2020 秋季学期高等数学 A（期中）试题

一、填空题（每小题 1 分，共 5 小题，满分 5 分）

1. 2；　2. 1；　3. $y=x+1$；

4. $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}-\dfrac{2^n(n-1)!}{(3-2x)^n}$ 或 $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}+\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^n}$；　5. $\dfrac{100}{\pi R^2}$ cm/s.

二、选择题（每小题 1 分，共 5 小题，满分 5 分）

1. C;　2. C;　3. A;　4. B;　5. B

三、(4 分) 确定常数 a,b 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases} b\cos x+(a+1)x, x\le 0, \\ \mathrm{e}^{-ax}+x^2\cos\dfrac{1}{x}, x>0 \end{cases}$ 处处可导，

并求 $f'(x)$。

解 当 $x<0$ 时，$f(x)=b\cos x+(a+1)x$ 可导，且

$$f'(x)=-b\sin x+a+1$$

当 $x>0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{-ax}+x^2\cos\dfrac{1}{x}$ 可导，且

$$f'(x)=-a\mathrm{e}^{-ax}+2x\cos\frac{1}{x}+x^2\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-a\mathrm{e}^{-ax}+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}$$

在 $x=0$ 点，有

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{b\cos x+(a+1)x-b}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-b\sin x+a+1}{1}=a+1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{-ax}+x^2\cos\frac{1}{x}-b}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-b}{x}+\lim_{x\to0^+}x\cos\frac{1}{x}\overset{b=1}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-1}{x}+0$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-a\mathrm{e}^{-ax}}{1}=-a$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 点可导 $\Leftrightarrow$ $f'_-(0)=f'_+(0)$ $\Leftrightarrow$ $b=1,a+1=-a$，即 $b=1,a=-\frac{1}{2}$，此时，$f'(0)=\frac{1}{2}$。于是

$$f'(x)=\begin{cases}-\sin x+\frac{1}{2},x\le0\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x},x>0\end{cases}$$

四、(4 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有连续的二阶导数，且 $f'(1)=1,f''(1)=2$，求参数方程 $\begin{cases}x=f(\mathrm{e}^{-t}),\\ y=f(\mathrm{e}^{t})\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 在 $t=0$ 处的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_{t=0},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\big|_{t=0}$。

解 方法一

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f'(\mathrm{e}^{-t})(-\mathrm{e}^{-t}),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f'(\mathrm{e}^{t})\mathrm{e}^{t}$$

在 $t=0$ 处，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=f'(1)(-1)=1\cdot(-1)=-1,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=f'(1)\cdot1=1\cdot1=1$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=f''(\mathrm{e}^{-t})(-\mathrm{e}^{-t})^2+f'(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=f''(\mathrm{e}^{t})(\mathrm{e}^{t})^2+f'(\mathrm{e}^{t})\mathrm{e}^{t}$$

在 $t=0$ 处，

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=0}=f''(1)(-1)^2+f'(1)\cdot1=2\cdot1+1\cdot1=3$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=0}=f''(1)(1)^2+f'(1)\cdot1=2\cdot1+1\cdot1=3$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}=\frac{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=0}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{t=0}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\right)^3}=\frac{3\cdot(-1)-1\cdot 3}{(-1)^3}=6$$

方法二

求一阶导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{f'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t}{f'(\mathrm{e}^{-t})(-\mathrm{e}^{-t})}=-\frac{f'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{2t}}{f'(\mathrm{e}^{-t})}$$

在 $t=0$ 处，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=-\frac{f'(1)\cdot 1}{f'(1)}=-1$$

求二阶导得

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

$$=\frac{-\frac{[(f''(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{2t}+f'(\mathrm{e}^t)\cdot 2\mathrm{e}^{2t}]f'(\mathrm{e}^{-t})-f'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{2t}f''(\mathrm{e}^{-t})(-\mathrm{e}^{-t})}{(f'(\mathrm{e}^{-t}))^2}}{f'(\mathrm{e}^{-t})(-\mathrm{e}^{-t})}$$

$$=\frac{[f''(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{4t}+2f'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{3t}]f'(\mathrm{e}^{-t})+f'(\mathrm{e}^t)f''(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{2t}}{(f'(\mathrm{e}^{-t}))^3}$$

在 $t=0$ 处，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}=\frac{(f''(1)\cdot 1+f'(1)\cdot 2\cdot 1)f'(1)+f'(1)f''(1)\cdot 1}{(f'(1))^3}=\frac{(2+2)\cdot 1+2}{1}=6$$

五、(4 分) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$。

解 方法一

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-2\sin2x+2\sin x+2x\cos x}{\cos2x+2x\sin x}}{4x^3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-4\cos2x+2\cos x+2\cos x-2x\sin x}{12x^2}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-4\cos2x+4\cos x-2x\sin x}{12x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{8\sin2x-4\sin x-2\sin x-2x\cos x}{24x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{3x}-\frac{\sin x}{4x}-\frac{\cos x}{12}\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$$

方法二

$$\lim_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to0}\left[(1+\cos2x+2x\sin x-1)^{\frac{1}{\cos2x+2x\sin x-1}}\right]^{\frac{\cos2x+2x\sin x-1}{x^4}}$$

$$=\left[\lim_{x\to0}(1+\cos2x+2x\sin x-1)^{\frac{1}{\cos2x+2x\sin x-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos2x+2x\sin x-1}{x^4}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos2x+2x\sin x-1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2\sin2x+2\sin x+2x\cos x}{4x^3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-4\cos2x+2\cos x+2\cos x-2x\sin x}{12x^2}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-4\cos2x+4\cos x-2x\sin x}{12x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{8\sin2x-4\sin x-2\sin x-2x\cos x}{24x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{3x}-\frac{\sin x}{4x}-\frac{\cos x}{12}\right)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$$

六、(4 分) （1）证明：对于任意的正整数n，都有$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$；

（2）设$a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$（$n=1,2,\cdots$），证明数列$\{a_n\}$收敛。

证 （1）方法一

设$f(x)=\ln(1+x)$，对$f(x)$在区间$\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$上应用拉格朗日中值定理，存在

$\xi\in\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，使得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln1=\frac{1}{1+\xi}\left(\frac{1}{n}-0\right)=\frac{1}{(1+\xi)n}$$

又$0<\xi<\dfrac{1}{n}$，所以

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)n}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{(1+\xi)n}<\frac{1}{(1+0)n}=\frac{1}{n}$$

方法二

设$f(x)=\ln(1+x)-x$，则当$x\geq0$时，有

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}\le 0$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少，故当 $x>0$ 时， $f(x)<f(0)=0$ ，即

$$\ln(1+x)<x$$

令 $x=\frac{1}{n}$ 得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

再设 $g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$ ，则当 $x\ge 0$ 时，有

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+\mathrm{x})^2}=\frac{x}{(1+x)^2}\ge 0$$

所以函数 $g(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加，故当 $x>0$ 时， $g(x)>g(0)=0$ ，即

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$$

令 $x=\frac{1}{n}$ 得

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

综上可知

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

（2）因为

$$a_{n+1}-a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$$

所以数列 $\{a_n\}$ 单调减少；又

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$

$$=\ln 2+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$$

所以数列 $\{a_n\}$ 有下界。故数列 $\{a_n\}$ 单调有界，由单调有界准则，数列 $\{a_n\}$ 收敛。

七、(4 分) （1）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

（2） 设函数 $f(x)$ 在开区间 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$，证明：对于开区间 $(-1,1)$ 内任一 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使得 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立，并证明 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$。

证 （1）设 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

即 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

（2） 对于开区间 $(-1,1)$ 内任一 $x\neq 0$，在以 0 和 x 为端点的闭区间上对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理，存在唯一 $\theta(x)\in(0,1)$，使得 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$。反证，如果 $\theta(x)$ 不唯一，那么存在 $\theta_1(x)\neq\theta(x)$，使得 $f(x)=f(0)+xf'(\theta_1(x)x)$，这样便有 $f'(\theta(x)x)=f'(\theta_1(x)x)$，由拉格朗日中值定理，存在介于 $\theta(x)x$ 与 $\theta_1(x)x$ 之间 η，使得 $f'(\theta(x)x)-f'(\theta_1(x)x)=f''(\eta)(\theta(x)-\theta_1(x))x=0$，所以 $f''(\eta)=0$，与 $f''(x)\neq 0$ 矛盾。

方法一

由拉格朗日中值定理，存在介于 0 与 $\theta(x)x$ 之间 ς，使得

$$f'(\theta(x)x)-f'(0)=f''(\varsigma)\theta(x)x$$

所以

$$\theta(x)=\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{xf''(\varsigma)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{xf''(\varsigma)}=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2f''(\varsigma)}$$

令 $x \to 0$（这时 $\varsigma \to 0$），取极限

$$\lim_{x\to 0}\theta(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2 f''(\varsigma)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{f''(\varsigma)}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{f''(0)}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x} = \frac{1}{f''(0)}\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{f''(0)}\frac{f''(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

方法二

$$f'(\theta(x)x) = f'(0) + f''(0)\theta(x)x + o(x)$$

所以

$$\begin{aligned} & f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x) \\ & = f(0) + x(f'(0) + f''(0)\theta(x)x + o(x)) \\ & = f(0) + f'(0)x + f''(0)\theta(x)x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

又

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

比较两个式子得

$$f''(0)\theta(x)x^2 + o(x^2) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

解得

$$\theta(x) = \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{f''(0)x^2}$$

取极限得

$$\lim_{x\to 0}\theta(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{f''(0)x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{f''(0)}\frac{o(x^2)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$$