2021 秋高等数学 A 期中试题答案

一、填空题（每小题 1 分，共 4 小题，满分 4 分）

1. $\dfrac{1}{a}$；　2. $y=2x+1$；3. $\dfrac{1}{2}$　；4. $.341\mathrm{e}^{2}$

二、选择题（每小题 1 分，共 4 小题，满分 4 分）

1. (D)；　2. (B)；　3. (A)；　4. (D).

三、(4 分) 求函数 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的间断点，并判断间断点的类型。

解　$x=-1, x=0, x=1, x=2$ 是间断点。

因为

$$\lim_{x\to -1}\frac{(1+x)\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{|x|(x-1)}=\frac{\sin 1\cos\frac{1}{3}}{2}$$

所以 $x=-1$ 是函数的可去间断点。

因为

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{(1+x)\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{-x(x-1)}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos\frac{x}{2-x}}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x)\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\frac{x}{2-x}}{x-1}=-1$$

所以 $x=0$ 是函数的跳跃间断点。

因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1+x)\sin x\cos\frac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}=\infty$$

所以 $x=1$ 是函数的第二类间断点（或无穷间断点）。

因为

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{(1+x)\sin x\cos\dfrac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sin x}{|x|(x-1)}\lim_{x\to 2^+}\cos\frac{x}{2-x}$$

不存在，所以$x=2$是函数的第二类间断点（或振荡间断点）。

四、(4 分) 设参数方程$\begin{cases}x=t+\arctan t+1,\\ y=t^3+6t-2\end{cases}$确定函数$y=y(x)$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{3t^2+6}{1+\dfrac{1}{1+t^2}}=\frac{(3t^2+6)(1+t^2)}{t^2+2}=3(1+t^2)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{6t}{1+\dfrac{1}{1+t^2}}=\frac{6t^3+6t}{t^2+2}$$

五、(4 分) 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$。

解 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos^2x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\dfrac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x\cos 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\dfrac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 4x}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\dfrac{(4x)^2}{2}}{12x^2}=\frac{4}{3}$$

六、(3 分) 设函数$f(x)$当$|x|\le 1$时具有二阶导数，且满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{\tan x}}-1}{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+4x\right)}=-3$，

求$f(0),f'(0)$及$f''(0)$。

解 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{\tan x}}-1}{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+4x\right)}=-3$得$f(0)=0$。

又

$$-3=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{f(x)}{\tan x}}-1}{\ln\left(e^{\sin x}+4x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{\tan x}}{e^{\sin x}+4x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{10x}$$

所以 $f'(0)=0$。

由二阶导数定义得

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=-30$$

七、(3 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上连续，在开区间 $(0,2)$ 内可导，且 $f(2)=0$，$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5$，证明：(1) 存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $f(\eta)=\eta$；(2) 存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)=\frac{2\xi-f(\xi)}{\xi}$。

证 (1) 由 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5$ 得 $f(1)=2$。

设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 上连续，且

$$F(1)=f(1)-1=2-1=1>0,\ F(2)=f(2)-2=0-2=-2<0$$

由零点存在定理，存在 $\eta\in(1,2)$，使得

$$F(\eta)=f(\eta)-\eta=0$$

即 $f(\eta)=\eta$。

设 $G(x)=x\left(f(x)-x\right)$，则 $G(x)$ 在闭区间 $[0,\eta]$ 上连续，在开区间 $(0,\eta)$ 内可导，且 $G(0)=G(\eta)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得

$$G'(\xi)=\left(f(\xi)-\xi\right)+\xi\left(f'(\xi)-1\right)=0$$

即

$$f'(\xi)=\frac{2\xi-f(\xi)}{\xi}$$

八、(4 分) 设数列 $\{x_n\}$ 满足关系式 $0<x_1<\pi,\ x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$，(1) 证明极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，并计算此极限；(2) 计算极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$。

证　（1）当 $x>0$ 时，有不等式 $\sin x<x$ 。

用数学归纳法证明 $0<x_{n+1}<x_n<\pi\ (n=1,2,\cdots)$。当 $n=1$ 时，有

$$0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi$$

假设 $n=k$ 时，有

$$0<x_{k+1}<x_k<\pi$$

则当 $n=k+1$ 时，有

$$0<x_{k+1}=\sin x_k<x_k<\pi$$

由数学归纳法知 $0<x_{n+1}<x_n<\pi\ (n=1,2,\cdots)$，因此数列 $\{x_n\}$ 单调有界，由单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ ，对 $x_{n+1}=\sin x_n$ 取极限得 $a=\sin a$ ，所以 $a=0$ ，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

（方法一）因为

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sin x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-x\sin x}{6x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$$

（方法二）因为

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x^3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$$