声明：本人绝对未在考试中实施任何作弊行为，也绝对未将试卷带出考场，以下试题仅是凭记忆整理，可能不尽准确，仅供参考。请不要将该试题传到工大以外。

哈尔滨工业大学（深圳）2021/2022 学年秋季学期

高等数学 A 期末试题（回忆版本）

【2022.5.22 10:30—12:30】（此卷满分 50 分）

一、填空题（每题 2 分，共 8 分）

1. 函数 $y = x^2 - x + 1$ 在$(0,1)$处的曲率为_____________。

2. 曲线由参数方程$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 2 \\ y = t^3 - 3t + 2 \end{cases}$确定，则曲线上凸的 x 取值范围为___________。

3. $f(x)$连续，$\dfrac{d}{dx}\int_0^x t^2 f(x^3 - t^3)dt =$_________。

4. 参数方程$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 - t \\ y = t^2 \end{cases}$对应于参数 $0 < t < 3$ 的弧长为_________。

二、选择题（每题 2 分，共 8 分）

1. $f(x) = \begin{cases} \sin x, 0 \le x < \pi \\ 2, \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$，$F(x) = \int_0^x f(t)dt$，则

（A）$x = \pi$为$F(x)$的跳跃间断点

（B）$x = \pi$为$F(x)$的可去间断点

（C）$F(x)$在$x = \pi$处连续不可导

（D）$F(x)$在$x = \pi$处可导

2. $\dfrac{\sin x}{1 + x^2}$在$x = 0$处的三阶泰勒展开式为$ax + bx^2 + cx^3$，则 a，b，c 分别为

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}, 1 \le x < e \\ \dfrac{1}{x(\ln x)^{1+\alpha}}, x \ge e \end{cases}$，使反常积分$\int_1^\infty f(t)dt$收敛的 α 取值范围是

4. $f'(x)$连续可导， $f''(x)+e^{x}[f'(x)]^{2}=ln(x+1)$， $f'(0)=0$ ，则

（A）$f(x)$在 $x=0$处取得极小值

（B）$f(x)$在 $x=0$处取得极大值

（C）$(0,f(0))$是 $f(x)$的拐点

（D）$(0,f(0))$不是 $f(x)$的拐点，也不是极值点

三、(9 分)

1. 计算不定积分 $\int \frac{3x+6}{(x+1)(x^{2}+x+1)}dx$.

2. 计算不定积分 $\int \frac{arctan\ e^{x}}{e^{x}}dx$.

3. 计算定积分 $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^{2}\sqrt{1+x^{2}}}$.

四、(6 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_{0}^{x} t\ ln(1+t\ sin\ t)dt}{1-\cos(x^{2})}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{4\pi}{n}}+...+\sqrt{1+\cos\frac{2n\pi}{n}}\right)$.

五、(6 分)

1. 设 A 为由 $y=3x^{2}$，x 轴和直线 x=2 围成的图形。求：

（1）A 的面积；

（2）A 绕 y 轴和绕直线 x=3 旋转一周所得旋转体的体积。

2. 一容器的内壁是由 $y=x^{2}(0\le y\le H)$绕 y 轴旋转而成。该容器内盛有深度为 $\frac{H}{2}$ 的水。现要将这些水全部抽出，问要做多少功？（水的密度为 ρ，重力加速度为 g，长度单位：m）

六、(6 分)

1. $5x\int_0^1 f(xt)\,dt = 2\int_0^x f(x)dx + xf(x) + x^3$，$f(1)=1$，求 $f(x)$。

2. 求微分方程 $2yy'' = 1 + (y')^2$ 满足初值条件 $y'|_{x=1} = -1, y|_{x=1} = 1$ 的特解。

七、(4 分)

1. 证明在 $[0,1]$ 上，$2x - \sin\frac{\pi}{2}x \le 1$；

2. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^1\left(1+\sin\frac{\pi}{2}x\right)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$。

八、(3 分)

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶连续导函数，证明：对任意实数 a，b，$f''(x) \ge 0$ 的充要条件是 $f(\frac{a+b}{2}) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$。