哈尔滨工业大学（深圳）2020/2021 学年秋季学期

高等数学 A 试题（期末）参考答案

一、填空题(每题 2 分，满分 8 分)

1. $\frac{1}{2}$　　2. $\cos x^2$　　3. $\frac{\pi}{4}$　　4. $y=\sqrt{x+1}$

二、选择题(每题 2 分，满分 8 分)

1.（C）　　2.（B）　　3.（D）　　4.（A）

三、(6 分)

解：（1）该函数在定义区间上可导。函数定义域为$(-1,+\infty)\cup(-\infty,-1)$

由 $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty$，可知$x=-1$是$f(x)$的无穷间断点。

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+1)^2-2x^3(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$$

则$x>-1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；$-3<x<-1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

$x>-3$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增. 所以$f(x)$的单调增区间为$(-1,+\infty),(-\infty,-3)$,

单调减区间为$(-3,-1)$，在$x=-3$处取得极大值, $f(-3)=-\frac{15}{4}$,无极小值。

$f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$，可知$x>0$时$f''(x)>0$, $f(x)$的图像是向上凹的；

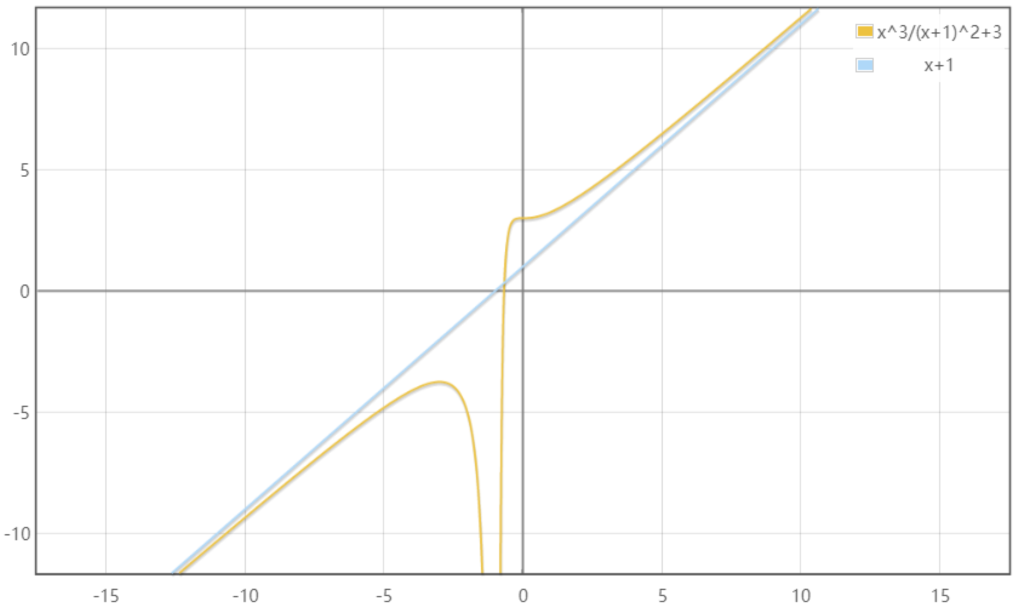
$x<0$时$f''(x)<0$, $f(x)$的图像是向上凸的，$(0,3)$是$f(x)$的拐点。

（2）$x=-1$是$f(x)$的铅直渐近线；

$x\to\infty$时, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-(x^2-2x+1)x}{(x+1)^2}+3\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^2-x}{(x+1)^2}+3\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2x^2-4x-2+3x+2}{(x+1)^2}+3\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{(x+1)^2}+1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+1\right)=1$$

所以$y=x+1$是$f(x)$的斜渐近线。图像如下所示。（蓝线为渐近线）



四、(10 **分**)

（1）原式 $=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x(1-\sin^2 x)}dx = \int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}\cos xdx - \int_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{\sin x}\cos xdx$

$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin x}d\sin x - \int_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{\sin x}d\sin x = \int_0^1\sqrt{u}du - \int_1^0\sqrt{u}du = 2\int_0^1\sqrt{u}du = 2\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$

（2）令 $t=\sqrt{x+2}$, 则$x=t^2-2$。原式 $=\int\frac{d(t^2-2)}{t^2-2+t} = \int\frac{2tdt}{t^2-2+t}$

$=\int\frac{2tdt}{(t-1)(t+2)} = \int\left(\frac{\frac{2}{3}}{t-1}+\frac{\frac{4}{3}}{t+2}\right)dt = \frac{2}{3}\ln(t-1)+\frac{4}{3}\ln(t+2)+C.$

回代得 原式 $=\frac{2}{3}\ln(\sqrt{x+2}-1)+\frac{4}{3}\ln(\sqrt{x+2}+2)+C$.

（3）原积分 $=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\arcsin xd(x^2) = \frac{1}{2}\left[x^2\arcsin x\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{8}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\frac{1}{\cos x}\cos xdx\right] = \frac{\pi}{16}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 xdx = \frac{\pi}{16}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx$

$=\frac{1}{8}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}$。

五、(5 分)（1）$S=\int_0^1 ydx=\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\sin^2 x}\cos xdx=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 xdx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2x+1)dx=\frac{\pi}{3}+\sin 2x\ \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$。

（2）绕 x 轴：$V=\int_0^1\pi y^2dx=\pi\int_0^1(4-x^2)dx==4\pi x\ \Big|_0^1-\frac{1}{3}\pi x^3\ \Big|_0^1=\frac{11\pi}{3}$；

绕 y 轴：$V=\int_0^1 2\pi xydx=2\pi\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}dx=\pi\int_0^1\sqrt{4-x^2}d(x^2)=\pi\int_0^1\sqrt{4-u}du$

$=\pi\int_3^4\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}\pi x^{\frac{3}{2}}\ \Big|_3^4=\frac{2}{3}\pi(8-3\sqrt{3}).$

六、(4 **分**)

证明：

设$F(x)=f(1)x-\int_0^x tf(t)dt$，则 $F(0)=0,$由$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}tf(t)dt=0,$

有$\frac{1}{2}f(1)-\int_0^{\frac{1}{2}}tf(t)dt=0,$所以$F(\frac{1}{2})=0$。易知$F(x)$在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导, 所以由罗尔定理

$\exists\eta\in(0,\frac{1}{2}),$使$F'(\eta)=0,$而$F'(x)=f(1)-xf(x)$，所以$\exists\eta\in(0,\frac{1}{2}),$使$f(1)=\eta f(\eta)$

设$G(x)=xf(x)$，则$G(1)=f(1)$，$G(\eta)=f(1)$，易知$G(x)$在$[0,1]$上连续,$(0,1)$内可导

所以由罗尔定理,$\exists\xi\in(\eta,1),$使得$G'(\xi)=0$，而$G'(x)=xf'(x)+f(x),$所以

$\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1),$使得$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$，也即$f'(\xi)=-\frac{f(\xi)}{\xi}$成立，证毕。

七、(5 **分**)

解：（1）该方程的通解为

$$y=Ce^{-\int adx}+e^{-\int adx}\int xe^{\int adx}dx=Ce^{-ax}+e^{-ax}\int xe^{ax}dx=Ce^{-ax}+\frac{1}{a}e^{-ax}\int xd(e^{ax})$$

$$=Ce^{-ax}+\frac{1}{a}e^{-ax}(xe^{ax}-\int e^{ax}dx)=Ce^{-ax}+\frac{1}{a}x-\frac{1}{a^2}.$$

（2）（在微分方程中涉及讨论解的性质(有界性、周期性等)及极限等问题时，应采用变限积分来表示具体的一个原函数）

该方程的通解为 $y = Ce^{-\int_0^x adx} + e^{-\int_0^x adx}\int_0^x e^{\int_0^t ads}f(t)dt = e^{-ax}(C + \int_0^x e^{at}f(t)dt)$

$$y(x+T) - y(x) = e^{-ax}\left[\left(\frac{1}{e^{aT}} - 1\right)C + \frac{1}{e^{aT}}\int_0^{x+T} e^{at}f(t)dt - \int_0^x e^{at}f(t)dt\right].$$

由于 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，所以 $\frac{1}{e^{aT}}\int_0^{x+T} e^{at}f(t)dt = \frac{1}{e^{aT}}(\int_0^T e^{at}f(t)dt + \int_T^{x+T} e^{at}f(t)dt)$

$$= \frac{1}{e^{aT}}\int_0^T e^{at}f(t)dt + \frac{1}{e^{aT}}\int_0^x e^{a(u+T)}f(u+T)du = \frac{1}{e^{aT}}\int_0^T e^{at}f(t)dt + \frac{e^{aT}}{e^{aT}}\int_0^x e^{au}f(u)du$$

$$= \frac{1}{e^{aT}}\int_0^T e^{at}f(t)dt + \int_0^x e^{at}f(t)dt$$

所以，$y(x+T) - y(x) = e^{-ax}\left[\left(\frac{1}{e^{aT}} - 1\right)C + \frac{1}{e^{aT}}\int_0^T e^{at}f(t)dt\right]$,

所以，当且仅当 $C = \frac{1}{e^{aT} - 1}\int_0^T e^{at}f(t)dt$ 时，$y(x+T) - y(x) \equiv 0$，

所以方程存在唯一的以 T 为周期的解。证毕。

八、(4 分)

(1)证明：$a_{n+1} - a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x(\sin x - 1)\cos^2 xdx$，由于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上 $\sin^n x(\sin x - 1)\cos^2 x < 0$,

所以 $a_{n+1} - a_n < 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调减少。

$n \ge 2$ 时，$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cos xd\sin x = \int_0^1 u^n\sqrt{1-u^2}du = -\frac{1}{2}\int_0^1 u^{n-1}\sqrt{1-u^2}d(1-u^2)$

$$= -\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\int_0^1 u^{n-1}d(1-u^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}\left[(1-u^2)^{\frac{3}{2}}u^{n-1}\Big|_0^1 - (n-1)\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{3}{2}}u^{n-2}du\right]$$

$$= \frac{1}{3}(n-1)\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{3}{2}}u^{n-2}du = \frac{n-1}{3}\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{1}{2}}(1-u^2)u^{n-2}du$$

$$= \frac{n-1}{3}(\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{1}{2}}u^{n-2}du - \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{1}{2}}u^n du) = \frac{n-1}{3}a_{n-2} - \frac{n-1}{3}a_n,$$

移项，整理得：$a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2} (n = 2, 3, \ldots)$，证毕。

(2)解：$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+2} \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$，由于 $\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} > 1$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{n-1}{n+2}$，又 $\frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$，

且 $\lim\limits_{x \to \infty} 1 = 1$，$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{n-1}{n+2} = 1$，由夹逼准则，$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} =1$.