2019秋季学期高等数学A（期末）试题答案

一、填空题（每小题2分，共4小题，满分8分）

1. $y = x - 5$；　　2. $\sqrt{2}$　；　3. 1；　　4. $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln 2}{2}$.

二、选择题（每小题2分，共4小题，满分8分）

1. A;　　2. C;　　3. D;　　4. B.

三、(5分) 设函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$，（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；（2）确定方程 $f(x) = 0$ 的实根个数；（3）求曲线 $y = f(x)$ 的凸凹区间和拐点.

解　（1）求导得 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$，令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1, x = 3$，

当 $x < 1$ 和 $x > 3$ 时，$f'(x) > 0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 和区间 $(3, +\infty)$ 上单调增加，

当 $1 < x < 3$ 时，$f'(x) < 0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(1, 3)$ 上单调减少，极大值为 $f(1) = 5$，

极小值为 $f(3) = 1$.

（2）又 $f(-\infty) = -\infty, f(+\infty) = +\infty$，由连续函数零点存在定理及函数的单调性知，方程 $f(x) = 0$ 的实根个数是1.

（3）求二阶导得 $f''(x) = 6x - 12$，令 $f''(x) = 0$ 得 $x = 2$，当 $x < 2$ 时，$f''(x) < 0$，所以曲线 $y = f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2)$ 上是凸的，当 $x > 2$ 时，$f''(x) > 0$，所以曲线 $y = f(x)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上是凹的，拐点为 $(2, 3)$.

四、解答下列各题（共五小题，满分17分）

1.（4分）计算不定积分 $\displaystyle\int \frac{\ln(x-2)}{x^2}\mathrm{d}x$（$x > 2$）.

解
$$\int \frac{\ln(x-2)}{x^2}\mathrm{d}x = -\int \ln(x-2)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln(x-2)}{x} + \int \frac{1}{x}\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\ln(x-2)}{x} + \int\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\ln(x-2)}{x} - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x-2) + C.$$

2.（3 分）计算定积分 $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}\mathrm{d}x$.

解 令 $x=2\sin t$ ，则 $\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$ ，于是

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin t)^2}{\sqrt{\left(4-(2\sin t)^2\right)^3}}2\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4(\sin t)^2(2\cos t)}{8(\cos t)^3}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin t)^2}{(\cos t)^2}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{(\cos t)^2}-1\right)\mathrm{d}t=(\tan t-t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}.$$

3. （4 分）计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\ln(1+2x)}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{(1-\cos x)\tan x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\ln(1+2x)}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{(1-\cos x)\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\ln(1+2x)}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{\left(\frac{x^2}{2}\right)(x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\ln(1+2x)}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{\left(\frac{x^3}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\ln(1+2x))^2\frac{2}{1+2x}}{\left(\frac{3x^2}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(4x^2\right)\frac{2}{1+2x}}{\left(\frac{3x^2}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{16}{1+2x}}{3}=\frac{16}{3}$$

4.（3 分）求微分方程 $y''+\frac{2}{1-y}\left(y'\right)^2=0$ 的通解.

解 令 $z=y'$，则 $y''=z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$，代入方程得

$$z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{1-y}z^2=0$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{2}{y-1}\mathrm{d}y$$

积分得

$$\ln|z| = 2\ln|y-1| + \ln|C_1|$$

简化得

$$z = C_1(y-1)^2$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1(y-1)^2$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2} = C_1\mathrm{d}x$$

积分得

$$-\frac{1}{y-1} = C_1x + C_2$$

即

$$y = 1 - \frac{1}{C_1x + C_2}.$$

5. （3 分）设有一半径为1米的圆板，垂直放在水中，圆板的圆心与水平面距离为2米，假设水的密度$\rho = 1000$千克/米^3，重力加速度$g = 10$米/秒^2，试求圆板的一侧所受水的压力.（注：水的压强计算公式为$P = \rho gh$，其中h为水的深度.）

解 建立坐标系，圆的方程为$(x-2)^2 + y^2 = 1$，选x为积分变量，$x \in [1,3]$，考虑典型小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$，则压力微元为

$$\mathrm{d}F = (\rho gx)(2|y|\mathrm{d}x) = 2\rho gx\sqrt{1-(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$$

所以水的压力为

$$F = \int_1^3 2\rho gx\sqrt{1-(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \overset{t=x-2}{=} 2\rho g\int_{-1}^1 (t+2)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4\rho g\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 4\rho g\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi\rho g = 2\cdot 10^4\cdot\pi \text{ 牛顿}$$

五、（5 分）设曲线$y = ax^2$（$a > 0, x \ge 0$）与$y = 1 - x^2$交于点A，过坐标原点O及

点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形，问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大？当旋转体体积最大时，计算平面图形的面积和旋转体的体积.

解 联立解方程 $\begin{cases} y=ax^2 \\ y=1-x^2 \end{cases}$，得交点 $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+a}},\dfrac{a}{1+a}\right)$，$OA$ 的直线方程为

$$y=\frac{a}{\sqrt{1+a}}x$$

于是所求的体积为

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left[\left(\frac{a}{\sqrt{1+a}}x\right)^2-\left(ax^2\right)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left(\frac{a^2}{1+a}x^2-a^2x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{15}\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}}$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\dfrac{\pi}{15}\dfrac{4a-a^2}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}=0$ 得 $a=4$，当 $a<4$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}>0$，当 $a>4$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}<0$，故 $a=4$ 为极大值点，即最大值点，旋转体体积的最大值为

$$V_{\max}=V\big|_{a=4}=\frac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$$

当 $a=4$ 时，围成平面图形的面积为

$$S=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(\frac{4}{\sqrt{5}}x-4x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{2}{75}\sqrt{5}.$$

六、(4 分) 设 $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots$，(1)求 I_n+I_{n+1}；(2)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n$；

(3)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

解 (1) $I_n+I_{n+1}=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x+\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{x^n+x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1x^n\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n+1}$

(2) 因为 $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x\ge\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x=I_{n+1}\ge 0$，所以数列 $\{I_n\}$ 单调减少有下界，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$ 存在，对 $I_n+I_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$ 取极限得

$$\lim_{n\to\infty}I_n+\lim_{n\to\infty}I_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}I_n+\lim_{n\to\infty}I_n=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

因为

$$2I_{n+1} \le I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1} \le 2I_n$$

所以

$$\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2n}$$

$$\frac{n}{2(n+1)} \le nI_n \le \frac{1}{2}$$

而 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$，所以 $\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}$

（3） 因为

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \frac{1\cdot\left[1-(-x)^n\right]}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x}$$

取定积分得

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x} \right) \mathrm{d}x$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + \int_0^1 (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$$

取极限得

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2 + \lim_{n\to\infty} \left[(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x \right] = \ln 2 + 0 = \ln 2$$

七、(3 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶连续导函数，且 $f(\frac{a+b}{2})=0$，$M=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$（即 M 是 $|f''(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的最大值），证明：$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{4}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{M(b-a)^3}{24}$.

证 将 $f(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 处展开成二阶泰勒公式

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

于是

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right|\mathrm{d}x$$

$$\le \int_a^b\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right|\mathrm{d}x+\int_a^b\left|\frac{f''(\xi)}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right|\mathrm{d}x$$

$$\le f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}x+\frac{M}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}|t|\,\mathrm{d}t+\frac{M}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=2f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^{\frac{b-a}{2}}t\,\mathrm{d}t+\frac{M}{2}\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Big|_a^b$$

$$=2f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}+\frac{M}{2}\frac{1}{3}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\left(-\frac{b-a}{2}\right)^3\right]$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{4}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\frac{M(b-a)^3}{24}$$