}$$

（2）因为

$$\lim_{x\to 1}f'(x)=\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}\frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}=-\frac{\mathrm{e}}{2}=f'(1)$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=1$ 处连续，故 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

六、(3 分) 设$0<a_1<\sqrt{3}, a_{n+1}=\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}, n=1,2,\cdots$，证明数列$\{a_n\}$收敛，并计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证 用数学归纳法证$0<a_n<\sqrt{3},\ n=1,2,\cdots$. 当$n=1$时，有$0<a_1<\sqrt{3}$，假设当$n=k$时，有$0<a_k<\sqrt{3}$，则当$n=k+1$时，有

$$0<a_{k+1}=\frac{3(1+a_k)}{3+a_k}=\frac{(3-\sqrt{3})(a_k-\sqrt{3})}{3+a_k}+\sqrt{3}<\sqrt{3}$$

由数学归纳法得$0<a_n<\sqrt{3},\ n=1,2,\cdots$，所以数列$\{a_n\}$有界.

又

$$a_{n+1}-a_n=\frac{3(1+a_n)}{3+a_n}-a_n=\frac{3-a_n^2}{3+a_n}>0,\ n=1,2,\cdots$$

所以数列$\{a_n\}$有单调增加，由单调有界定理，数列$\{a_n\}$收敛.

设$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，对$a_{n+1}=\dfrac{3(1+a_n)}{3+a_n}$取极限得$a=\dfrac{3(1+a)}{3+a}$，解得$a=\pm\sqrt{3}$（负值舍去），故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$.

七、(4 分) 设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内可导，且$f(0)=0, f(1)=1$，证明:

(1) 存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=1-\xi$;

(2) 存在两个不同的点$\eta_1,\eta_2\in(0,1)$，使得$f'(\eta_1)f'(\eta_2)=1$.

证明 （1）设$g(x)=f(x)+x-1$，则$g(x)$在区间$[0,1]$上连续，且

$$g(0)=f(0)+0-1=-1<0, g(1)=f(1)+1-1=1>0$$

由零点存在定理，存在$\xi\in(0,1)$，使得

$$g(\xi)=f(\xi)+\xi-1=0$$

即 $f(\xi)=1-\xi$.

（3）对 $f(x)$ 分别在区间 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上应用拉格朗日中值定理，存在 $\eta_1\in(0,\xi),\eta_2\in(\xi,1)$，使得

$$f'(\eta_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{1-\xi}{\xi}$$

$$f'(\eta_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}$$

-于是

$$f'(\eta_1)f'(\eta_2)=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1.$$