主管
领导
审核
签字

哈尔滨工业大学（深圳）2021年秋季学期

高等数学 A（期中）试题

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得　分											
阅卷人											

考生须知：本次考试为闭卷考试，考试时间为 90 分钟，总分 30 分。

姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 班号＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿

密　封　线

一、本题得分＿＿＿

填空题（每小题 1 分，共 4 小题，满分 4 分）

1. 设$0<a<b$，则数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{-n}+b^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}=$＿＿＿＿＿＿.

2. 若记曲线$3x+2y^3-2x^2\sin y=2$与y轴的交点为P，则曲线在点P处的法线方程为＿＿＿＿＿＿.

3. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为反函数，$f(x)$ 二阶可导，且 $f(1)=3, f'(1)=-2,$ $f''(1)=4$，则$g''(3)=$＿＿＿＿＿＿.

4. 已知函数$f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x+3}$，则$f^{(20)}(1)=$＿＿＿＿＿＿.

二、本题得分＿＿＿

选择题（每小题 1 分，共 4 小题，满分 4 分，每小题中给出的四个选项中只有一个是符合题目要求的，把所选项的字母填在题后的括号内）

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, x<0,\\ 1, x\geq 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-ax, x\leq -1,\\ x, -1<x<0,\\ x-b, x\geq 0\end{cases}$，若 $f(x)+g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则(　　)

(A) $a=3,b=1$；(B) $a=3,b=2$；(C) $a=-3,b=1$；(D) $a=-3,b=2$。

2. 设函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内可导且只有一个零点 $x=-3$，则函数 $f(x)=\left|x^3+2x^2-3x\right|g(x)$ 的不可导点的个数是(　　)

(A) 1；(B) 2；(C) 3；(D) 4。

3. 设$k\neq 0$为常数，函数$y=f(x)$在点x_0处的增量$\Delta y\big|_{x=x_0}=k(\Delta x)^{\frac{1}{3}}+o(\Delta x)$，则函数$y=f(x)$在点$x_0$处(　　)

(A) 连续，不可微；　　(B) 可微且$f'(x_0)=k$；

(C) 可微且$f'(x_0)=0$；　　(D) 可微且$f'(x_0)=1$。

4. 有一圆柱体底面半径与高随时间变化的速率分别为$2\,\mathrm{cm/s}$, $-3\,\mathrm{cm/s}$，当底半径为$10\,\mathrm{cm}$，高为$5\,\mathrm{cm}$时，圆柱体的体积与侧表面积（即圆柱面上的那部分面积）随时间变化的速率分别为(　　)

(A) $125\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}, 40\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$；　　（B）$125\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}, -40\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$；

(C) $-100\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}, 40\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$；　　(D) $-100\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}, -40\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$。

三、　本题得分______

(4 分) 求函数$f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x\cos\dfrac{x}{2-x}}{|x|(x+1)(x-1)}$的间断点，并判断间断点的类型。

姓名________ 学号________ 班号________ 学院________

……………………密……………………封……………………

四、本题得分______

(4 分) 设参数方程$\begin{cases} x = t + \arctan t + 1, \\ y = t^3 + 6t - 2 \end{cases}$确定函数 $y = y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$。

五、本题得分______

(4 分) 计算极限$\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$。

六、 本题得分______

(3 分) 设函数 $f(x)$ 当 $|x|\le 1$ 时具有二阶导数，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{\tan x}}-1}{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+4x\right)}=-3$，求 $f(0), f'(0)$ 及 $f''(0)$。

七、本题得分______

(3 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上连续，在开区间 $(0,2)$ 内可导，且 $f(2)=0$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=5$，证明：（1）存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $f(\eta)=\eta$；（2）存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{2\xi-f(\xi)}{\xi}$。

姓名______ 学号______ 班号______ 学院______

……密……封……

八、本题得分______

(4 分) 设数列$\left\{x_n\right\}$满足关系式$0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n\left(n=1,2,\cdots\right)$，(1) 证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并计算此极限；(2) 计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$。