主管领导审核签字

哈尔滨工业大学（深圳）2019/2020 学年秋季学期

高等数学 A 试题（期末）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范　　遵守考场纪律

姓名 学号 班号 学院 密 封

一、填空题（每小题 2 分，共 4 小题，满分 8 分）

1. 曲线 $y=\dfrac{x^2-2}{x+5}$ 的斜渐近线方程是____________.

2. 抛物线 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处的曲率半径 $R=$____________.

3. 定积分 $\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\left[|x|\cos\left(x^2\right)+\dfrac{(\sin x)^3}{1+x^{20}}\right]\mathrm{d}x=$____________.

4. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\arctan\dfrac{1}{n}+\arctan\dfrac{2}{n}+\cdots+\arctan\dfrac{n}{n}\right)=$____________.

二、选择题（每小题 2 分，共 4 小题，满分 8 分，每小题中给出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{\mathrm{e}^x} f(\mathrm{e}^x-t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{3x}$，则 $f(x)=($　　$)$

(A) $3x^2$；　(B) x^3；　(C) e^{2x}；　(D) e^{3x}.

2. 下列反常积分哪一个是发散的(C　)

(A) $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$；(B) $\int_0^2\dfrac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$；(C) $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$；(D) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x}}$.

3. 星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$（$a>0$）的全长（对应 $0\le t\le 2\pi$）为(　　)

(A) $3a$；　(B) $4a$；　(C) $5a$；　(D) $6a$.

4. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$，则(　　)

(A) $I_1>I_2>1$；(B) $1>I_1>I_2$；(C) $I_2>I_1>1$；(D) $1>I_2>I_1$.

三、(5 分) 设函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$，（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；（2）确定方程 $f(x)=0$ 的实根个数；（3）求曲线 $y=f(x)$ 的凸凹区间和拐点.

四、解答下列各题（共五小题，满分 17 分）

1.（4 分）计算不定积分 $\int\frac{\ln(x-2)}{x^2}\mathrm{d}x$ （ $x>2$ ）.

2.（3 分）计算定积分$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{(4-x^2)^3}}\mathrm{d}x$.

3.（4 分）计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\ln(1+2x)}\sin(t^2)\mathrm{d}t}{(1-\cos x)\tan x}$.

姓名________ 学号________ 班号________ 学院________

密 封

4.（3 分）求微分方程 $y''+\frac{2}{1-y}\left(y'\right)^2=0$ 的通解.

5.（3 分）设有一半径为 1 米的圆板，垂直放在水中，圆板的圆心与水平面距离为 2 米，假设水的密度 $\rho=1000$ 千克/米 ^{3}，重力加速度 $g=10$ 米/秒 ^{2}，试求圆板的一侧所受水的压力.（注：水的压强计算公式为 $P=\rho gh$，其中 h 为水的深度.）

五、（5 分）设曲线 $y=ax^2$（$a>0, x\ge 0$）与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点 O 及点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形，问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大？当旋转体体积最大时，计算平面图形的面积和旋转体的体积.

六、(4 分) 设 $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots$，(1)求 I_n+I_{n+1}；(2)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$；

（3）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

姓名________ 学号________ 班号________ 学院________

密 封

七、(3 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶连续导函数，且 $f(\frac{a+b}{2})=0$， $M=\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$

（即 M 是 $|f''(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的最大值），证明：$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{4}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{M(b-a)^3}{24}$.