

主管  
领导  
审核  
签字

哈尔滨工业大学（深圳）2020/2021 学年秋季学期

# 高等数学 A（期中）试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范 遵守考场纪律

姓名  
学号  
班号  
学院

## 一、填空题（每小题 1 分，共 5 小题，满分 5 分）

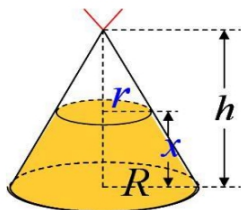
1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{-kn} = e^{-10}$ ，则常数  $k =$  \_\_\_\_\_.

2. 设  $n$  为正整数，则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) =$  \_\_\_\_\_.

3. 曲线  $\cos(xy) + \ln y - x = 1$  在  $x = 0$  所对应点处的切线方程为 \_\_\_\_\_.

4. 已知函数  $f(x) = \ln(3x - 2x^2)$ ，则  $f^{(n)}(x) =$  \_\_\_\_\_.

5. 有一个底半径为  $R$  cm、高为  $h$  cm 的圆锥容器（如下图所示），今以  $25 \text{ cm}^3/\text{s}$  的速度自顶部向容器内注水，则当容器内的水位等于锥高的一半时水面上升的速度为 \_\_\_\_\_.



## 二、选择题（每小题 1 分，共 5 小题，满分 5 分，每小题中给出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1. “对任给的  $\varepsilon \in (0,1)$  总存在正数  $\delta$ ，当  $0 < |x - x_0| \leq \delta$  时，恒有

$|f(x) - A| \leq 2\varepsilon$  成立”是  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  的 ( )

- (A) 充分条件，但非必要条件； (B) 必要条件，但非充分条件；  
(C) 充分必要条件； (D) 既非充分条件，又非必要条件。

---

2. 函数  $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$  的可去间断点的个数为 ( )

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 无穷多个。

3. 设函数  $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ , 其中  $n$  为正整数, 则  $f'(0) =$  ( )

(A)  $(-1)^{n-1}(n-1)!$ ; (B)  $(-1)^n(n-1)!$ ; (C)  $(-1)^{n-1}n!$ ; (D)  $(-1)^n n!$ 。

4. 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 若  $(\ln(1+2x))^\alpha$ ,  $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$  均是比  $x$  高阶的无穷小, 则  $\alpha$  的取值范围是 ( )

(A)  $(2, +\infty)$ ; (B)  $(1, 2)$ ; (C)  $(\frac{1}{2}, 1)$ ; (D)  $(0, \frac{1}{2})$ 。

5. 设函数  $y = f(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  内有定义, 当自变量  $x$  有增量  $\Delta x$  时相应的函数增量

$\Delta y = (x^2 + 2e^x \Delta x)\Delta x + y\Delta x + \alpha$ , 其中  $\alpha$  是当  $\Delta x \rightarrow 0$  时关于  $\Delta x$  的高阶无穷小, 则当

$x = -1, y = 1, \Delta x = 0.1$  时微分  $dy =$  ( )

(A) 0.1; (B) 0.2; (C)  $0.1 + 0.02e^{-1}$ ; (D)  $0.2 + 0.02e^{-1}$ 。

三、(4分) 确定常数  $a, b$  的值, 使函数  $f(x) = \begin{cases} b \cos x + (a+1)x, & x \leq 0, \\ e^{-ax} + x^2 \cos \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$  处处可导, 并求  $f'(x)$ 。

姓名

学号

班号

学院

密

封

四、(4分) 设函数  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  内有连续的二阶导数, 且

$f'(1) = 1, f''(1) = 2$ , 求参数方程  $\begin{cases} x = f(e^{-t}) \\ y = f(e^t) \end{cases}$  所确定的函数  $y = y(x)$  在  $t = 0$  处的导

数  $\frac{dy}{dx}\bigg|_{t=0}, \frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{t=0}$ 。

五、(4分) 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$ 。

---

六、(4分) (1) 证明: 对于任意的正整数  $n$ , 都有  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ ;

(2) 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 证明数列  $\{a_n\}$  收敛。

姓名

学号

班号

学院

密

封

七、(4分) (1) 证明拉格朗日中值定理: 若函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 在开区间  $(a, b)$  内可导, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ ;

(2) 设函数  $f(x)$  在开区间  $(-1, 1)$  内具有二阶连续导数且  $f''(x) \neq 0$ , 证明: 对于开区间  $(-1, 1)$  内任一  $x \neq 0$ , 存在唯一的  $\theta(x) \in (0, 1)$ , 使得  $f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$  成立, 并证明  $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$ 。

