

主管
领导
审核
签字

哈尔滨工业大学（深圳）2020/2021 学年秋季学期

高等数学 A 试题（期末）

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
阅卷人											

注意行为规范 遵守考场纪律

姓名

学号

班号

封

学院

一、填空题（每小题 2 分，共四小题，满分 8 分）

1. $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $\frac{d}{dx} \left(\int_0^x \cos(x-t)^2 dt \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 满足初值条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题（每小题 2 分，共四小题，满分 8 分，每小题中给出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1. 设函数 $f(x) = \sec x$ 在 $x=0$ 处的二阶泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$ ，则 () .

(A) $a=1, b=\frac{1}{2}$; (B) $a=1, b=-\frac{1}{2}$; (C) $a=0, b=\frac{1}{2}$; (D) $a=0, b=-\frac{1}{2}$.

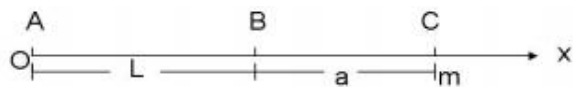
2. 设 $y = y(x)$ 是方程 $y \ln y - x + y = 0$ 所确定的隐函数，则曲线 $y = y(x)$ 在点 (1,1) 处的曲率 $K = (\quad)$.

(A) $\frac{\sqrt{5}}{15}$; (B) $\frac{\sqrt{5}}{25}$; (C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; (D) $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

3. 曲线段 $y = \int_0^x \tan t dt \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$ 的弧长等于 () .

(A) $\sqrt{3}$; (B) $2\sqrt{3}-1$; (C) $2\ln 2$; (D) $\ln(\sqrt{2}+1)$.

4. (如图所示) 设有一个质量为 M 、长为 L 的均匀细杆 AB ，在 AB 的延长线上靠近 B 端处有一质量为 m 的质点 C ，此质点到 B 的距离为 a ，则细杆 AB 与质点 C 之间的相互吸引力的大小等于()。



(提示：距离为 r 的两个质量分别为 m_1 和 m_2 的质点之间的引力大小为 $\frac{Gm_1m_2}{r^2}$ ，其中 G 为引力系数)

- (A) $\frac{GMm}{a(L+a)}$; (B) $\frac{GMm}{L(L+a)}$; (C) $\frac{GMm}{a(L+2a)}$; (D) $\frac{GMm}{L(L+2a)}$.

三、(6分) 给定函数 $y = f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} + 3$,

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值，曲线 $y = f(x)$ 的凸凹区间与拐点；
- (2) 求曲线 $y = f(x)$ 的渐近线，并作函数 $y = f(x)$ 的图形。

姓名

学号

班号

学院

四、计算下列积分（共三小题，满分 10 分）

1. (3 分) 计算定积分 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$.

2. (4 分) 计算不定积分 $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x+2}}$.

3. (3 分) 计算定积分 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x \arcsin x dx$.

五、（5分）记曲线段 $x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0, 0 \leq x \leq 1)$ 与直线 $x = 0, x = 1$ 及 x 轴所围成的平面图形为 D ,

(1) 求平面图形 D 的面积;

(2) 求图形 D 分别绕 x 轴、绕 y 轴旋转一周所成旋转体的体积.

六、（4分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(1) - 2 \int_0^1 xf(x) dx = 0$, 证明: 在开区间 $(0,1)$

内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$.

姓名

学号

班号

学院

密

封

七、(5分) 已知微分方程 $y' + ay = f(x)$, 其中 a 是非零实常数, $f(x)$ 是实数域 \mathbf{R} 上的连续函数,

(1) 若 $f(x) = x$, 求微分方程的通解;

(2) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 微分方程有且仅有一个周期为 T 的解.

八、(4分) 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$ ($n = 2, 3, \dots$);

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$.